

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa lądowego i Wodnego
Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej



REDUKCJA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE I GRAFICZNE

Zadanie nr 1.

Dokonać redukcji układu sił do początku bazy współrzędnych. Znaleźć położenie wypadkowej.

Zadanie nr 2.

Znaleźć układ równoważący składający się z dwóch sił, z których jedna przechodzi przez punkt E, druga leży na prostej c przechodzącej przez punkty C_1 i C_2

Zadanie nr 3.

Wyznaczyć układ równoważący składający się z trzech sił leżących na prostych k , l , n przechodzących przez punkty odpowiednio K_1 i K_2 , L_1 i L_2 , N_1 i N_2 .

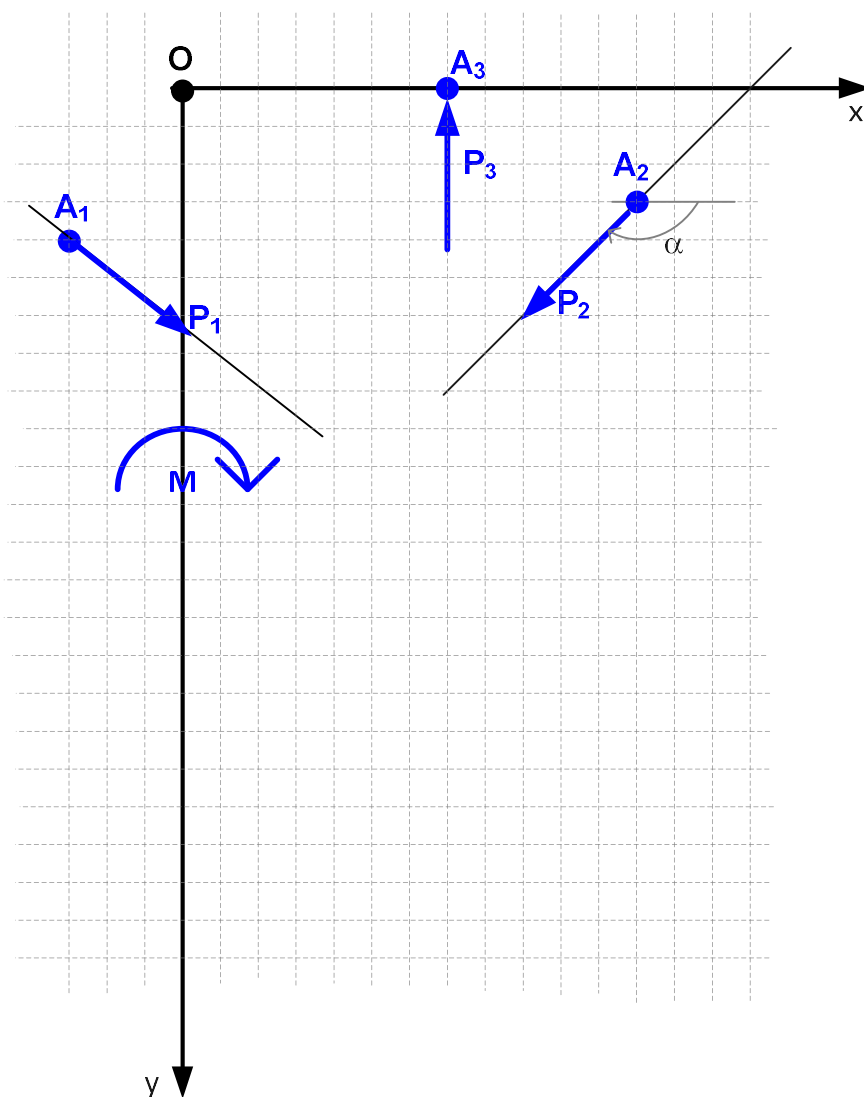
ROZWIĄZANIA ANALITYCZNE

Zadanie nr 1.

Dokonać redukcji układu sił P_1 (8,6) [kN], $P_2=10\sqrt{2}$ kN, P_3 (0,-12) [kN] oraz $M = 30$ kNm do początku bazy współrzędnych (Punkt O)

Punkty lokacyjne prostych działania sił: P_1 - A_1 (-3,4) [m], P_2 - A_2 (12,3) [m] oraz kąt nachylenia prostej wynosi $\alpha=135^\circ$, P_3 - A_3 (7,0) [m].

Znaleźć położenie wypadkowej układu.



Rozłożenie siły P_2 na składowe:

$$P_{2x} = P_2 \cos \alpha = 10\sqrt{2} \cos 135^\circ = -10 \text{ kN}$$

$$P_{2y} = P_2 \sin \alpha = 10\sqrt{2} \sin 135^\circ = 10 \text{ kN}$$

Składowe sił „niebieskich”:

$$P_{1x} = 8 \text{ kN} \quad P_{2x} = -10 \text{ kN} \quad P_{3x} = 0$$

$$P_{1y} = 6 \text{ kN} \quad P_{2y} = 10 \text{ kN} \quad P_{3y} = -12 \text{ kN}$$

Składowe siły ogólnej:

$$S_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 8 - 10 + 0 = -2 \text{ kN}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 6 + 10 - 12 = 4 \text{ kN}$$

Moment ogólny:

z definicji momentu

$$M_o = \sum_{i=1}^n (P_{iy} x_{Ai} - P_{ix} y_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_j = [6 \cdot (-3) - 8 \cdot 4] + [10 \cdot 12 - (-10) \cdot 3] + [-12 \cdot 7] + 30 = 46 \text{ kNm}$$

LUB

z rysunku

$$M_o = -P_{1x} \cdot 4 - P_{1y} \cdot 3 + P_{2x} \cdot 3 + P_{2y} \cdot 12 - P_3 \cdot 7 + 30 = 46 \text{ kNm}$$

LUB

z rysunku (po „przesunięciu” siły P_2 do przecięcia z osią x)

$$M_o = -P_{1x} \cdot 4 - P_{1y} \cdot 3 + P_{2y} \cdot 15 - P_3 \cdot 7 + 30 = 46 \text{ kNm}$$

Wypadkowa układu sił

$$W_x = -2 \text{ kN}$$

$$W_y = 4 \text{ kN}$$

$$W = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ kN}$$

Równanie prostej działania wypadkowej

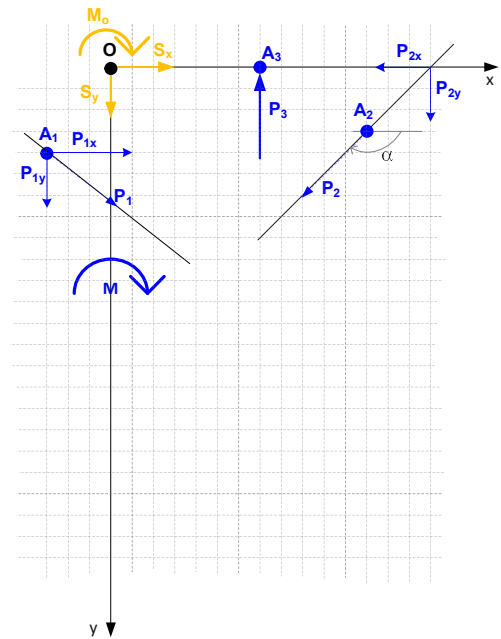
$$M_o = W_y \cdot x - W_x \cdot y$$

$$46 = 4 \cdot x + 2 \cdot y$$

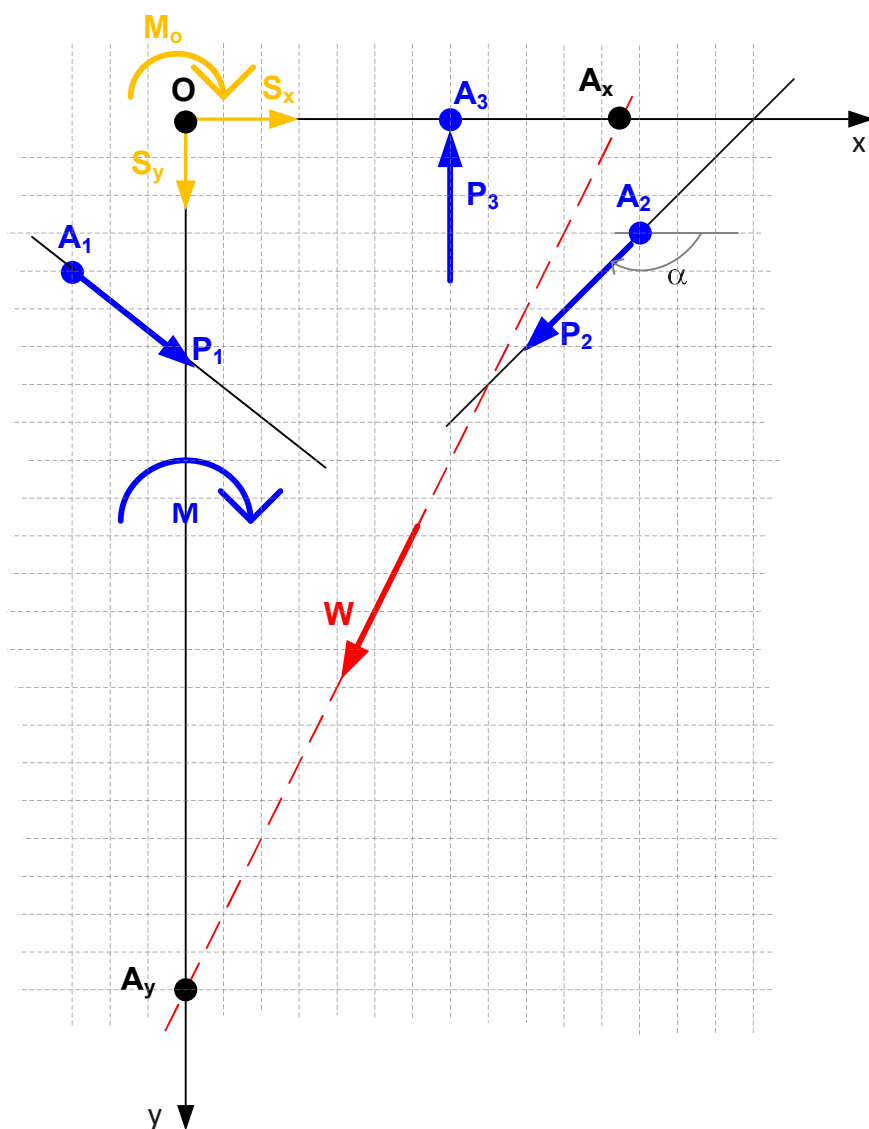
$$y = -2x + 23$$

$$A_x (11,5; 0)$$

$$A_y (0; 23)$$



Wynik – położenie wypadkowej:



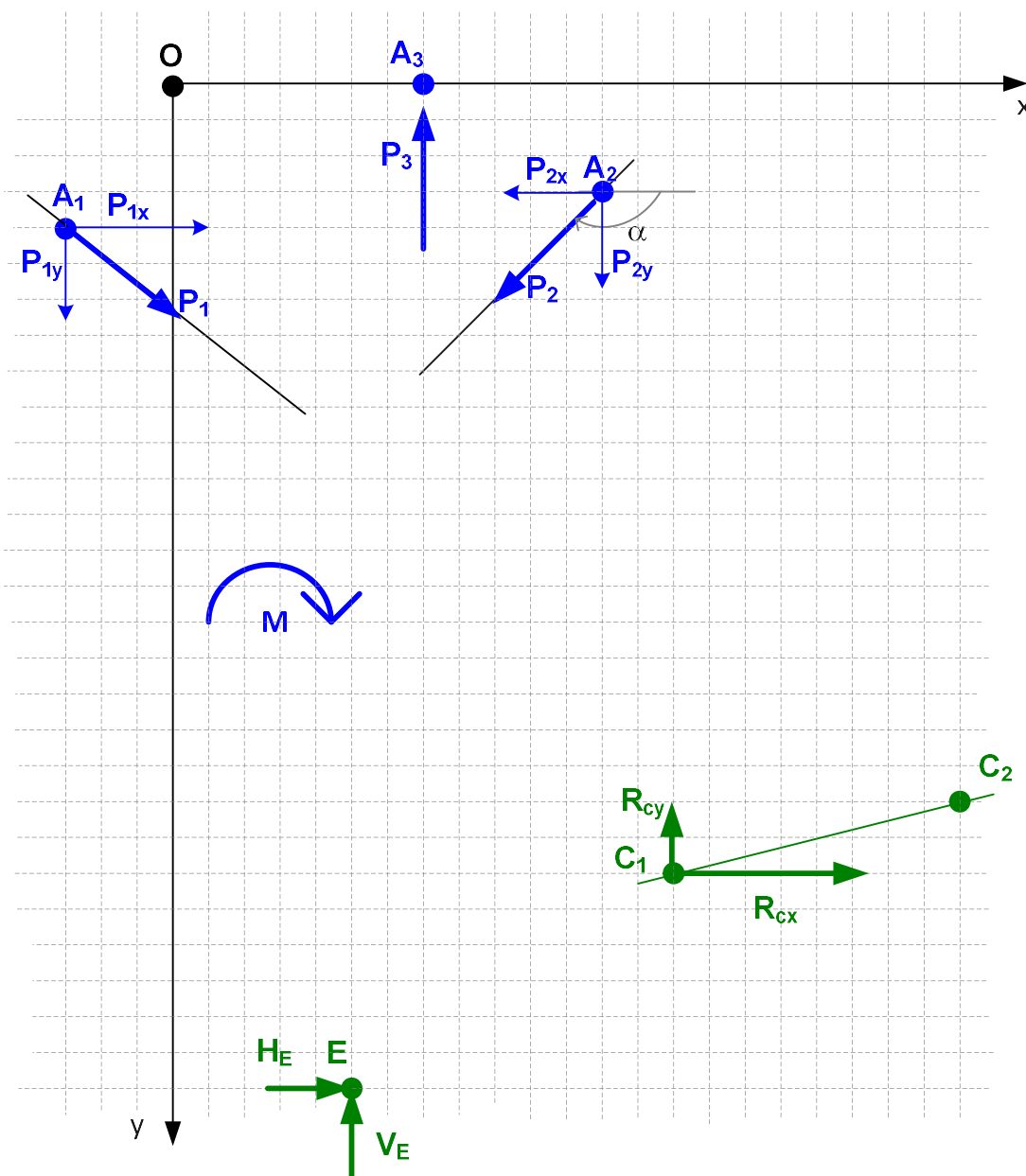
**oraz wartość
wypadkowej:**

$$\vec{W} = (-2, 4)[kN]$$

$$W = 2\sqrt{5}kN$$

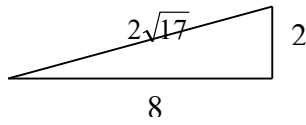
Zadanie nr 2.

Znaleźć układ równoważący składający się z dwóch sił, z których jedna przechodzi przez punkt $E(5,28)$ [m], druga leży na prostej c przechodzącej przez punkty $C_1(14,22)$ [m] i $C_2(22,20)$ [m].



Przyjęto dowolnie zwroty nieznanych sił V_E , H_E , R_C

Rozłożenie siły R_C na składowe:



$$\frac{R_{CY}}{R_{CX}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$R_{CY} = \frac{2}{2\sqrt{17}} R_C = \frac{1}{\sqrt{17}} R_C$$

$$R_{CX} = \frac{8}{2\sqrt{17}} R_C = \frac{4}{\sqrt{17}} R_C$$

a) siły niebieskie:

3 równania równowagi

$$\sum M_E = 0$$

$$30 + 8 \cdot 24 - 6 \cdot 8 - 10 \cdot 25 + 10 \cdot 7 - 12 \cdot 2 + R_C \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 6 - R_C \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 9 = 0$$

stąd otrzymujemy $R_C = 8,246 \text{ kN}$

$$\sum X = 0$$

$$8 - 10 + 0 + H + R_C \frac{4}{\sqrt{17}} = 0$$

Znamy już R_C , więc otrzymujemy
 $H = -6 \text{ kN}$

$$\sum Y = 0$$

$$6 + 10 - 12 - V - R_C \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$$

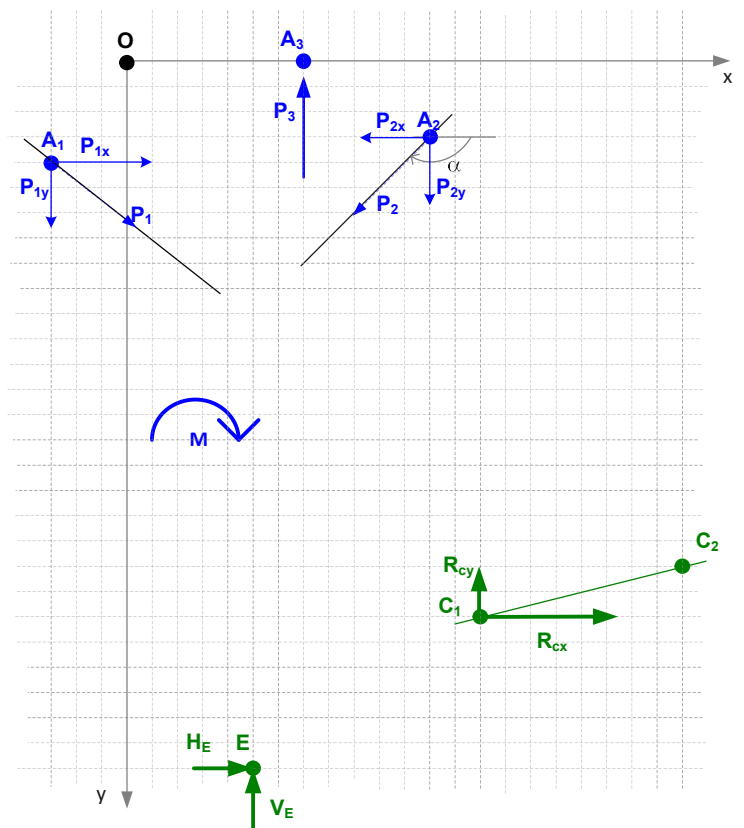
Znamy już R_C , więc otrzymujemy
 $V = 2 \text{ kN}$

Stąd nieznane siły z układu
 równoważące to:

$$R_C = 8,246 \text{ kN}$$

$$R_E = \sqrt{V^2 + H^2} = 6,324 \text{ kN}$$

LUB



b) wykorzystano wynik z 1 (siły czerwone):

3 równania równowagi

$$\sum M_o = 0$$

$$46 - H \cdot 28 - V \cdot 5 - Rc \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 22 - Rc \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 14 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$-2 + H + Rc \frac{4}{\sqrt{17}} = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$4 - V + Rc \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$$

Stąd otrzymujemy nieznane siły układu równoważącego:

$$Rc = 8,246 \text{ kN}$$

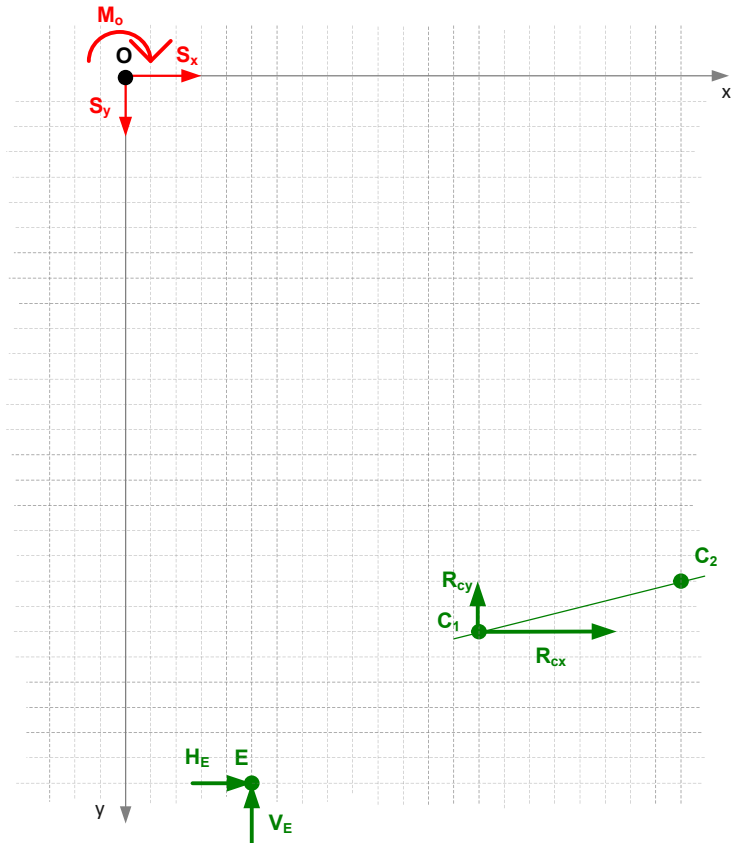
$$V = 2 \text{ kN}$$

$$H = -6 \text{ kN}$$

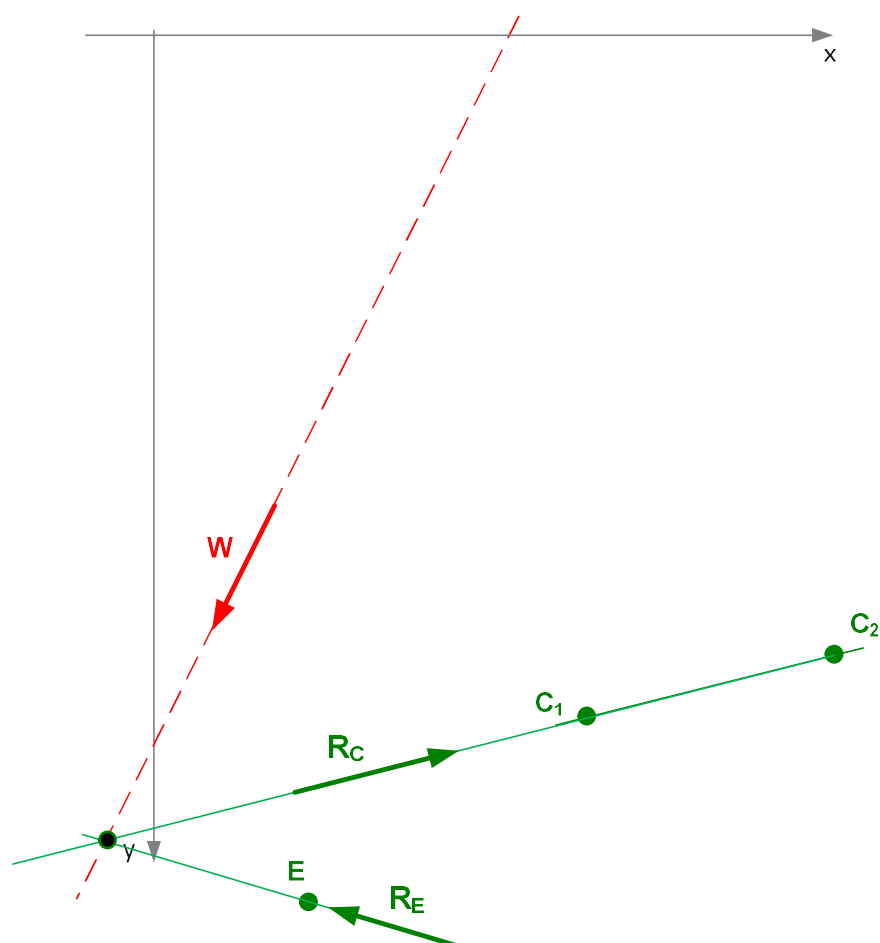
$$R_E = \sqrt{V^2 + H^2} = 6,324 \text{ kN}$$

Znak minus w wyniku świadczy o tym, że siła ma inny zwrot niż założyliśmy.

Można sprawdzić wyniki zapisując inne równanie równowagi niż wykorzystane, podstawiając wyliczone siły i sprawdzić, czy wynik będzie zero.



Wynik – położenie sił R_C i R_E :



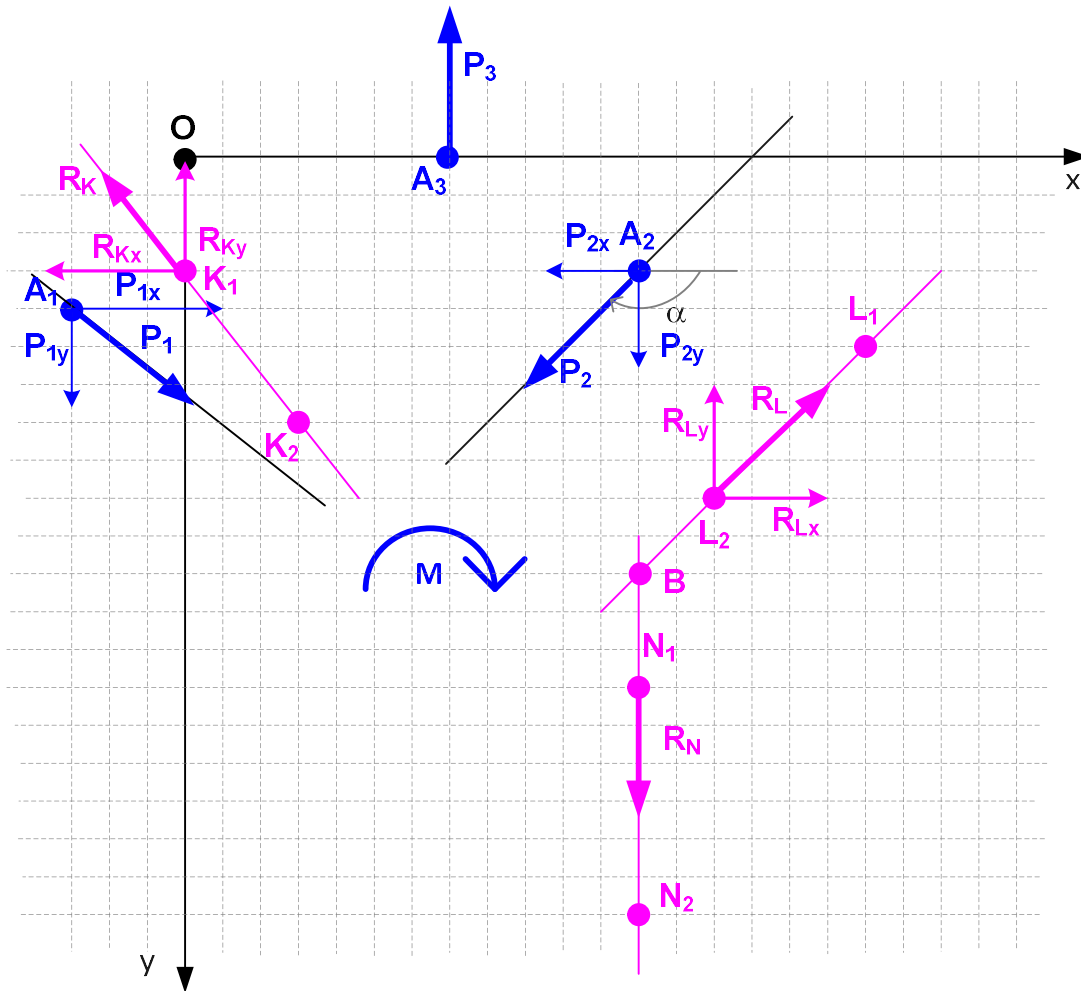
oraz wartości sił:

$$\vec{R}_C = (8, -2)[kN], \quad R_C = 8,246kN$$

$$\vec{R}_E = (-6, -2)[kN], \quad R_E = 6,324kN$$

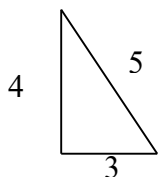
Zadanie nr 3.

Wyznaczyć układ równoważący składający się z trzech sił leżących na prostych k , l , n przechodzących przez punkty odpowiednio $K_1(0,3)$ [m] i $K_2(3,7)$ [m], $L_1(18,5)$ [m] i $L_2(14,9)$ [m], $N_1(12,14)$ [m] i $N_2(12,20)$ [m].



Przyjęto dowolnie zwroty nieznanymi sił R_K , R_L , R_N

Rozłożenie siły R_K na składowe:



$$\frac{R_{Kx}}{R_{Ky}} = \frac{3}{4}, \quad R_{Kx} = \frac{3}{5} R_K, \quad R_{Ky} = \frac{4}{5} R_K$$

Rozłożenie siły R_L na składowe:

$$\frac{R_{Lx}}{R_{Ly}} = \frac{4}{4} = 1, \quad R_{Lx} = R_{Ly} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_K$$

Punkt B – punkt przecięcia dwóch prostych działania niewiadomych sił R_N i R_L - $B(12;11)$ [m]

a) siły niebieskie:

3 równania równowagi

$$\sum M_B = 0$$

$$30 + 8 \cdot 7 - 6 \cdot 15 - 10 \cdot 8 + 12 \cdot 5 + R_{Ky} \cdot 12 - R_{Kx} \cdot 8 = 0$$

stąd otrzymujemy $R_K = 5kN$

$$\sum X = 0$$

$$8 - 10 + 0 - R_{Kx} + R_{Lx} = 0$$

Znamy już R_{Kx} , więc otrzymujemy

$$R_{Lx} = 5kN, \text{ więc } R_L = 5\sqrt{2}kN$$

$$\sum Y = 0$$

$$6 + 10 - 12 - R_{Ly} - R_{Ky} + R_N = 0$$

Znamy już R_{Ky} i R_{Ly} , więcotrzymujemy $R_N = 5kN$

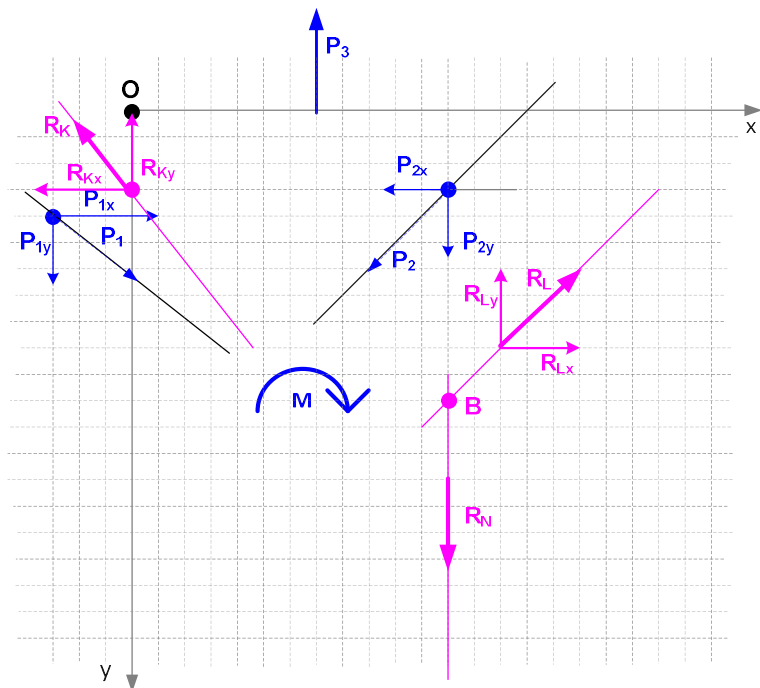
Otrzymano nieznane siły układu równoważącego:

$$R_K = 5kN$$

$$R_L = 5\sqrt{2}kN$$

$$R_N = 5kN$$

LUB



b) wykorzystano wynik z 1 (siły czerwone):

3 równania równowagi

$$\sum M_o = 0$$

$$46 - R_{Kx} \cdot 3 - R_{Lx} \cdot 9 - R_{Ly} \cdot 14 + R_N \cdot 12 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$-2 - R_{Kx} + R_{Lx} = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$4 - R_{Ky} - R_{Ly} + R_N = 0$$

Stąd otrzymujemy nieznane siły układu równoważącego:

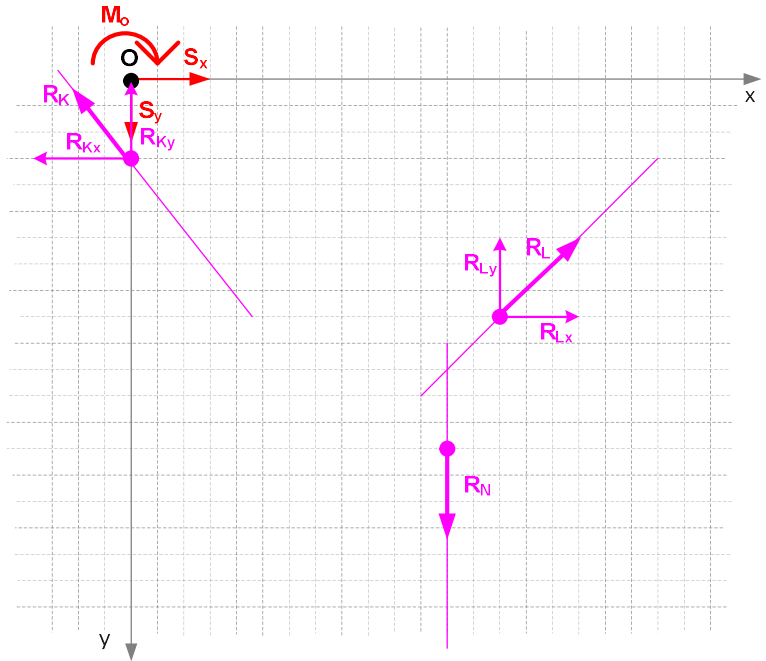
$$R_K = 5 \text{ kN}$$

$$R_L = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ kN}$$

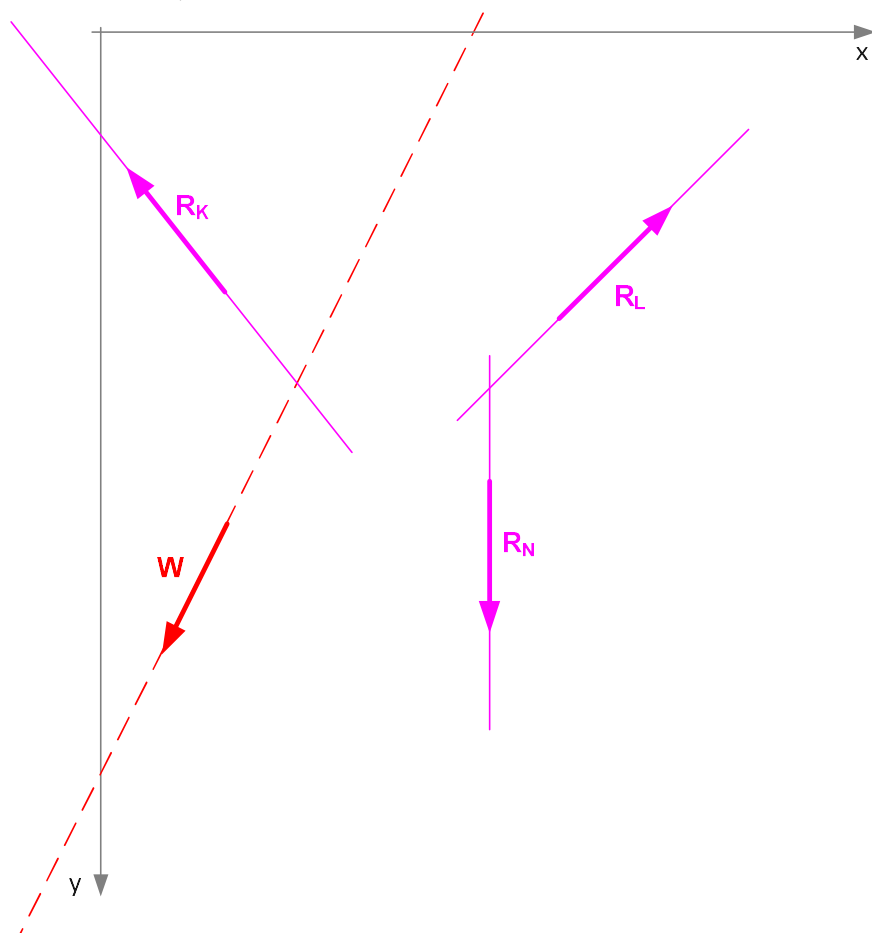
$$R_N = 5 \text{ kN}$$

Znaki dodatnie świadczą o tym, że siły mają zwroty jak przyjęto.

Można sprawdzić wyniki zapisując inne równanie równowagi niż wykorzystane, podstawiając wyliczone siły i sprawdzić, czy wynik będzie zero.



Wynik – położenie sił R_N , R_K i R_L :



oraz wartości sił:

$$\vec{R}_K = (-3, -4)[kN], \quad R_K = 5 \text{ kN}$$

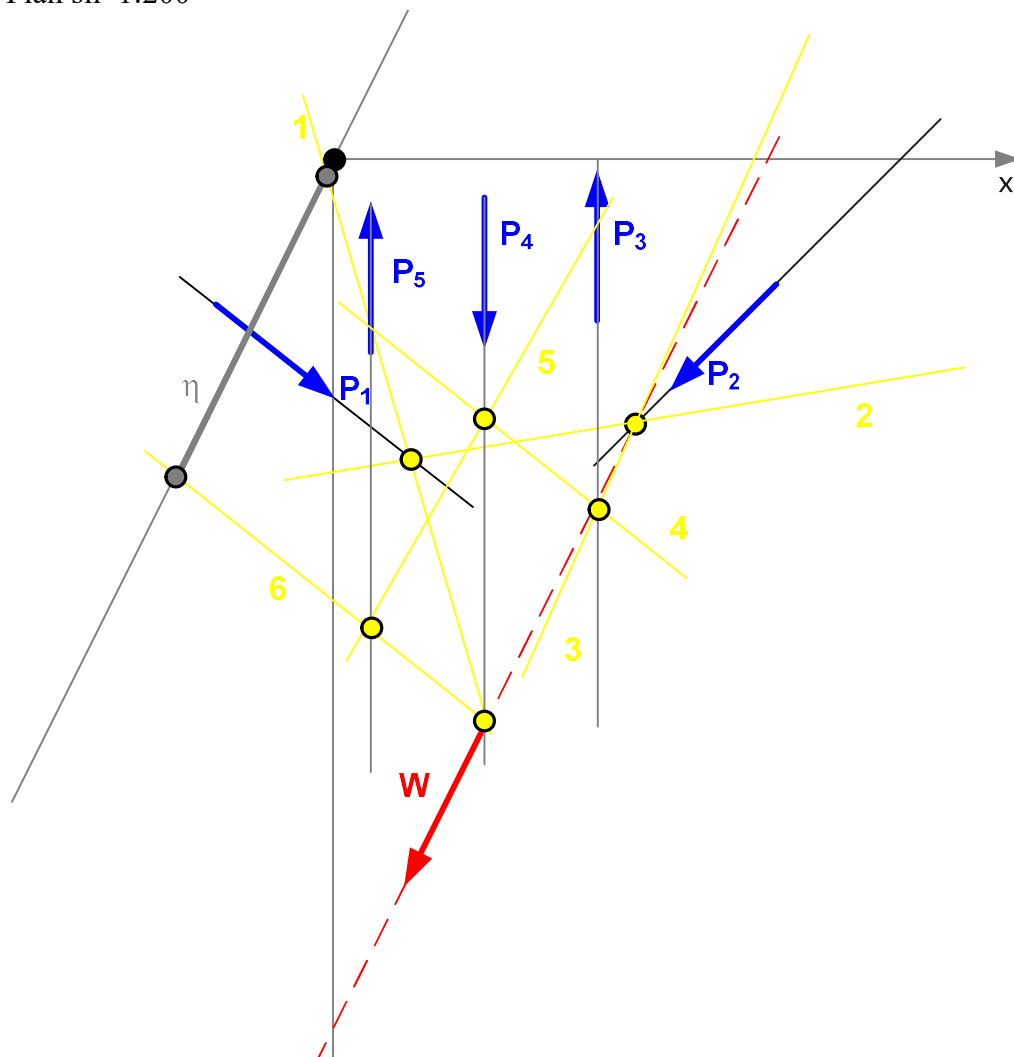
$$\vec{R}_L = (5, -5)[kN], \quad R_L = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ kN}$$

$$\vec{R}_N = (0, 5)[kN], \quad R_N = 5 \text{ kN}$$

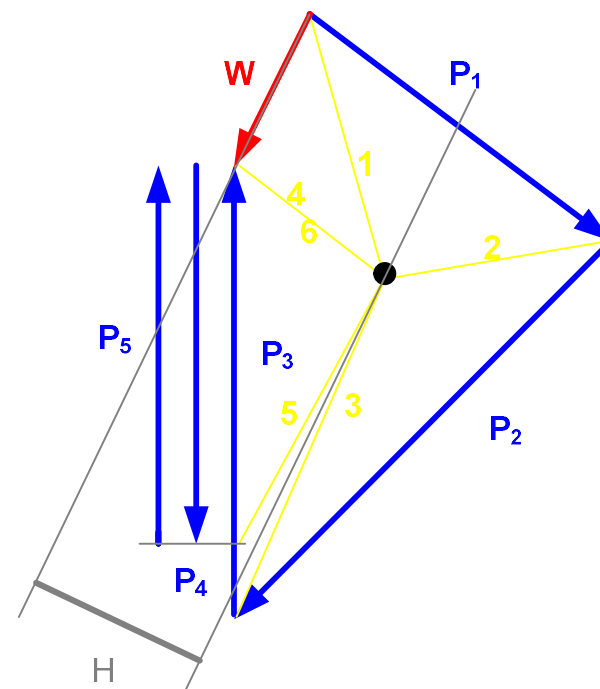
ROZWIĄZANIA GRAFICZNE

Zadanie nr 1.

Plan sił 1:200



Wielobok sił 1 cm – 2 kN



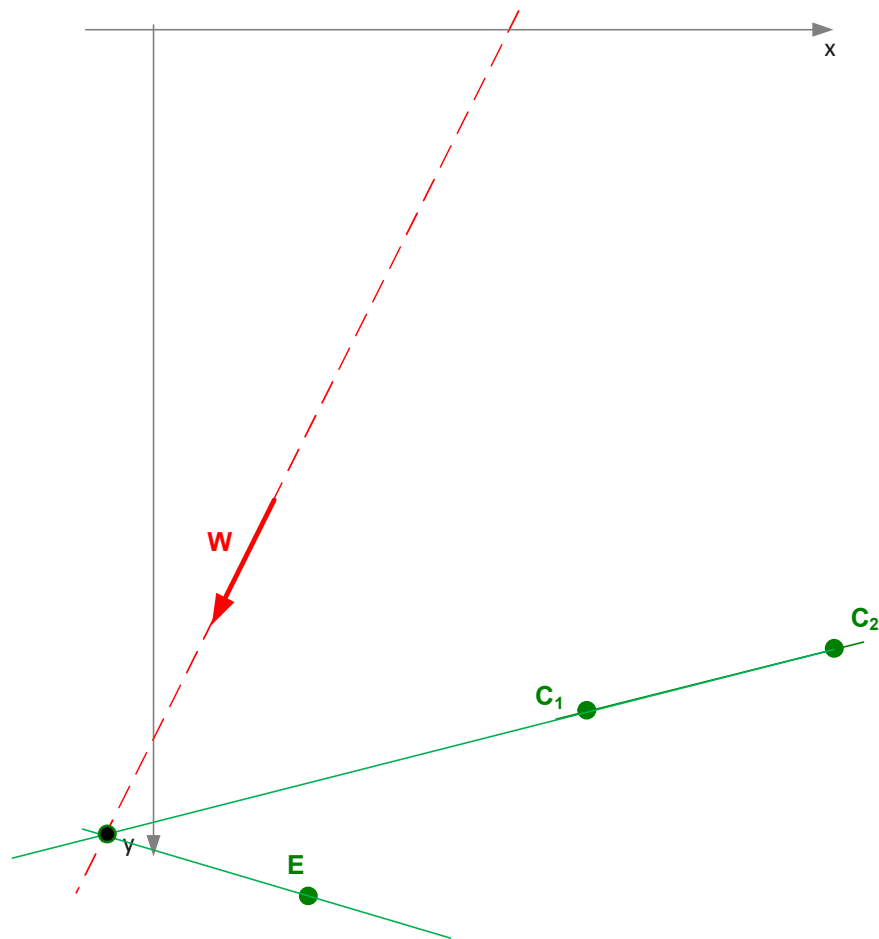
Odczyty

$$M_o = H\eta = 46 \text{ kNm},$$

$$W = 4,4 \text{ kN}$$

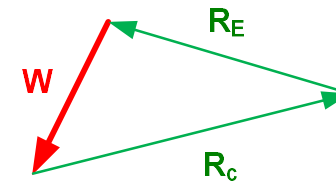
Zadanie nr 2.

Plan sił 1:200



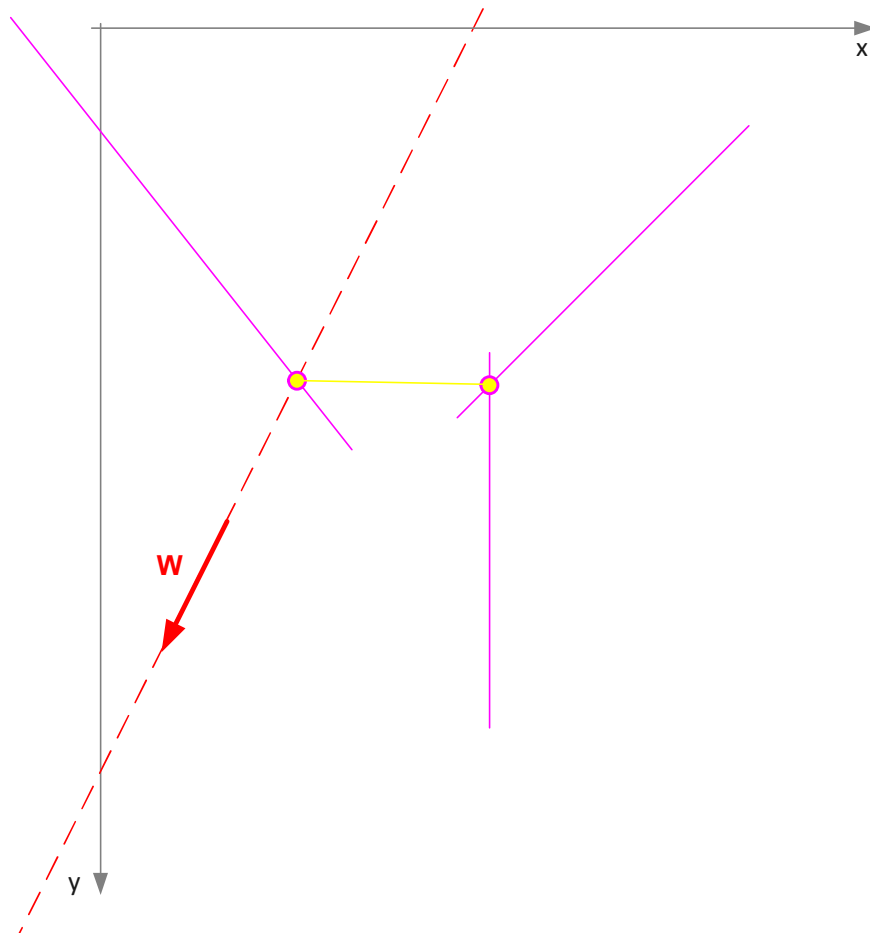
Odczyty
 $R_c = 8,2 \text{ kN}$
 $R_E = 6,2 \text{ kN}$

Wielobok sił 1 cm – 2 kN



Zadanie nr 3.

Plan sił 1:200



Odczyty
 $R_K = 5 \text{ kN}$
 $R_L = 7 \text{ kN}$
 $R_N = 5 \text{ kN}$

Wielobok sił 1 cm – 2 kN

