

# Plan ćwiczeń

## Ćwiczenia 1

- Zapis wskaźnikowy

Przykład Iloczyn skalarny dowolnych wektorów

Przykład Iloczyn wektorowy dowolnych wektorów

Przykład Wyznacznik macierzy  $[A]_{3 \times 3} \rightarrow \det[A] = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$

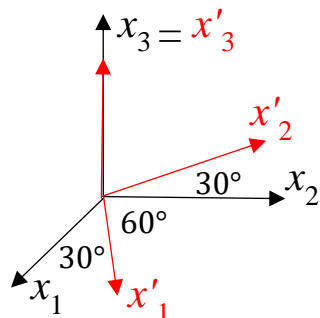
Przykład Niezmienniki główne tensora drugiego rzędu

## Ćwiczenia 2

- Transformacja współrzędnych tensora naprężenia

Przykład Dane są składowe  $\sigma$  w układzie  $\{x_i\}$ . Wyznaczyć składowe tego samego tensora  $\sigma'$  wyrażone w układzie  $\{x'_i\}$ .

$\{x_i\} \xrightarrow{\text{obrót o } 30^\circ \text{ wokół osi } x_3} \{x'_i\}$ .



$$\sigma = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 11.25 & -6.49 & 0 \\ -6.49 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Naprężenia główne i kierunki główne

Przykład Pokazać, że:  $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = \sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma$

Przykład Wyznaczyć naprężenia i kierunki główne

$$\sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = 4 \geq \sigma_2 = 1 \geq \sigma_3 = -2$$

$$\mathbf{n}^1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}^2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

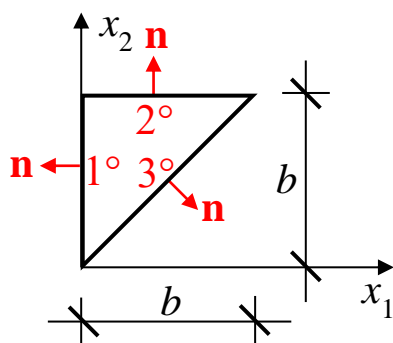
Przykład Ze wzorów transformacyjnych wyznaczyć naprężenie główne  $\sigma_1$  dla danych z poprzedniego przykładu

$$\sigma_1 = (\mathbf{n}^1)^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^1 = 4$$

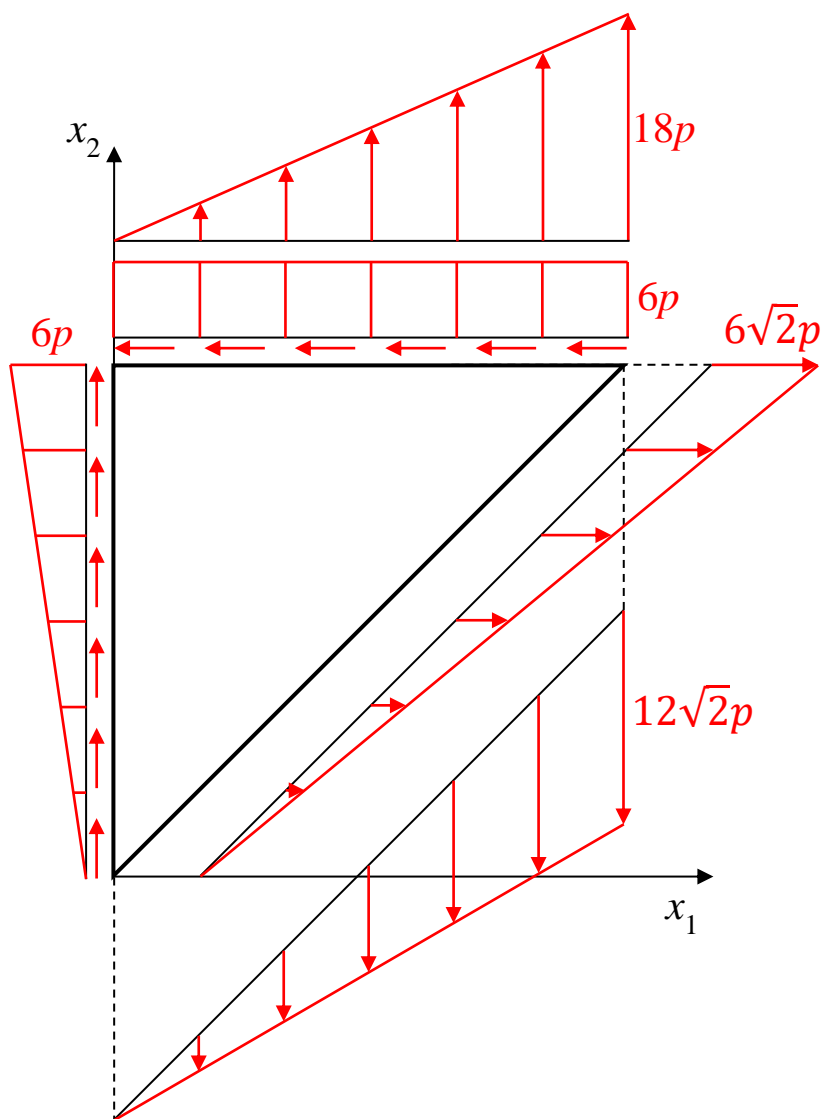
## Ćwiczenia 3

- Funkcja naprężeń Airy'ego w rozwiązaniu zagadnień płaskich

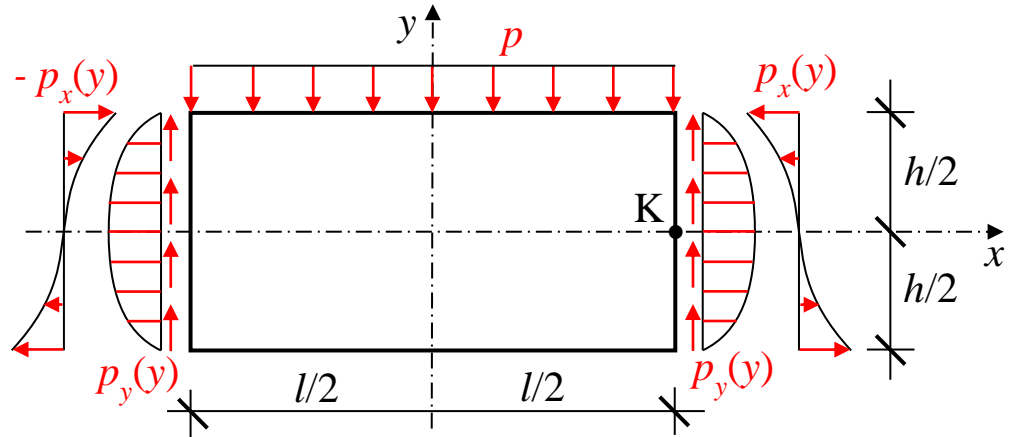
*Przykład Dla zadanej postaci funkcji Airy'ego wyznaczyć rozkład obciążeń powierzchniowych*



$$\Phi = \frac{3p}{b} (x_1^3 + x_1 x_2^2)$$



*Przykład* Wyznaczyć funkcje opisujące rozkłady naprężeń w prostokątnej tarczy. Obciążenie powierzchniowe o stałej wartości  $p$  jest przyłożone do górnej krawędzi.



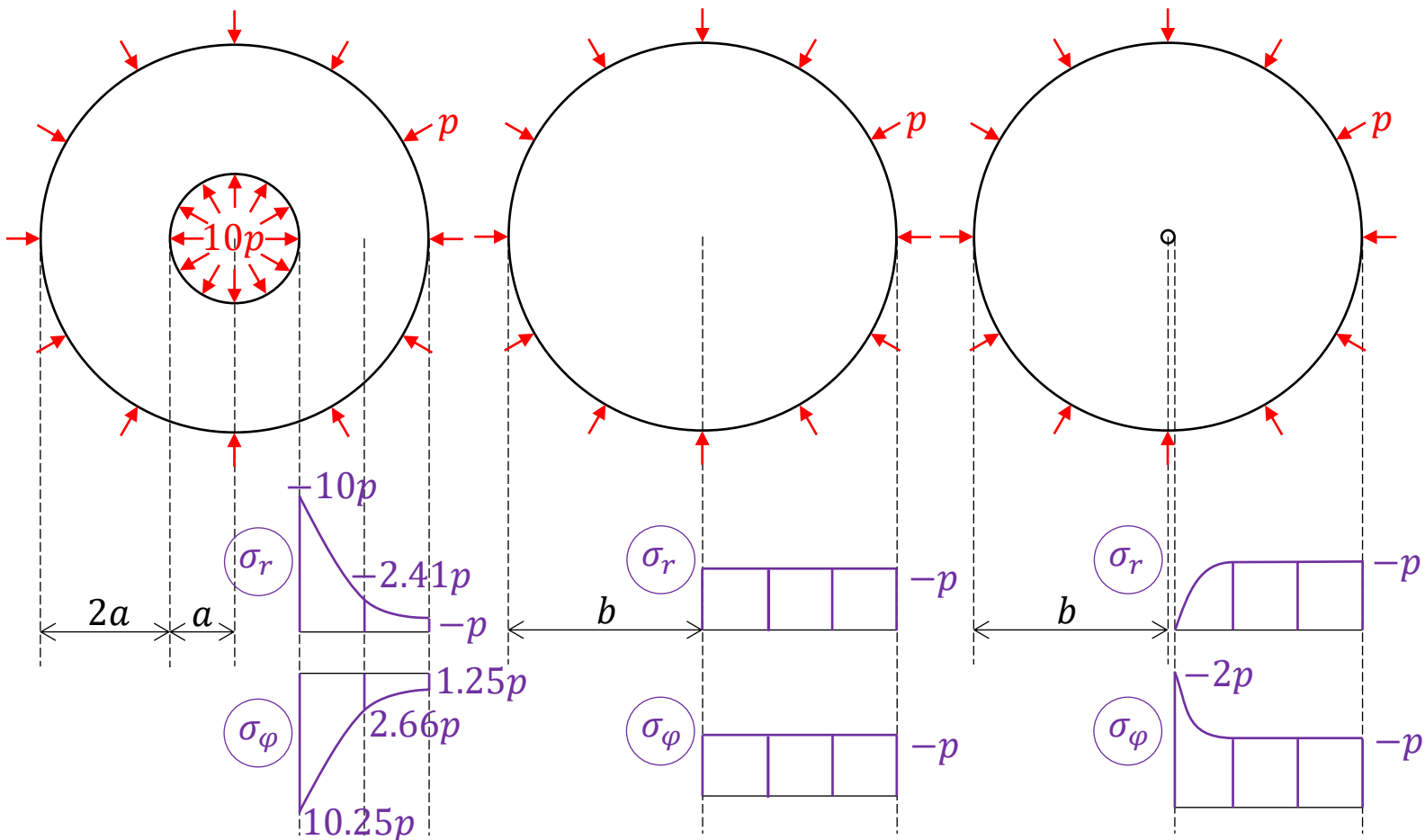
$$\sigma_x = -\frac{6p}{h^3} \left( \frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{10} \right) y + \frac{6p}{h^3} x^2 y - \frac{4p}{h^3} y^3$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{2h^3} (h^3 + 3h^2 y - 4y^3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3p}{2h^3} (h^2 - 4y^2) x$$

- Zagadnienie płaskie we współrzędnych biegunowych

*Przykład* Zadanie Lamé. Rozwiązanie w zakresie sprężystym

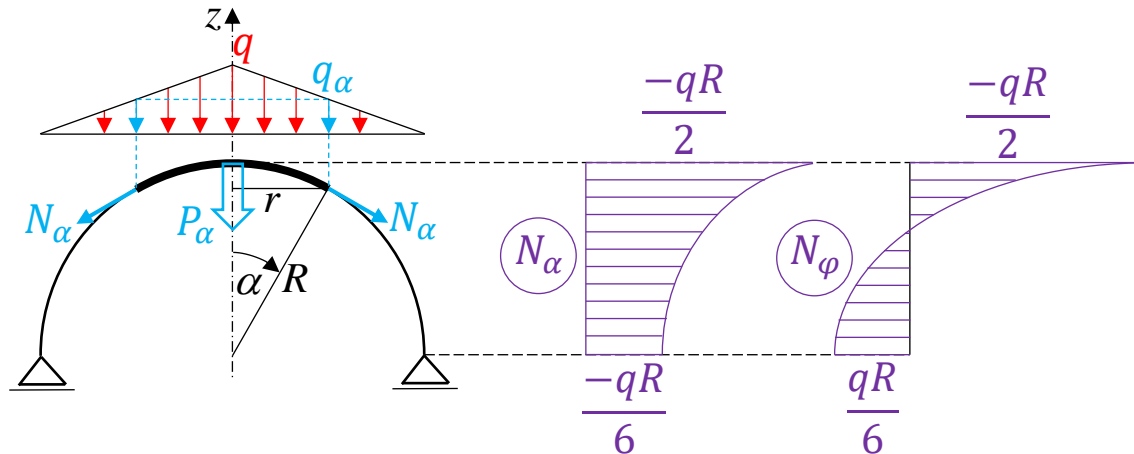


## Ćwiczenia 4

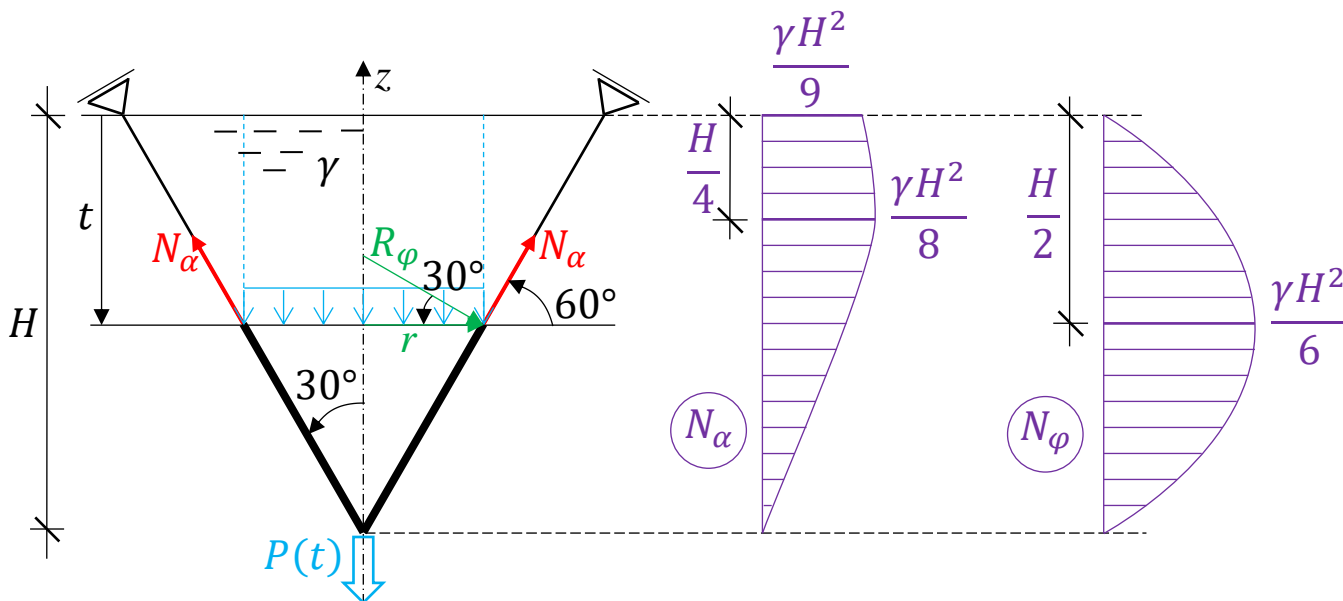
### Powłoki cienkie

- Definicje i założenia
- Siły przekrojowe i naprężenia
- Stan błonowy
- Powłoki obrotowe w stanie błonowym z obciążeniem osiowosymetrycznym

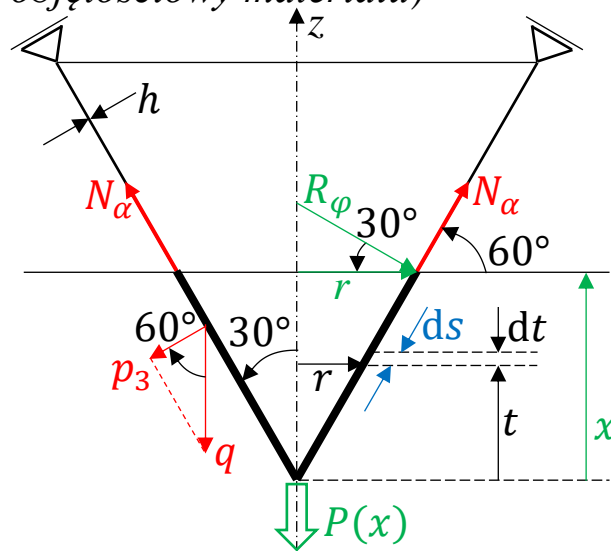
*Przykład Powłoka sferyczna z obciążeniem zadany na plan*



*Przykład Zbiornik stożkowy ( $\gamma$  oznacza ciężar objętościowy cieczy)*



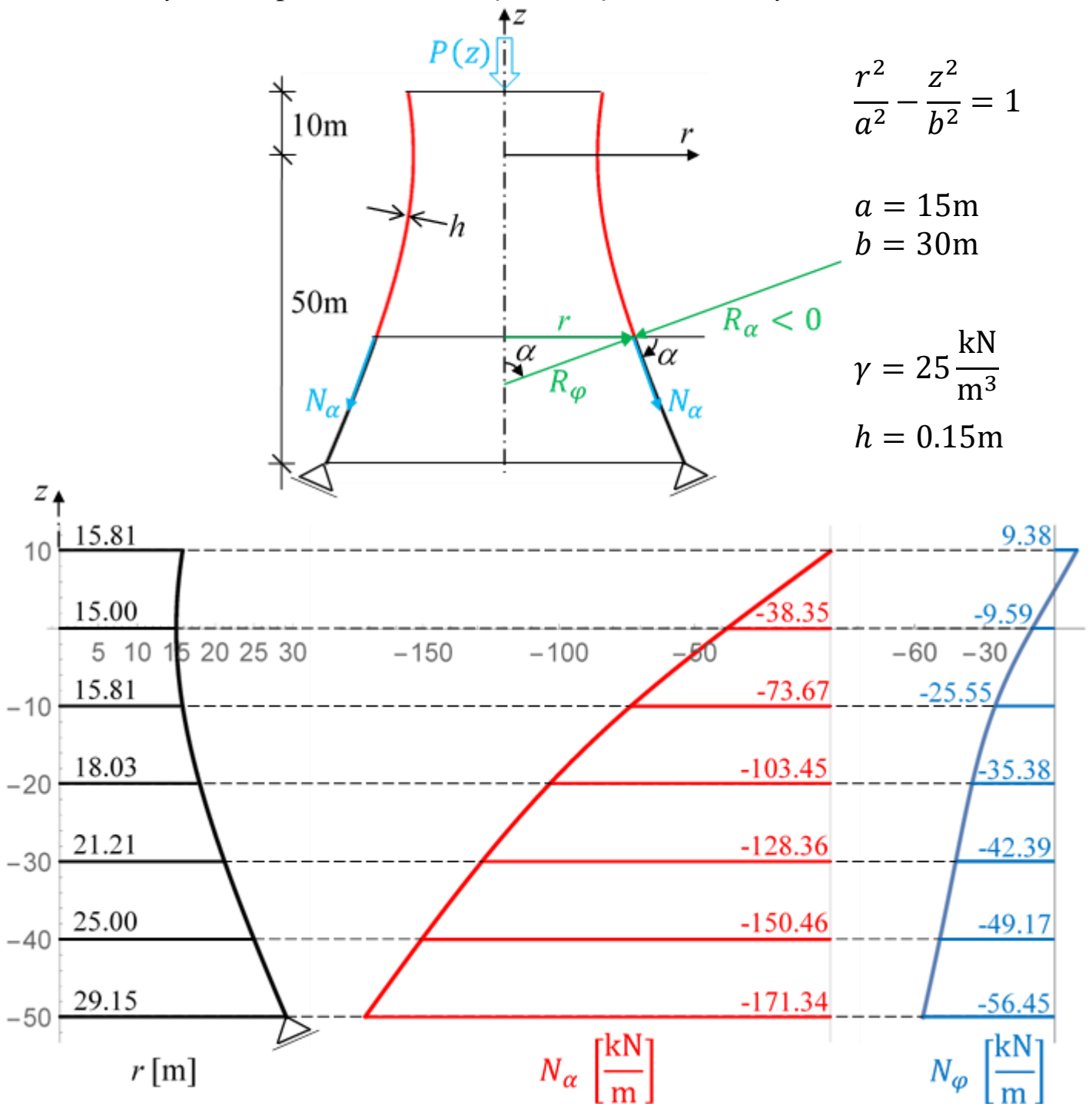
*Przykład Powłoka stożkowa obciążona ciężarem własnym ( $\gamma$  – ciężar objętościowy materiału)*



$$N_\alpha(x) = \frac{2}{3} \gamma h x$$

$$N_\phi(x) = \frac{1}{3} \gamma h x$$

*Przykład Hiperboloida obciążona ciężarem własnym*



**Ćwiczenia 5**

- Zasada prac wirtualnych (przygotowanych, wymyślonych)
- Praca obciążeń zewnętrznych, energia sprężysta i całkowita energia potencjalna
- Twierdzenie Lagrange'a

*Przykład Wyznaczyć stateczne ścieżki równowagi*

