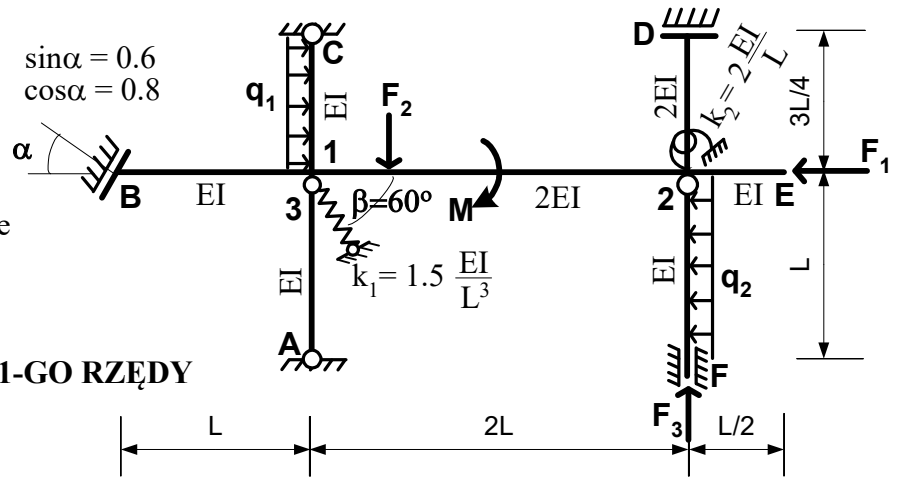


**WYZNACZENIE DŁUGOŚCI  
 WYBOCZENIOWYCH  
 PRĘTÓW**

Dla ramy pokazanej na rysunku  
 wyznaczyć długości wyboczeniowe  
 prętów.



**0..SIŁY OSIOWE WG TEORII 1-GO RZĘDY**

Przyjmujemy, że przedstawione  
 symbolicznie na rysunku powyżej  
 obciążenia mają takie wartości jak w przykładzie 2, co oznacza, że siły osiowe w prętach uzyskane  
 w wyniku rozwiązania ramy od tych obciążeń wg teorii rzędu 1-go też są takie jak w przykładzie 2:

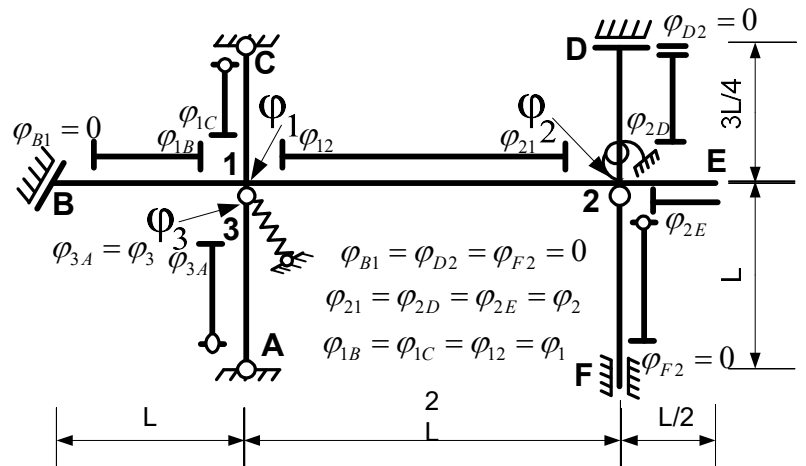
$$N_{12} = -100kN, \quad N_{1A} = -180kN, \quad N_{1B} = +36kN, \quad N_{1C} = 0, \quad N_{2D} = -128kN,$$

$$N_{2E} = -64kN, \quad N_{2F} = -64kN.$$

**1. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIETYCZALNOŚCI**

**1.1 PODZIAŁ NA ELEMENTY  
 WYZNACZENIE LICZBY  
 STOPNI SWOBODY OBROTU  
 WĘZŁÓW  $n_\varphi$**

Podział układu na elementy  
 przedstawiono na rysunku obok. Aby  
 uniknąć problemu lokalnej utraty  
 stateczności dla pręta 1-A przyjęto  
 element sztywno-przegubowy 3-A  
 z końcem o stopniu swobody obrotu  
 $\varphi_{3A}$  poniżej przegubu. Jak widać na  
 rys. obok wszystkie 10 kątów obrotu



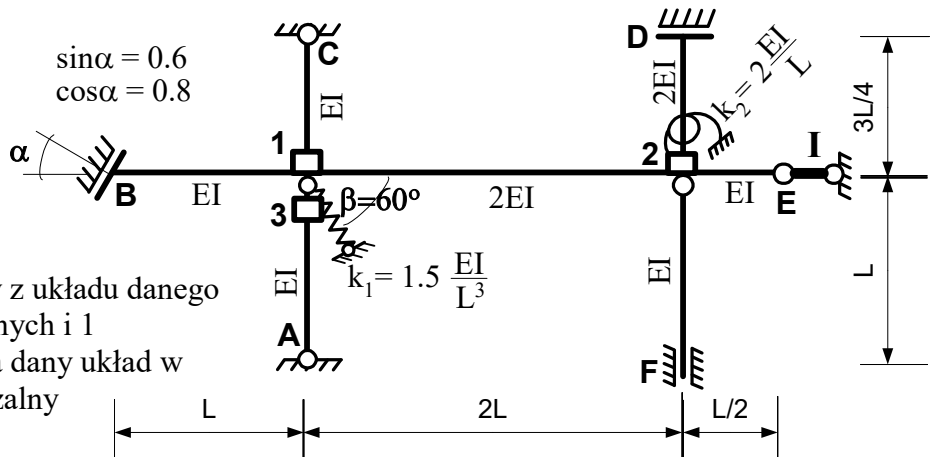
końców elementów ( $\varphi_{B1}, \varphi_{1B}, \varphi_{1C}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{2D}, \varphi_{D2}, \varphi_{2E}, \varphi_{F2}, \varphi_{3A}$ ), które występują we wzorach  
 transformacyjnych tych elementów określone są przez 3 kąty obrotu  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Stad  $n_\varphi = 3$

**1.2 WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW  $n_\delta$**

W wyniku postępowania  
 jak w przykładzie 1  
 otrzymujemy  $n_\delta = 1$

**2. UKŁAD  
 PODSTAWOWY**

Układ podstawowy tworzymy z układu danego  
 przez dodanie 3 więzi rotacyjnych i 1  
 translacyjnej), co przekształca dany układ w  
 układ geometrycznie wyznaczalny  
 pokazany na rysunku poniżej.



### 3. ROZWIĄZANIA UKŁADU PODSTAWOWEGO WG TEORII RZĘDU 2-GO OD PRZESUNIĘĆ JEDNOSTKOWYCH

Uwzględniając, że  $n_\delta = 1$ , należy wykonać tylko jedno rozwiązanie od przesunięcia  $\delta_I = 1$ , które pominiemy, gdyż jest identyczne jak w przykładach 1 i 2.

### 4. RÓWNANIE STATECZNOŚCI I JEGO ROZWIĄZANIE

#### 4.1 POSTAĆ OGÓLNA RÓWNANIA STATECZNOŚCI

$$\det \begin{bmatrix} k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{1I} \\ k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{2I} \\ k_{31}, k_{32}, k_{33}, k_{3I} \\ k_{I1}, k_{I2}, k_{I3}, k_{II} \end{bmatrix} = 0$$

#### 4.2 WSPÓŁCZYNNIKI MACIERZY SZTYWNOŚCI

Współczynniki obliczane w przykładzie 1 nie ulegają zmianie. Doliczymy więc tylko współczynniki macierzy sztywności nie występujące w macierzy sztywności z przykładów 1 i 2

$$k_{13} = k_{31} = 0, \quad k_{23} = k_{32} = 0, \quad k_{33} = \sum_j a_{3j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{3j} + k_3^0 = \alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L} + 0 = \alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L},$$

$$k_{3I} = k_{I3} = -\sum_j c_{3j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{3j} \cdot \psi_{3j}^I = -c_{3A} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{3A} \cdot \psi_{3A}^I = -\alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L} \cdot \frac{1}{L} = -\alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L^2},$$

#### 4.3 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA RÓWNANIA STATECZNOŚCI

$$\det \begin{bmatrix} \left[ \alpha(\lambda_{12}) + \overline{\alpha(\lambda_{1B})} + 4 \right] \cdot \frac{EI}{L}, \dots, \beta(\lambda_{12}) \cdot \frac{EI}{L}, \dots, 0, \dots, \left[ -\frac{4}{3} \cdot \mathcal{G}(\lambda_{1B}) + \frac{16}{3} \right] \cdot \frac{EI}{L^2} \\ \beta(\lambda_{12}) \cdot \frac{EI}{L}, \dots, \left[ \alpha(\lambda_{12}) + \frac{8}{3} \cdot \alpha''(\lambda_{2D}) + \right. \\ \left. + 2 \cdot \alpha'''(\lambda_{2E}) + 0 + 2 \right] \cdot \frac{EI}{L}, \dots, 0, \dots, 0 \\ \dots, 0, \dots, 0, \dots, \alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L}, \dots, -\alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L^2} \\ \left[ -\frac{4}{3} \cdot \mathcal{G}(\lambda_{1B}) + \frac{16}{3} \right] \cdot \frac{EI}{L^2}, \dots, 0, \dots, -\alpha'(\lambda_{3A}) \cdot \frac{EI}{L^2}, \dots, \left[ -\lambda_{1A}^2 + 1.7778 \cdot \overline{\delta(\lambda_{1B})} + \right. \\ \left. + \delta'(\lambda_{2F}) + 7.1111 + 0.375 \right] \cdot \frac{EI}{L^3} \end{bmatrix} = 0$$

#### 4.4 ROZWIĄZANIE RÓWNANIA STATECZNOŚCI

Parametry  $\lambda_{ij}$  i ich związki są identyczne jak w punkcie 4.4 w przykładzie 2.

W wyniku rozwiązania równania stateczności otrzymano wartość krytyczną parametru  $\lambda = 3.3115$ , dla której  $\det K(\lambda) = 0.033$

### 5. WSPÓŁCZYNNIKI DŁUGOŚCI WYBOCZENIOWYCH PRĘTÓW

Znając wartość krytyczną parametru  $\lambda$  obliczamy dla prętów ściskanych, wykorzystując związki określone w punkcie 4.4 w przykładzie 2, wartości krytyczne parametrów  $\lambda_{ij}$  i współczynniki

*STATECZNOŚĆ – przykład 3 – Modyfikacja rozwiązania przykładu 2 tak by nośność układu  
była określona przez możliwość utraty stateczności w bazie globalnej 10.03.2017 r.*

długości wyboczeniowych  $\mu_{ij} = \pi/\lambda_{ij}$ . Obliczenia te wykonano w powyższej tabeli. W tabeli tej przytoczono też znane z wytrzymałości materiałów wartości parametrów  $\lambda_{ij\text{ lok}}$  oraz  $\mu_{ij\text{ lok}}$  odpowiadające lokalnej utracie stateczności poszczególnych prętów.

	$\lambda_{ij}$		$\lambda_{ij\text{ lok}}$		$\mu_{ij}$		$\mu_{ij\text{ lok}}$	Uwagi
$\lambda_{12} = \lambda$	3.3115	<	$2\pi$		<b>0.9487</b>	>	0.5	
$\lambda_{1A} = 0.9487\lambda$	3.1416	=	$\pi$		<b>1</b>	=	1	
$\lambda_{1B} = 0.4243\lambda$	<u>1.4051</u>							pręt rozciągany
$\lambda_{1C} = 0$	0							N=0
$\lambda_{2D} = 0.4243\lambda$	1.4051	<	$\pi$		<b>2.2359</b>	>	1	
$\lambda_{2E} = 0.2828\lambda$	0.9365	<	$\pi/2$		<b>3.3546</b>	>	2	
$\lambda_{2F} = 0.5657\lambda$	1.8733	<	4.488		<b>1.6770</b>	>	0.7	

Uzyskane wyniki spełniają warunki  $\lambda_{ij} \leq \lambda_{ij\text{ lok}}$ ,  $\mu_{ij} \geq \mu_{ij\text{ lok}}$  dla wszystkich prętów i są identyczne jak końcowe wyniki rozwiązania przykładu 2

Znając wartość krytyczną parametru  $\lambda$  można też obliczyć, na podstawie wzorów z punktu 4.4 z przykłady 2, wartość krytyczną mnożnika obciążenia

$$\gamma = \frac{EI \cdot \lambda^2}{200kN \cdot L^2} = \frac{3.5978^2}{200} \cdot \frac{EI}{kN \cdot L^2} = 0.05483 \cdot \frac{EI}{kN \cdot L^2}, \text{ która oczywiście także jest}$$

identyczna jak w przykładzie 2.