

Literatura

Brunarski L., Kwieciński M., Wstęp do teorii sprężystości i plastyczności, Wyd. PW, Warszawa 1984.

Paluch M., Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami, Wydawnictwo PK, Kraków 2006.

Fung Y. C., Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969.

Gawęcki A., Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych, Wyd. Polit. Poznańskiej, Poznań 1998.

Nowacki W., Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1973.

Nowacki W., Dźwigary powierzchniowe, PWN, Warszawa 1979.

Dąbrowski O., Teoria dźwigarów powierzchniowych, Wyd. Polit. Wrocławskiej, 1987.

Kączkowski Z., Płyty. Obliczenia statyczne, Arkady, Warszawa 1980.

Plan wykładu

Wykład 1

1. Podstawy teorii sprężystości
 - 1.1. Zapis wskaźnikowy (indeksowy)
 - 1.2. Podstawowe symbole i oznaczenia
 - 1.3. Tensor naprężenia
 - 1.4. Równia równowagi

Przykład 1 Dane są składowe tensora naprężenia. Wyznaczyć składowe sił objętościowych

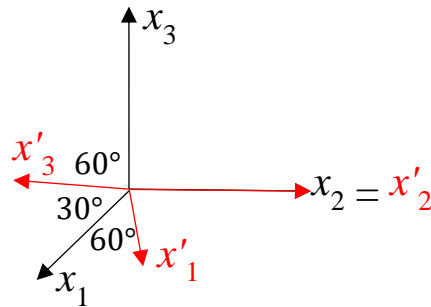
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} -13x_2 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Wykład 2

- 1.5. Kinetyczne (naprężeniowe) warunki brzegowe
- 1.6. Transformacja współrzędnych tensora naprężenia

Przykład 2 Dane są składowe σ w układzie $\{x_i\}$. Wyznaczyć składowe tego samego tensora σ' wyrażone w układzie $\{x'_i\}$.

$$\{x_i\} \xrightarrow{\text{obrót o } 60^\circ \text{ wokół osi } x_2} \{x'_i\}.$$



$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} -0.366 & 0 & 0.366 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.366 & 0 & 2.366 \end{bmatrix}$$

1.7. Niezmienniki tensora naprężenia

Przykład 3 Wyznaczyć niezmienniki dla obu reprezentacji tensora naprężenia: σ i σ' z Przykładu 2

$$\begin{aligned} I_\sigma &= 2, & II_\sigma &= -1, & III_\sigma &= 0 \\ I_{\sigma'} &= 2.000, & II_{\sigma'} &= -1.000, & III_{\sigma'} &= 0 \end{aligned}$$

1.8. Naprężenia główne i kierunki główne

Przykład 4 Wyznaczyć naprężenia i kierunki główne tensora σ z Przykładu 2.

$$\sigma_1 = 2.414 \geq \sigma_2 = 0 \geq \sigma_3 = -0.414$$

$$\mathbf{n}^1 = \begin{Bmatrix} 0.924 \\ 0 \\ 0.383 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{n}^3 = \begin{Bmatrix} 0.383 \\ 0 \\ -0.924 \end{Bmatrix}$$

Przykład 5 Ze wzorów transformacyjnych wyznaczyć naprężenie główne σ_1 dla danych z Przykładu 4.

$$\sigma_1 = (\mathbf{n}^1)^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^1 = 2.415$$

Przykład 6 Uprościć ogólne związki 3D do równań dla zagadnienia 2D

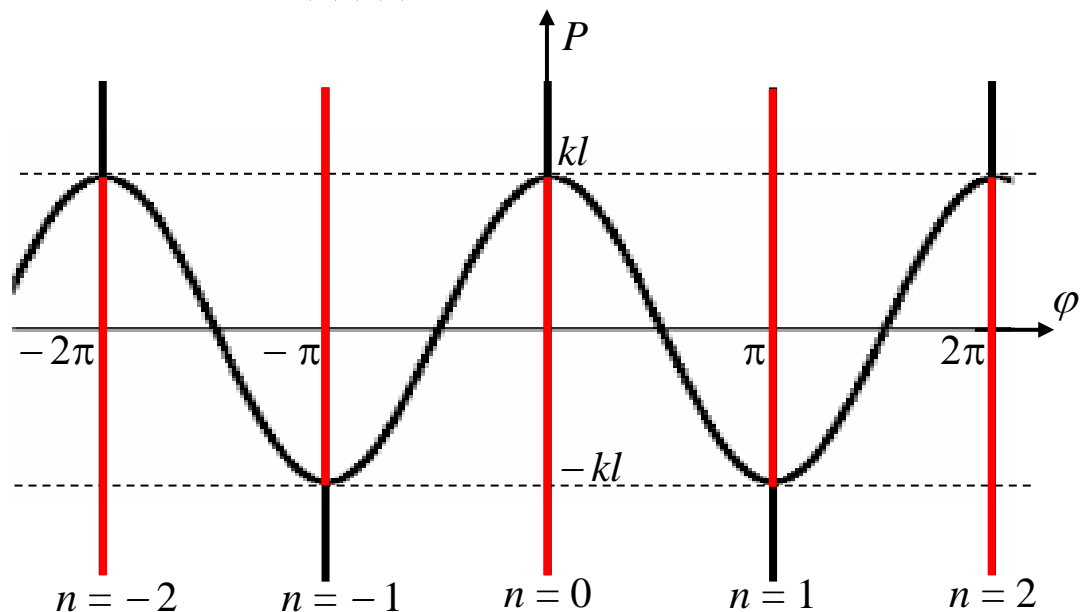
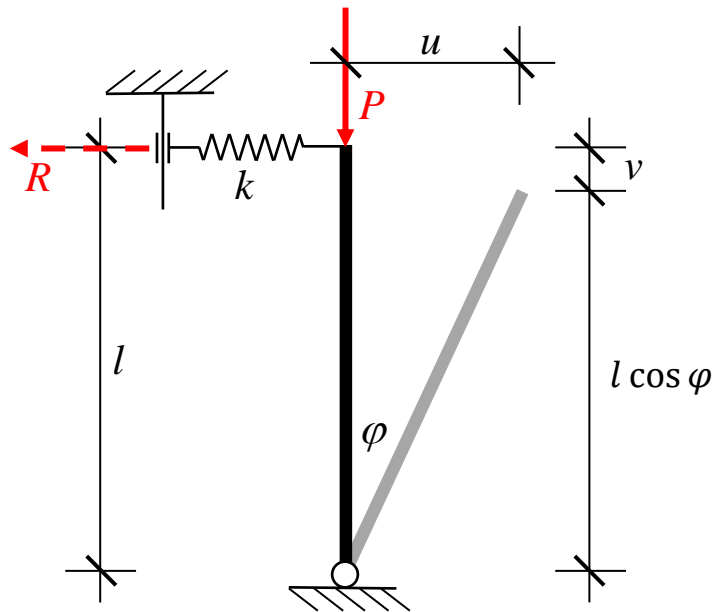
Wykład 3

- 1.9. Tensory odkształcenia
- 1.10. Równania nierozdzielności odkształceń
- 1.11. Związki fizyczne (prawo Hooke'a)
- 1.12. Bilans równań teorii sprężystości
- 1.13. Równania Lamé
- 1.14 Równania Beltramiego-Mitchella

Wykład 4

- 1.15. Zasada prac wirtualnych (przygotowanych, wymyślonych)
- 1.16. Praca obciążeń zewnętrznych i energia sprężysta
- 1.17. Twierdzenie Lagrange'a

Przykład 7 Wyznaczyć stateczne ścieżki równowagi



Wykład 5

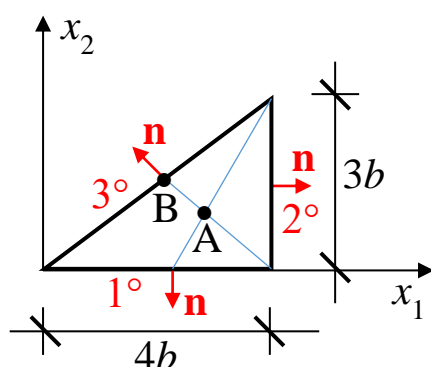
2. Płaskie zagadnienia teorii sprężystości

2.1. Płaski stan odkształcenia (PSO)

2.2. Płaski stan naprężenia (PSN)

2.3. Funkcja naprężeń Airy'ego dla stanów płaskich

Przykład 8 Wyznaczyć stałą C dla funkcji Airy'ego Φ . Wyznaczyć naprężenia w środku ciężkości (punkt A). Wyznaczyć rozkład obciążeń powierzchniowych, podać ich wartość w środku krawędzi ukośnej (punkt B).

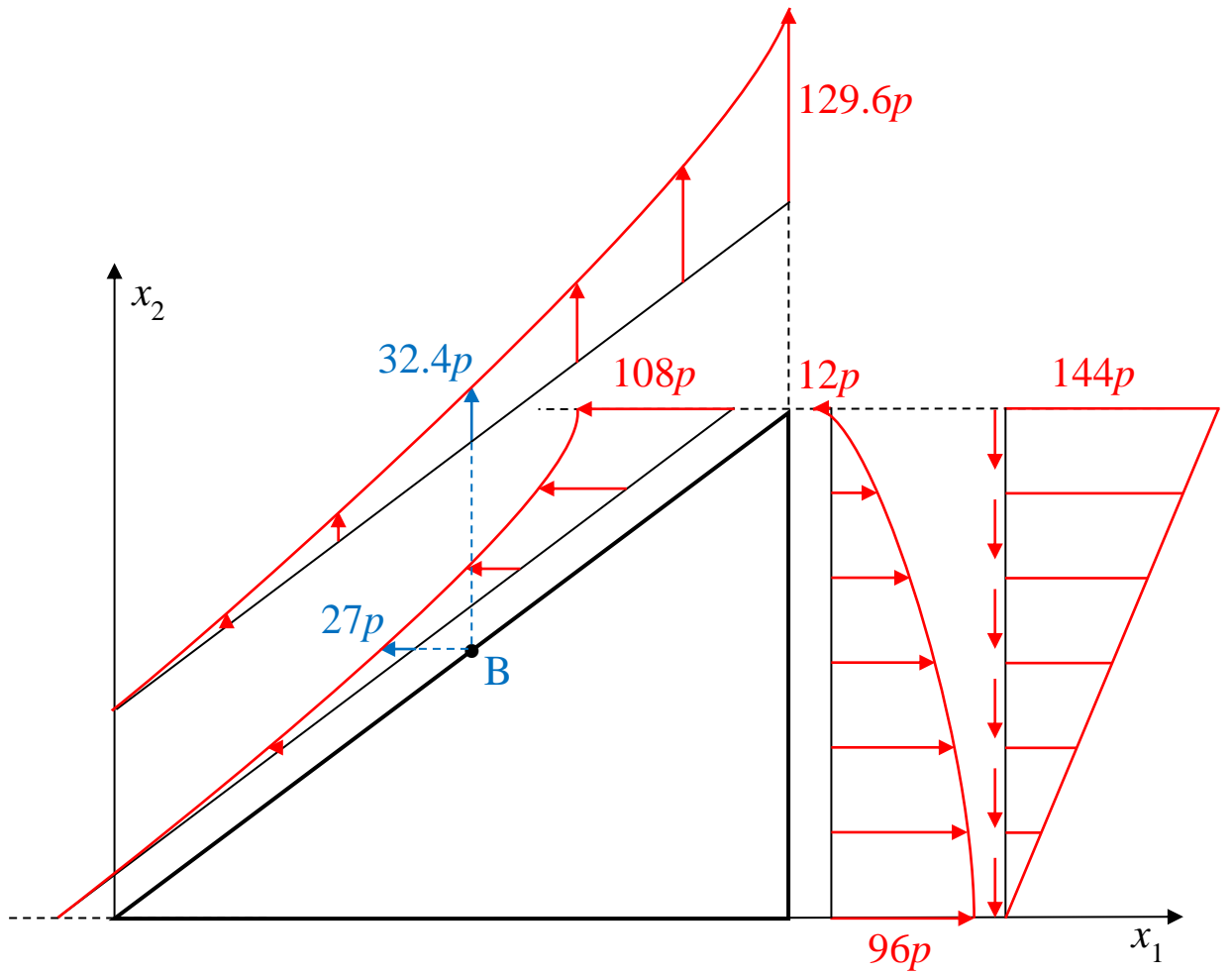


$$\Phi = \frac{p}{b^2} (Cx_2^4 + 3x_1^2x_2^2)$$

$$\Downarrow$$

$$C = -1$$

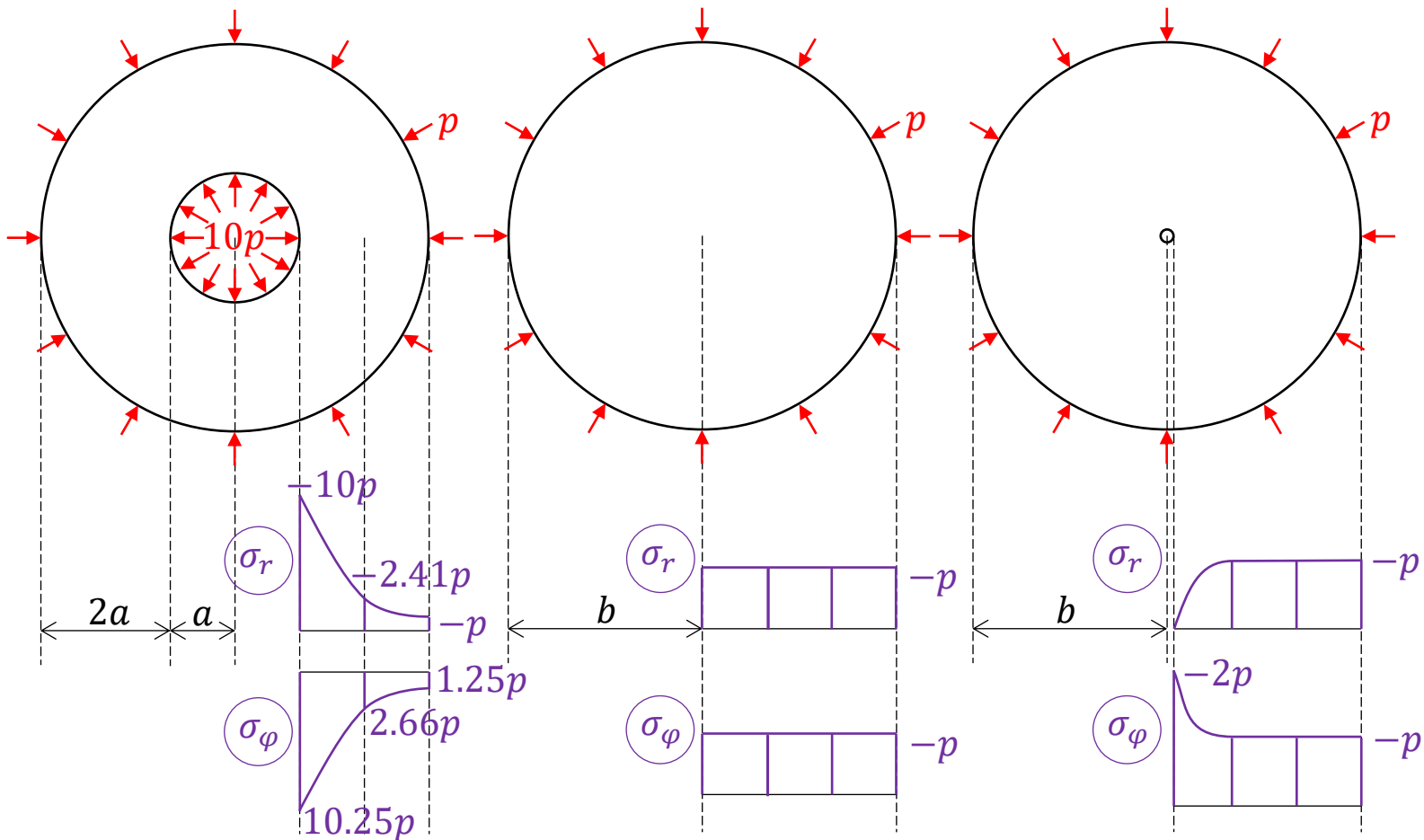
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^A = \frac{92p}{3} \sigma_{22}^A = 6p\sigma_{12}^A = -32p \end{array} \right.$$



Wykład 6

2.4. Zagadnienie płaskie we współrzędnych biegunowych

Przykład 9 Zadanie Lamé. Rozwiązanie w zakresie sprężystym



Wykład 7

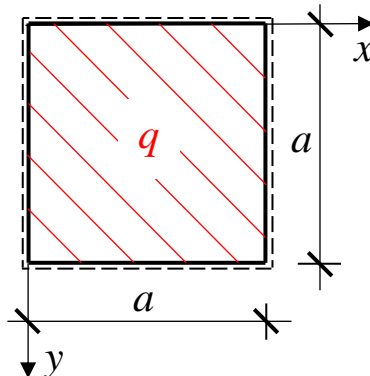
3. Płyty cienkie

- 3.1. Definicje i założenia
- 3.2. Przemieszczenia i odkształcenia
- 3.3. Naprężenia i siły przekrojowe
- 3.4. Równania równowagi płyty
- 3.5. Warunki brzegowe

Wykład 8

- 3.6. Energia sprężysta i całkowita energia potencjalna
- 3.7. Podstawowe równania w zapisie klasycznym
- 3.8. Płyta prostokątna swobodnie podparta (rozwiązanie Naviera)

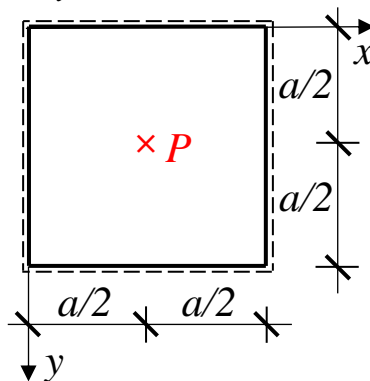
Przykład 10 Płyta kwadratowa ze stałym obciążeniem



$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.004062 \frac{qa^4}{D}$$

$$v = \frac{1}{6} \Rightarrow M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.04297qa^2$$

Przykład 11 Płyta kwadratowa obciążona siłą skupioną w środku

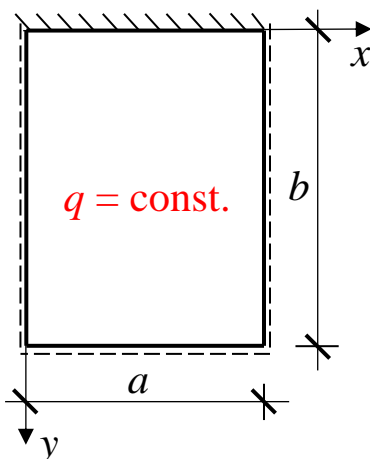


$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.01160 \frac{Pa^2}{D}$$

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \infty$$

- 3.9. Płyta prostokątna swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach (rozwiązanie Levy'ego)

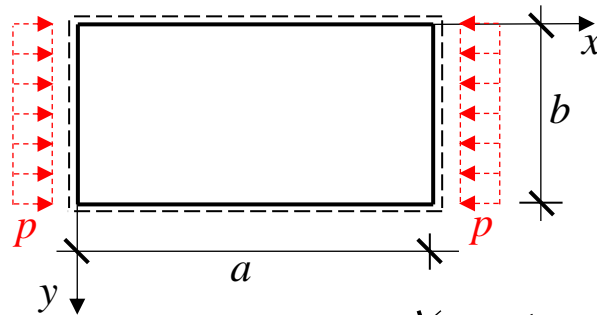
Przykład 12 Płyta prostokątna ze stałym obciążeniem. Utwierdzenie i podparcie swobodne na krawędziach poziomych



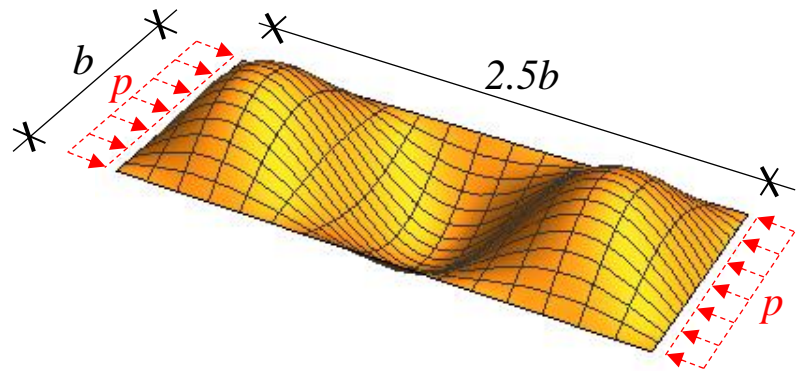
Wykład 9

3.10. Stateczność płyty

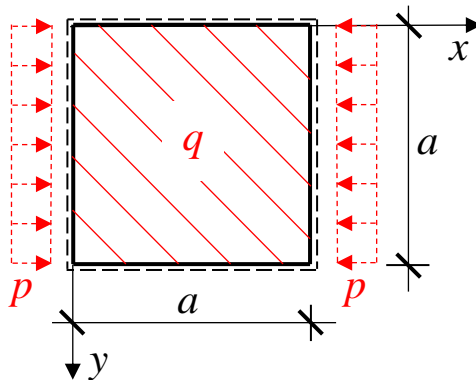
Przykład 13 Obciążenie krytyczne dla swobodnie podpartej płyty prostokątnej ściskanej w jednym kierunku równomiernym obciążeniem p .



$$\frac{a}{b} = 2.5 \Rightarrow p_{kr} = 4.134 \frac{D\pi^2}{b^2}$$



Przykład 14 Swobodnie podparta płyta kwadratowa z obciążeniem poprzecznym i podłużnym. Obciążenie poziome: $p = \frac{1}{2} p_{kr}$



$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.008210 \frac{qa^4}{D}$$

$$v = \frac{1}{6} \Rightarrow M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0.08986qa^2$$

Wykład 10

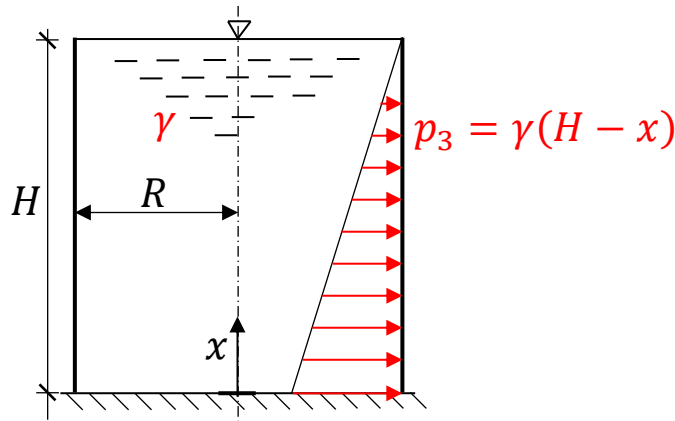
4. Powłoki cienkie

4.1. Definicje i założenia

4.2. Siły przekrojowe i naprężenia

4.3. Powłoka walcowa z obciążeniem osiowosymetrycznym

Przykład 15 Zbiornik walcowy w stanie błonowym i zgięciowym



$$E = 205 \times 10^6 \text{ kPa}$$

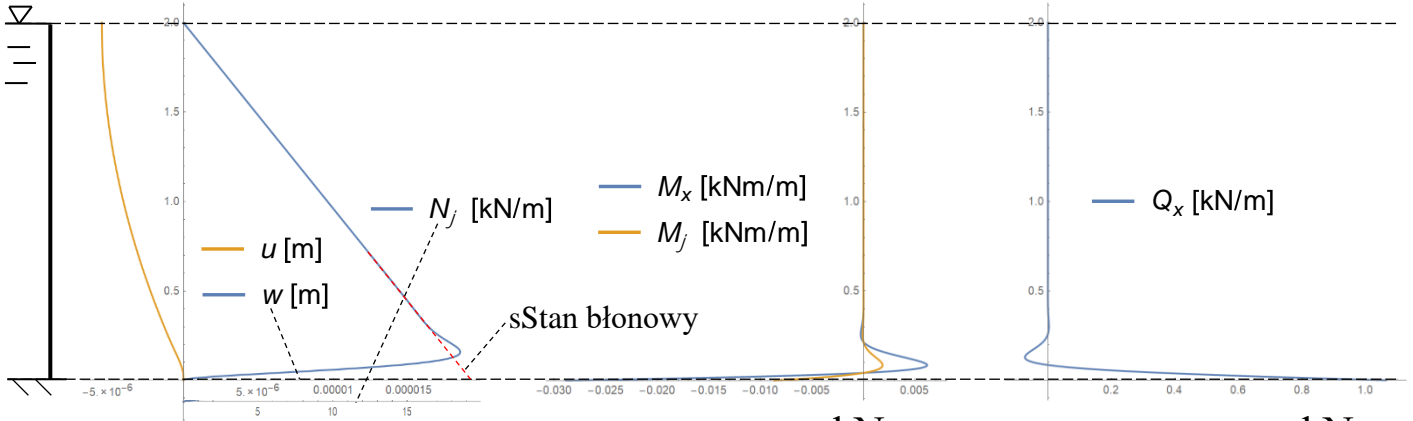
$$\nu = 0.3$$

$$\gamma = 9.81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$h = 0.005 \text{ m}$$

$$R = 1 \text{ m}$$

$$H = 2 \text{ m}$$



$$u(H) = -0.00000543 \text{ m} \quad M_x(0) = -0.0289 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \quad Q_x(0) = 1.064 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w_{\max} = 0.0000184 \text{ m} \quad M_\varphi(0) = -0.00866 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

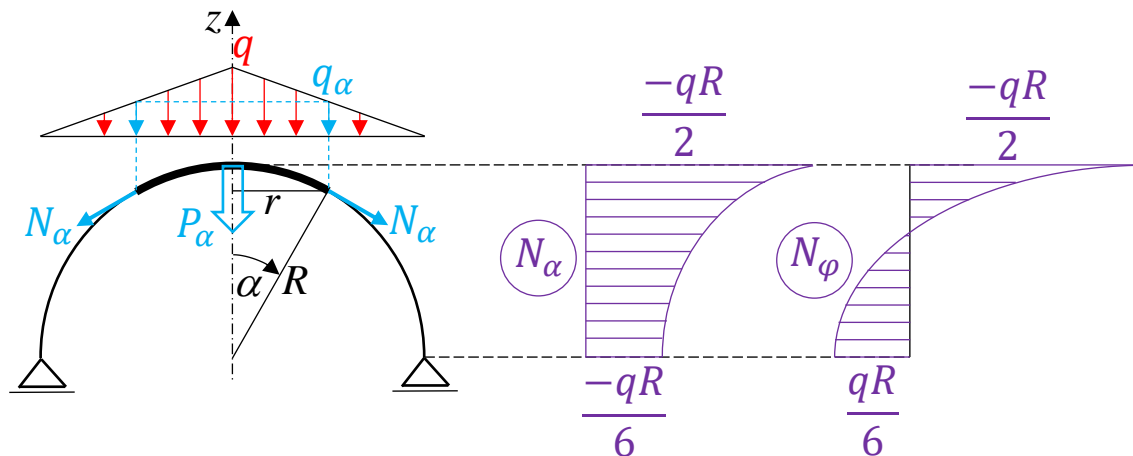
$$N_\varphi^{\max} = 18.85 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad N_\varphi^{\max} = 19.62 \frac{\text{kN}}{\text{m}} - \text{według teorii stanu błonowego}$$

Wykład 11

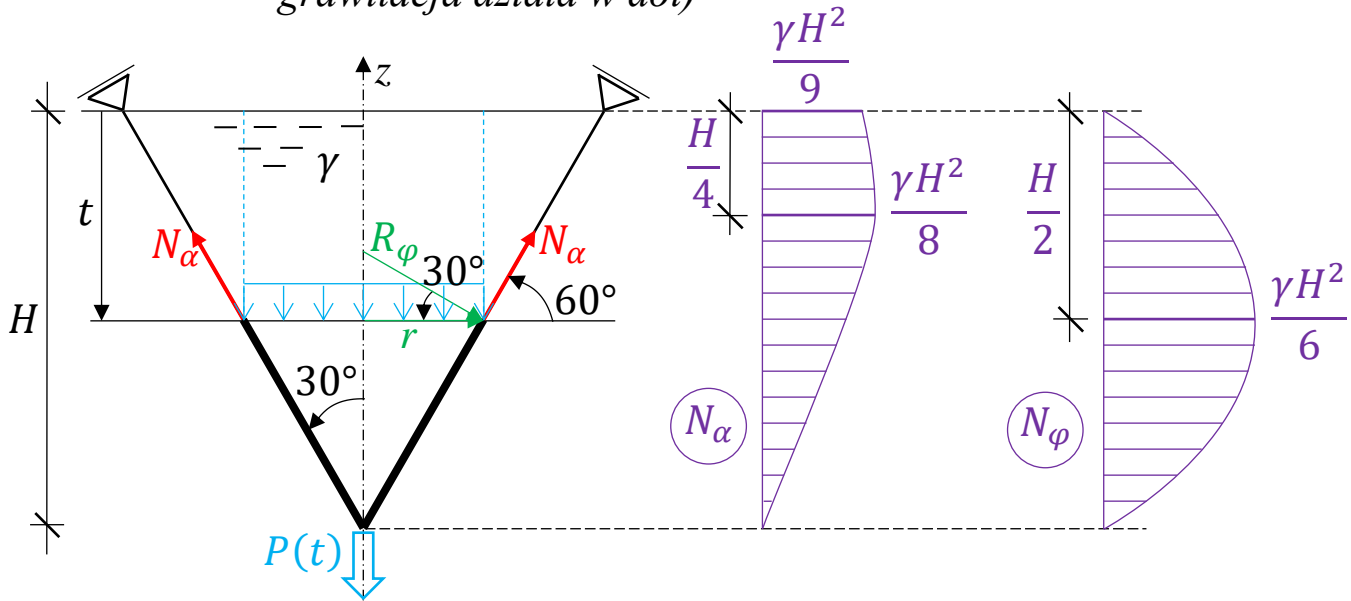
4.4. Stan błonowy

4.5. Powłoki obrotowe w stanie błonowym z obciążeniem osiowoosymetrycznym

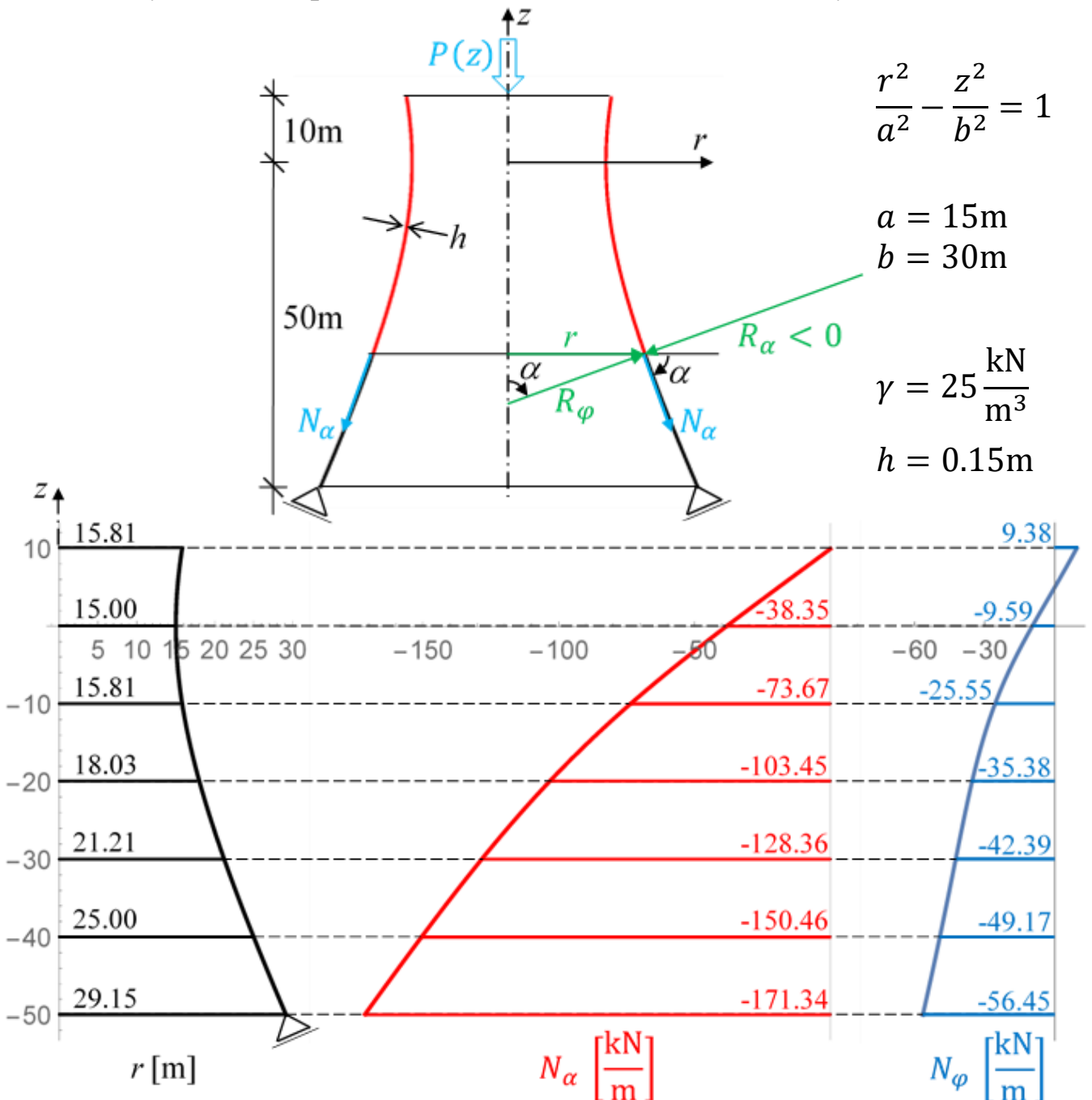
Przykład 16 Powłoka sferyczna z obciążeniem zadanym na plan



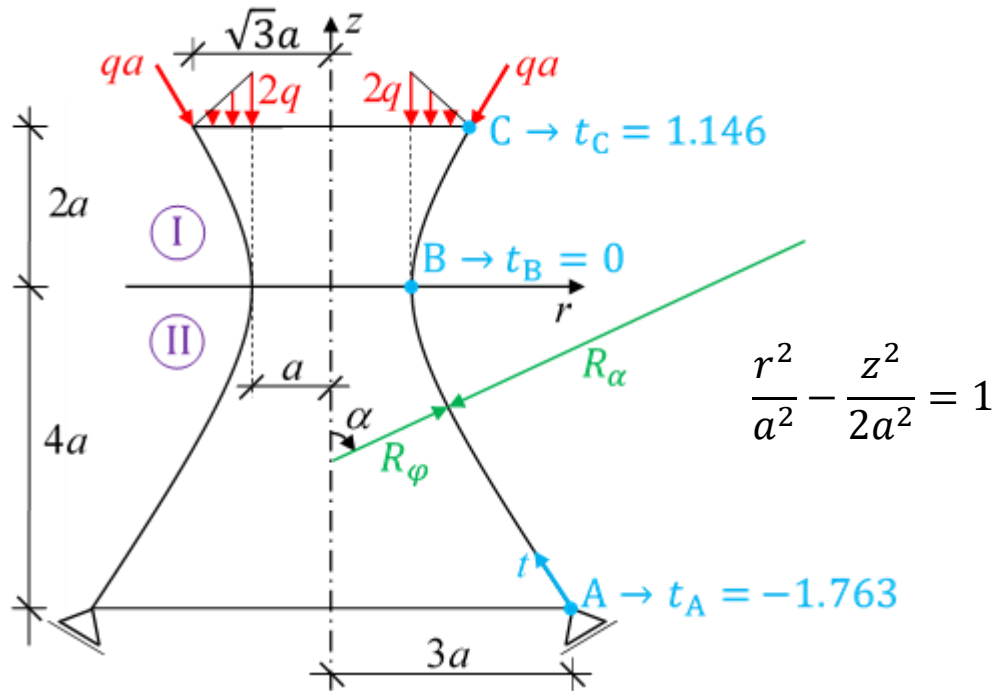
Przykład 17 Zbiornik stożkowy (γ oznacza ciężar objętościowy cieczy, grawitacja działa w dół)



Przykład 18 Hiperboloida obciążona ciężarem własnym



Przykład 19 Hiperboloida w parametryzacji łukowej



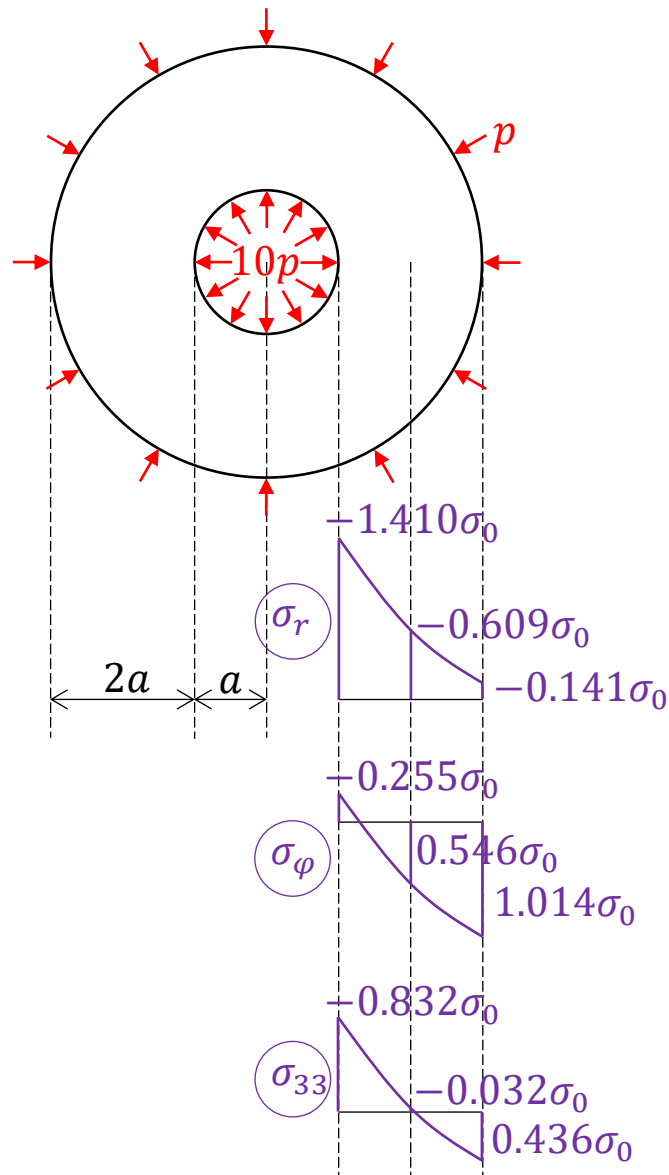
$z [a]$	t	$r [a]$	$R_\varphi [a]$	$R_\alpha [a]$	$P [qa^2]$	$p_3 [q]$	$N_\alpha [qa]$	$N_\varphi [qa]$
2	1.146	1.732	2	-16	9.425	0	-1	-0.125
1.56	0.952	1.489	1.681	-9.497	10.221	0.143	-1.233	0.022
0	0	1	1	-2	15.147	0	-2.411	-1.205
-2	-1.146	1.732	2	-16	15.147	0	-1.607	-0.201
-4	-1.763	3	3.606	-93.744	15.147	0	-0.966	-0.037

Wykład 12

5. Podstawy teorii plastyczności i nośności granicznej

- 5.1. Modele fizyczne materiałów
- 5.2. Warunki plastyczności
- 5.3. Warunki plastyczności w płycie
- 5.4. Równania teorii plastyczności
- 5.5. Związki fizyczne w stanie plastycznym

Przykład 20 Zadanie Lamé (c. d.). Grubościana rura metalowa ($\nu = 0.3$) w płaskim stanie odkształcenia, z warunkiem Hubera-Misesa-Hencky'ego i związkami fizycznymi Hencky'ego-Iljuszyna

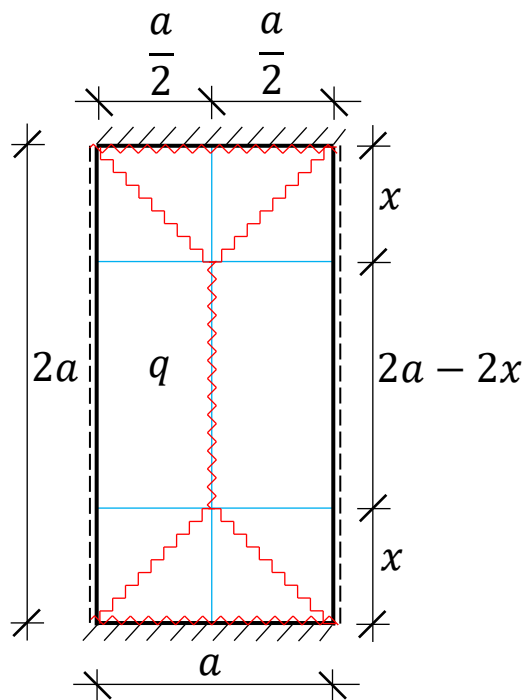


Wykład 13

5.6. Definicje i twierdzenia teorii nośności granicznej

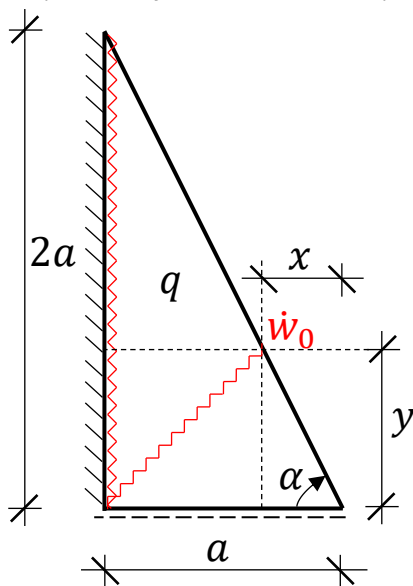
5.7. Metoda kinematyczna oszacowania nośności granicznej płyt

Przykład 21 Płyta prostokątna ze stałym obciążeniem



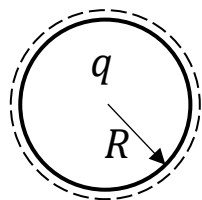
$$q_{gr} = 17.72 \frac{M_0}{a^2}$$

Przykład 22 Płyta trójkątna ze stałym obciążeniem



$$q_{gr} = 14.48 \frac{M_0}{a^2}$$

Przykład 23 Płyta kołowa ze stałym obciążeniem



$$q_{gr} = \frac{6M_0}{R^2}$$

Wykład 14
Sprawdzian

Wykład 15
Poprawa sprawdzianu. Dla studentów niezadowolonych z oceny uzyskanej na pierwszym sprawdzianie.