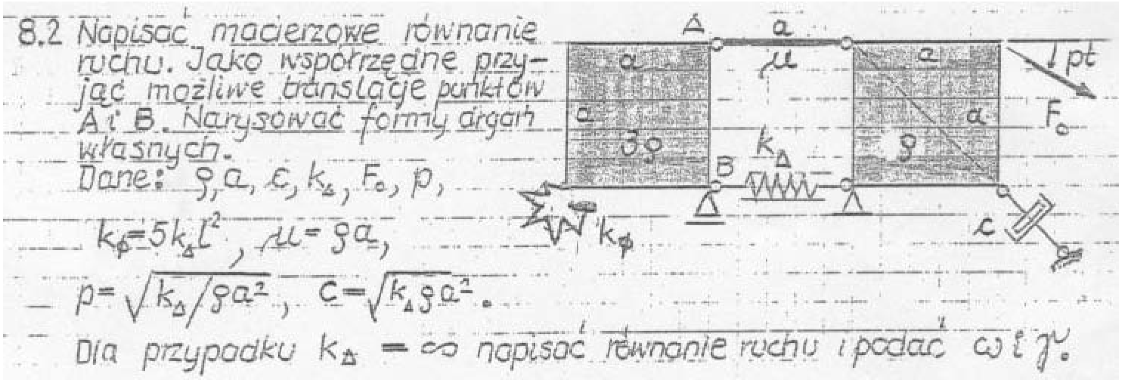
ZADANIE 1.

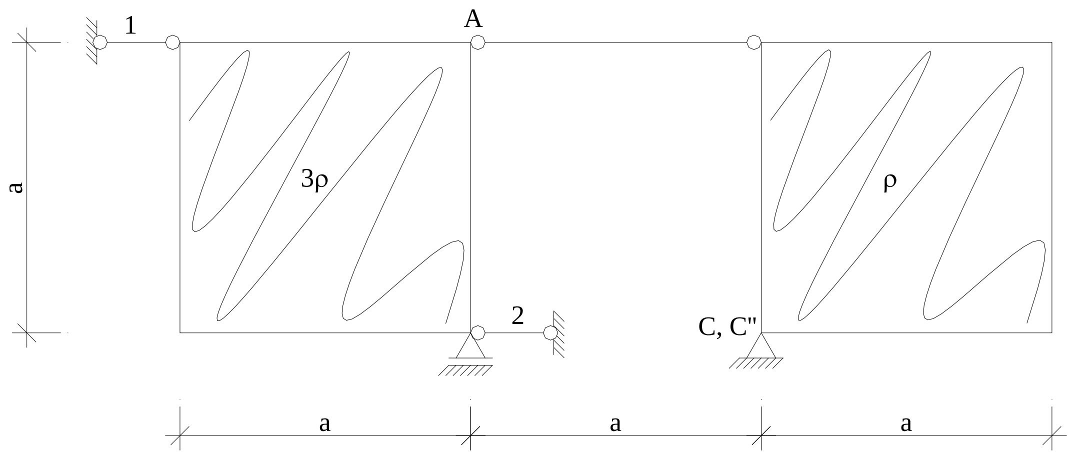

8.2 Napisać macierzowe równanie ruchu. Jako współrzędne przyjąć możliwe translacje punktów A i B. Narysować formy drgań własnych.
Dane: $\rho, a, c, k_\Delta, F_0, p$,
$k_\phi = 5 k_\Delta l^2$, $\mu = \rho a$,
$p = \sqrt{k_\Delta / \rho a^2}$, $c = \sqrt{k_\Delta \rho a^2}$.
Dla przypadku $k_\Delta = \infty$ napisać równanie ruchu i podać ω i ...

1.1. Dobór współrzędnych uogólnionych

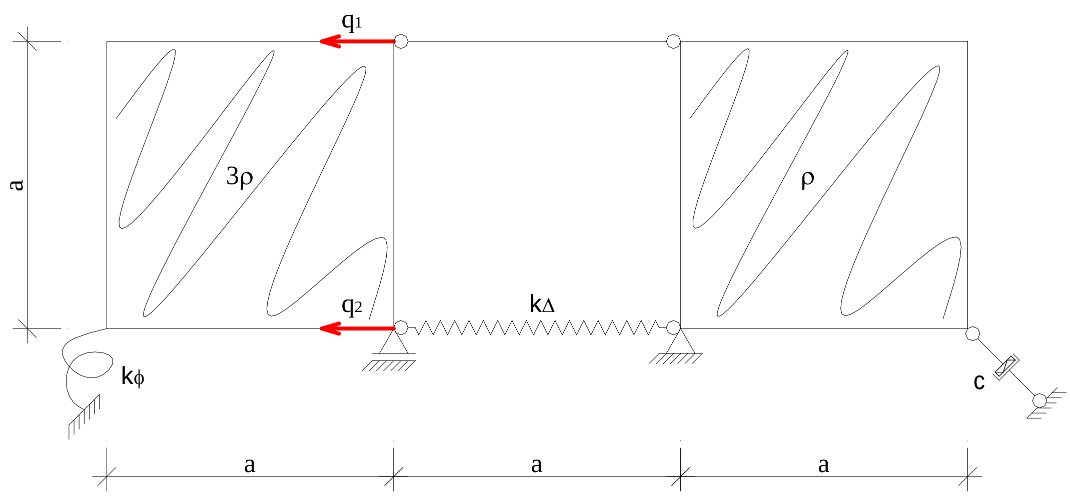
Analizowany układ ma dwa dynamiczne stopnie swobody, które wynikają z prostej relacji (dla układów o sztywnych tarczach)

$$d = 3t - e = 3*3 - 7 = 2$$

Współrzędne uogólnione przyjęto analogicznie jak w przypadku schematów kinematycznych wykorzystywanych przy metodzie przemieszczeń

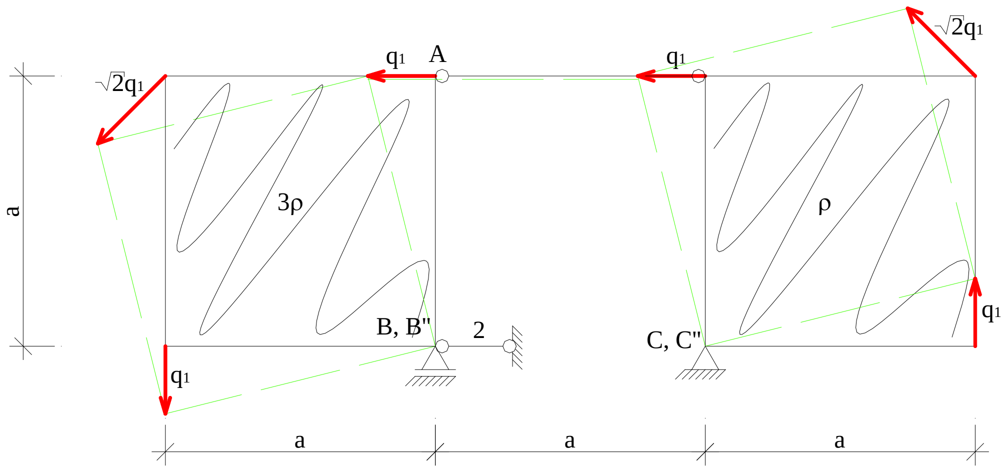


Kierunki więzi elementarnych dołączonych do układu wyjściowego (nr 1 i 2) odpowiadają współrzędnym uogólnionym

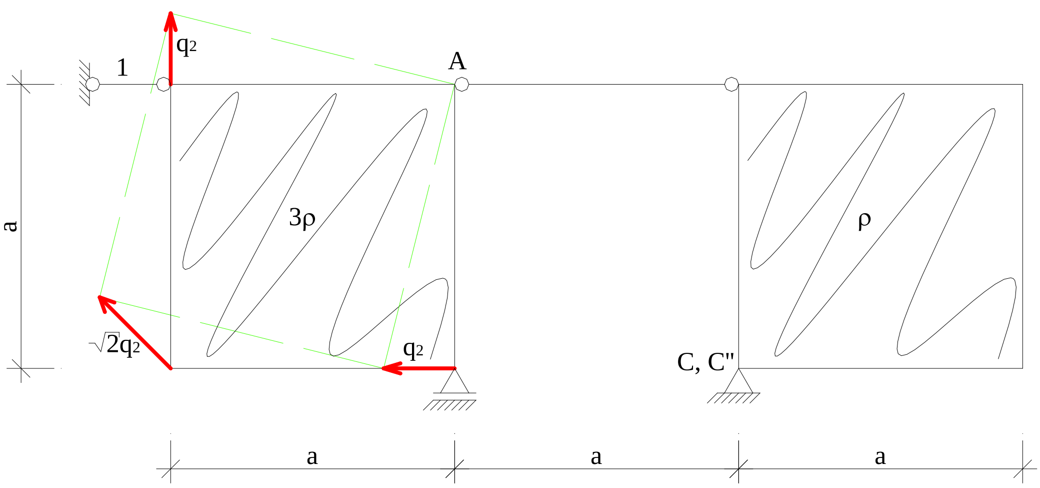


1.2. Plany przemieszczeń jednostkowych

Pierwszy stan jednostkowy

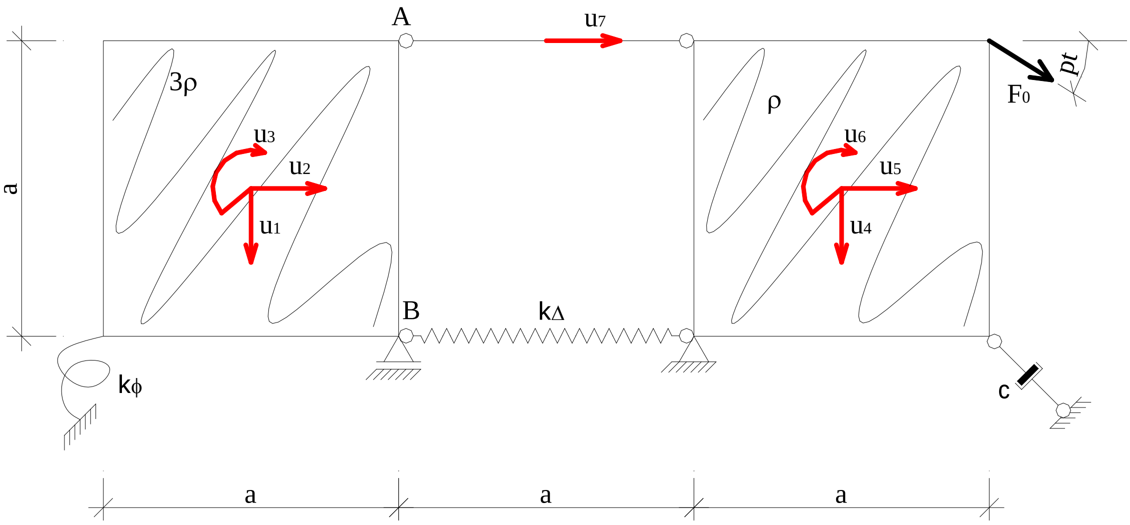


Drugi stan jednostkowy



1.3. Wyznaczenie macierzy bezwładności

Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne



Na podstawie planów przemieszczeń ustalono współczynniki transformacji

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \\ -1/a & 1/a \\ -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 \\ -1/a & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagonala mas

$$\{m\} = diag\left(3\rho a^2, 3\rho a^2, 0{,}5\rho a^4, \rho a^2, \rho a^2, \frac{\rho a^4}{6}, \rho a^2\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5\rho a^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho a^4}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 \end{bmatrix}$$

Macierz bezwładności

$$B = A_m^T \{m\} A_m =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \\ -1/a & 1/a \\ -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 \\ -1/a & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3\rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\rho a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5\rho a^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho a^4}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \\ -1/a & 1/a \\ -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0 \\ -1/a & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2 \\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2 \\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2 \end{bmatrix}$$

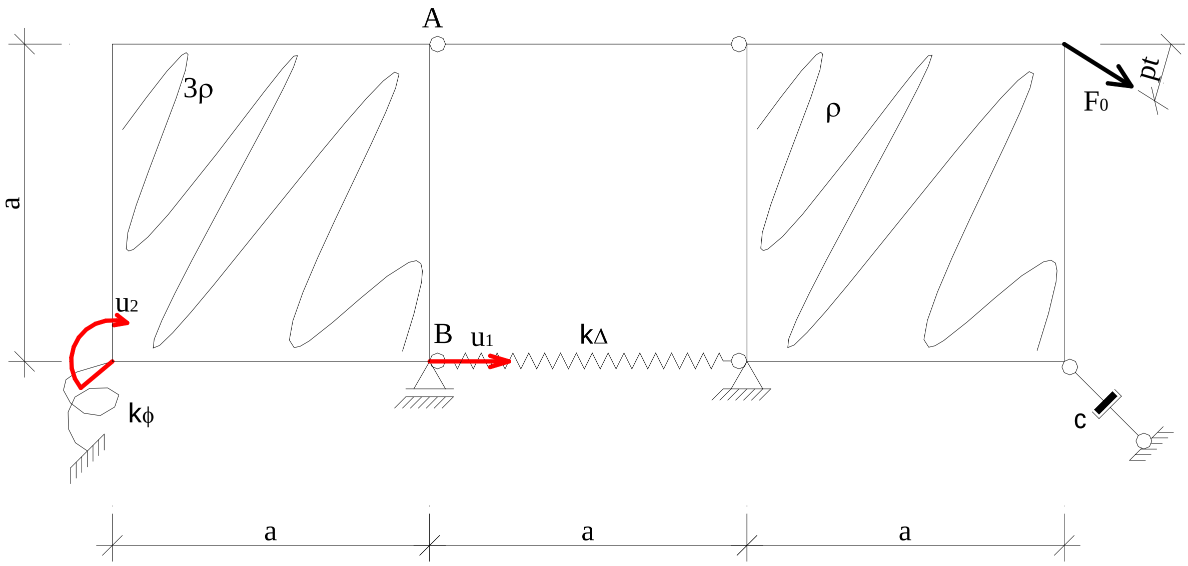
1.4. Wyznaczenie macierzy tłumienia

Z planów przemieszczeń wynika, że na kierunku więzi tłumiącej tylko w pierwszym stanie jednostkowym jest niezerowe przemieszczenie równe dokładnie q_1, stąd

$$\Phi = \frac{1}{2} c \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q}_1 \right)^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T C \, \dot{\bar{q}} \qquad \Rightarrow \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5. Wyznaczenie macierzy sztywności



Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne

Na podstawie planów przemieszczeń ustalono współczynniki transformacji

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagonala więzi sprężystych

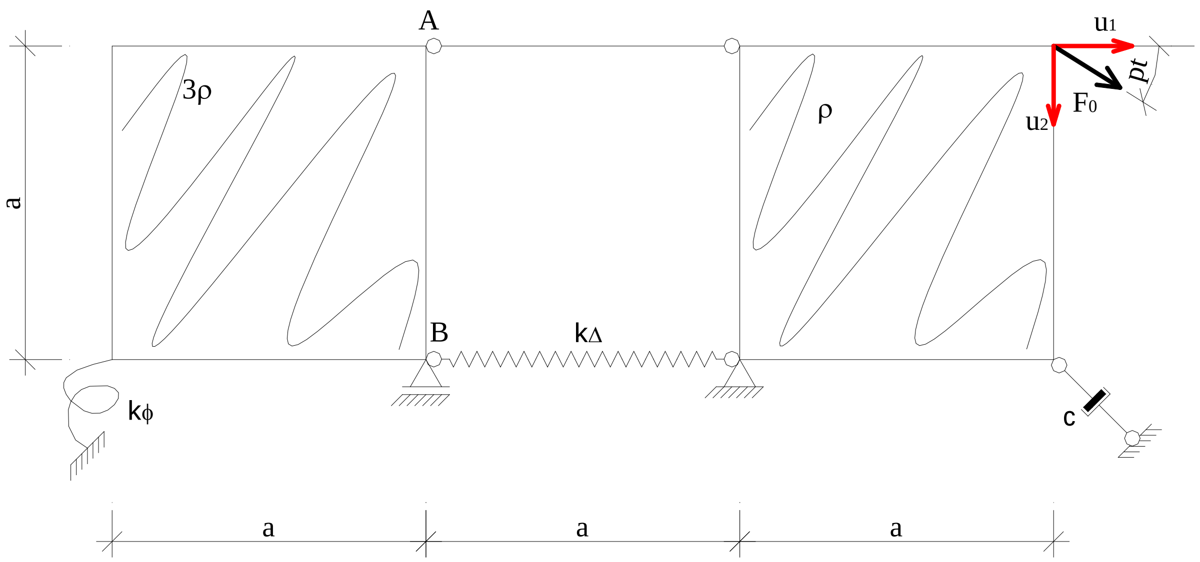
$$\{k\} = diag(k_\Delta, k_\varphi) = \begin{bmatrix} k_\Delta & 0 \\ 0 & k_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\Delta & 0 \\ 0 & 5k_\Delta a^2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności

$$K = A_s^T \{k\} A_s = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} k_\Delta & 0 \\ 0 & 5k_\Delta a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k_\Delta & -5k_\Delta \\ -5k_\Delta & 6k_\Delta \end{bmatrix}$$

1.6. Wyznaczenie wektora wzbudzania

Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne



Na podstawie planów przemieszczeń ustalono współczynniki transformacji

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Wektor składowych sił wzbudzających

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(pt) \\ F_0 \sin(pt) \end{bmatrix}$$

Praca sił wzbudzających

$$L = \overline{u}^T \overline{P}(t) = \overline{q}^T \cdot A_p^T \cdot \overline{P}(t) = \overline{q}^T \overline{F}(t)$$

$$\overline{F}(t) = A_p^T \cdot \overline{P}(t)$$

$$\overline{F}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_0 \cos(pt) \\ F_0 \sin(pt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \cos(pt) - F_0 \sin(pt) \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.7. Macierzowe równanie ruchu

$$B\ddot{\bar{q}}(t)+C\dot{\bar{q}}(t)+K\bar{q}(t)=\bar{F}(t)$$

Stąd

$$\begin{bmatrix}3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2\\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{c}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5k_\Delta & -5k_\Delta\\ -5k_\Delta & 6k_\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-F_0\cos(pt)-F_0\sin(pt)\\ 0\end{bmatrix}$$

1.8. Rozwiązanie zagadnienia własnego

Równanie drgań własnych

$$B\ddot{\bar{q}}(t)+K\bar{q}(t)=\bar{0}$$

$$\begin{bmatrix}3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2\\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5k_\Delta & -5k_\Delta\\ -5k_\Delta & 6k_\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\bar{0}$$

Równanie zagadnienia własnego

$$\det\left(B^{-1}K-\lambda I\right)=0$$

$$\omega=\sqrt{\lambda}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2\\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5k_\Delta & -5k_\Delta\\ -5k_\Delta & 6k_\Delta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\lambda^2-3{,}81176\frac{k_\Delta}{\rho a^2}\lambda+0{,}705882\left(\frac{k_\Delta}{\rho a^2}\right)^2=0$$

$$\lambda_1=0{,}195179\frac{k_\Delta}{\rho a^2}$$

$$\lambda_2=3{,}61659\frac{k_\Delta}{\rho a^2}$$

Stąd częstości własne wynoszą odpowiednio

$$\omega_1=\sqrt{0{,}195179\frac{k_\Delta}{\rho a^2}}=0{,}4418\sqrt{\frac{k_\Delta}{\rho a^2}}$$

$$\omega_2=\sqrt{3{,}61659\frac{k_\Delta}{\rho a^2}}=1{,}9017\sqrt{\frac{k_\Delta}{\rho a^2}}$$

Wektory własne

$$\begin{bmatrix} 3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2 \\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5k_\Delta & -5k_\Delta \\ -5k_\Delta & 6k_\Delta \end{bmatrix} - 0{,}195179\frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} 0{,}863644 & -0{,}988235 \\ -2{,}23529 & 2{,}55776 \end{bmatrix}$$

$$adj\left(\frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} 0{,}863644 & -0{,}988235 \\ -2{,}23529 & 2{,}55776 \end{bmatrix}\right) = \frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} 2{,}55776 & 0{,}988235 \\ 2{,}23529 & 0{,}863644 \end{bmatrix}$$

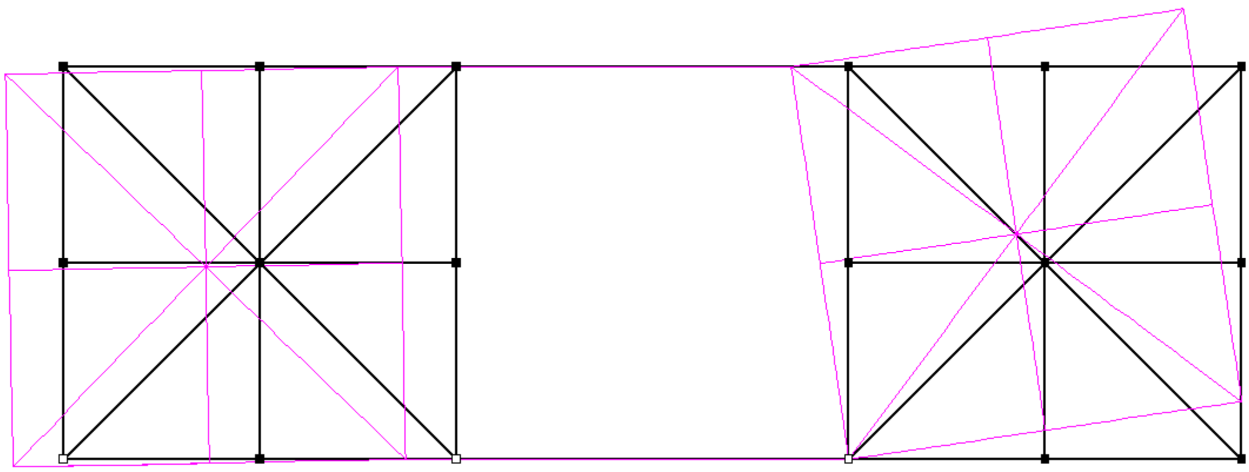
$$\overline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}8739 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}66667\rho a^2 & -0{,}5\rho a^2 \\ -0{,}5\rho a^2 & 2\rho a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5k_\Delta & -5k_\Delta \\ -5k_\Delta & 6k_\Delta \end{bmatrix} - 3{,}61659\frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} -2{,}55776 & -0{,}988235 \\ -2{,}23529 & -0{,}863644 \end{bmatrix}$$

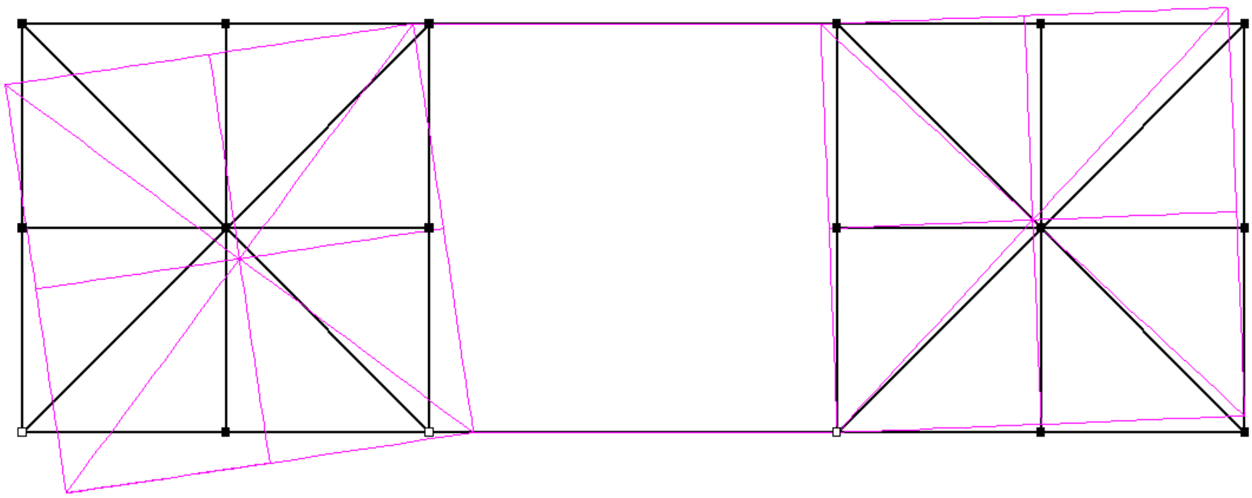
$$adj\left(\frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} -2{,}55776 & -0{,}988235 \\ -2{,}23529 & -0{,}863644 \end{bmatrix}\right) = \frac{k_\Delta}{\rho a^2}\begin{bmatrix} -0{,}863644 & 0{,}988235 \\ 2{,}23529 & -2{,}55776 \end{bmatrix}$$

$$\overline{w}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}3864 \\ -1{,}0 \end{bmatrix}$$

Pierwsza forma własna



Druga forma własna



1.9. Równanie ruchu układu w przypadku $k_{2\Delta} = \infty$

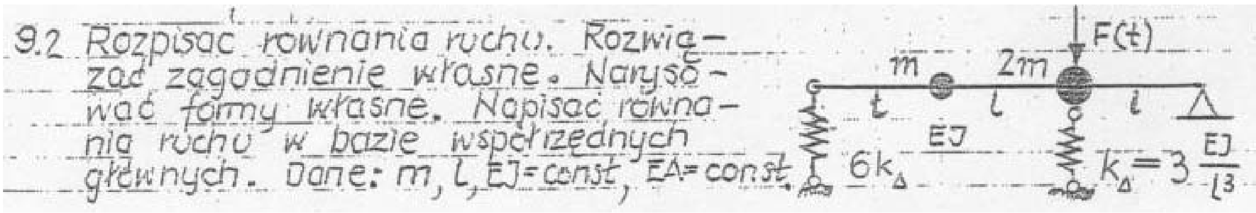
W przypadku $k_{\Delta} = \infty$ druga współrzędna uogólniona nie ma racji bytu, a układ staje się układem o jednym dynamicznym stopniu swobody, którego drgania opisuje współrzędna q_1 (pierwszy plan przemieszczeń).
Równanie ruchu przybiera postać

$$3{,}66667\rho a^2 \ddot{q}_1 + \frac{c}{2}\dot{q}_1 + 5k_{\Delta}\, q_1 = -F_0 \cos(pt) - F_0 \sin(pt)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{5k_{\Delta}}{3{,}66667\rho a^2}} = 1{,}16775\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{\rho a^2}}$$

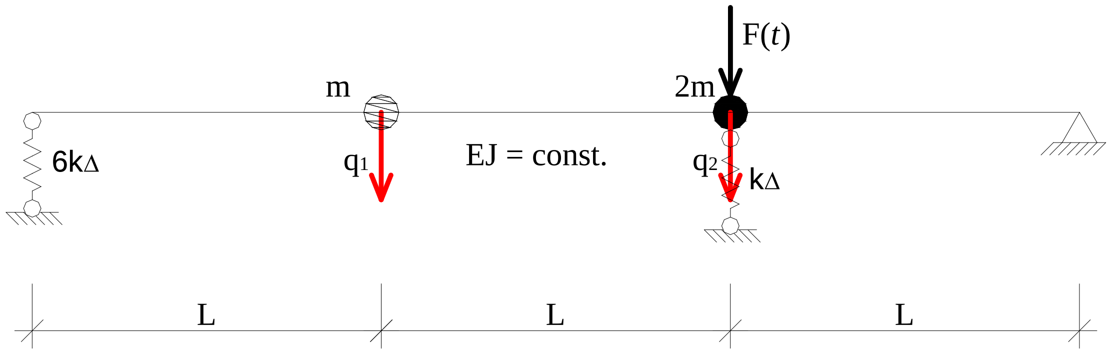
$$\gamma = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\tilde{k} * \tilde{m}}} = \frac{\frac{c}{2}}{\sqrt{5k_{\Delta} * 3{,}66667\rho a^2}} = 0{,}116775\frac{c}{\sqrt{k_{\Delta}\rho a^2}}$$

ZADANIE 2.



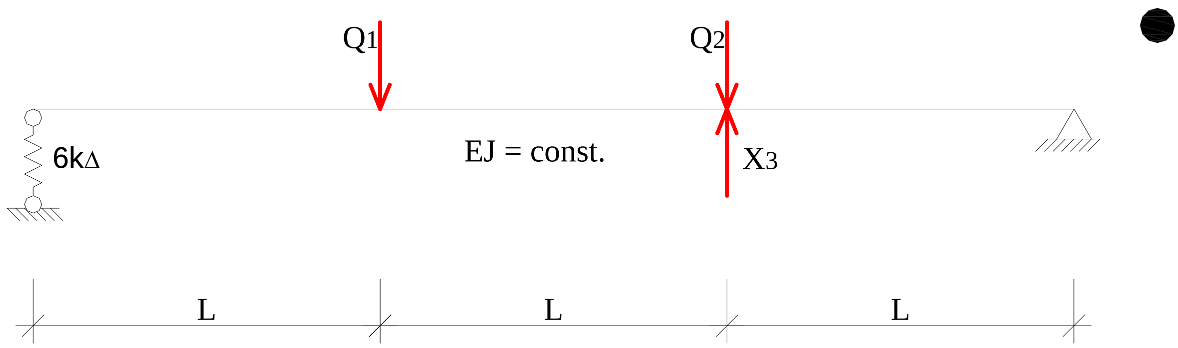
2.1. Przyjęcie współrzędnej uogólnionej

Analizowany układ ma dwa dynamiczne stopnie swobody. Współrzędne uogólnione przyjęto jako pionowe przemieszczenia mas skupionych (rys. poniżej).

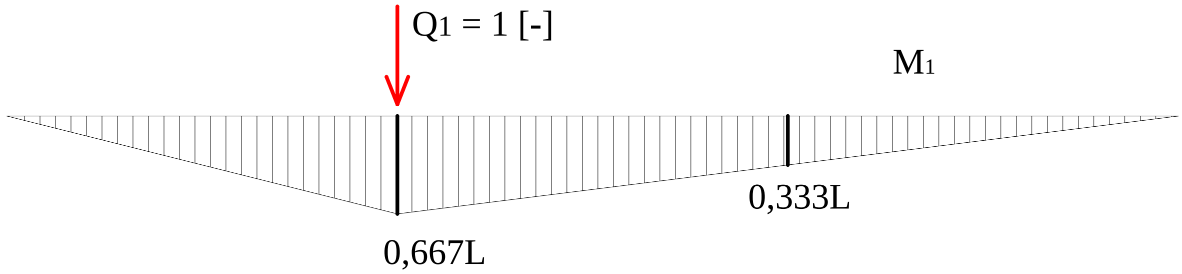


2.2. Wyznaczenie macierzy podatności

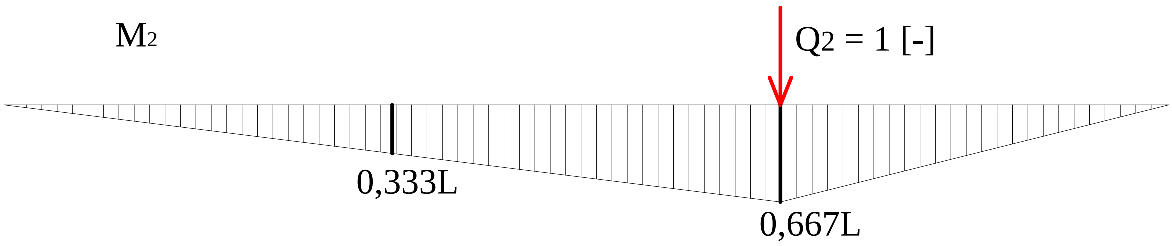
Układ wyjściowy jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny zatem w prosty sposób można wyznaczyć jeden ze składników równania ruchu za pomocą metody sił.



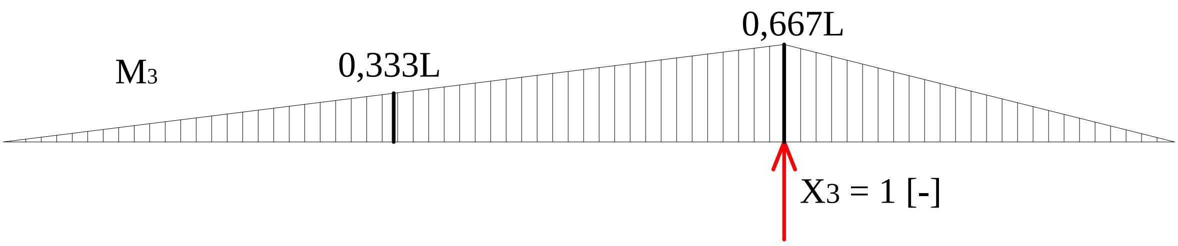
Stan jednostkowy Q_1 = 1 [-]



Stan jednostkowy Q_2 = 1 [-]



Stan jednostkowy X = 1 [-]



Macierz podatności układu w bazie poszerzonej

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}L\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*2L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}L\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{18EJ}{L^3}} = \frac{38L^3}{81EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\frac{1}{3}L\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{1}{3}L*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}L\right)$$

$$+\frac{L}{6EJ}\left(\frac{2}{3}L*\frac{1}{3}L+4*\frac{1}{2}L*\frac{1}{2}L+\frac{1}{3}L*\frac{2}{3}L\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{18EJ}{L^3}} = \frac{65L^3}{162EJ}$$

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\left(-\frac{1}{3}L\right)\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{1}{3}L*\frac{2}{3}*\left(-\frac{2}{3}L\right)\right)$$

$$+\frac{L}{6EJ}\left(\frac{2}{3}L*\left(-\frac{1}{3}L\right)+4*\frac{1}{2}L*\left(-\frac{1}{2}L\right)+\frac{1}{3}L*\left(-\frac{2}{3}L\right)\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)*\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{18EJ}{L^3}}=-\frac{65L^3}{162EJ}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}L\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*2L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}L\right)+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)*\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{18EJ}{L^3}}=\frac{73L^3}{162EJ}$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\left(-\frac{2}{3}L\right)\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*2L*\frac{2}{3}L*\frac{2}{3}*\left(-\frac{2}{3}L\right)\right)+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)*\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{18EJ}{L^3}}=$$

$$=-\frac{73L^3}{162EJ}$$

$$\delta_{33}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*L*\left(-\frac{2}{3}L\right)*\frac{2}{3}*\left(-\frac{2}{3}L\right)\right)+\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}*2L*\left(-\frac{2}{3}L\right)*\frac{2}{3}*\left(-\frac{2}{3}L\right)\right)+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)*\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{18EJ}{L^3}}+$$

$$+\frac{1}{3EJ/L^3}=\frac{127L^3}{162EJ}$$

$$\breve{D}=\frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix}\frac{76}{162} & \frac{65}{162} & -\frac{65}{162}\\ \frac{65}{162} & \frac{73}{162} & -\frac{73}{162}\\ -\frac{65}{162} & -\frac{73}{162} & \frac{127}{162}\end{bmatrix}$$

<u>Redukcja macierzy podatności z bazy poszerzonej do minimalnej</u>

$$D=D_{QQ}-D_{QX}\cdot D_{XX}^{-1}\cdot D_{XQ}$$

$$D=\frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix}\frac{76}{162} & \frac{65}{162}\\ \frac{65}{162} & \frac{73}{162}\end{bmatrix}-\frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix}-\frac{65}{162}\\ -\frac{73}{162}\end{bmatrix}\cdot\left[\frac{127}{162}\frac{L^3}{EJ}\right]^{-1}\cdot\frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix}-\frac{65}{162} & -\frac{73}{162}\end{bmatrix}=\frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix}0{,}26378 & 0{,}170604\\ 0{,}170604 & 0{,}191601\end{bmatrix}$$

2.3. Wyznaczenie macierzy bezwładności

Energia kinetyczna sformułowana w bazie dwóch współrzędnych uogólnionych ma postać

$$E_k = \frac{1}{2}\dot{\overline{q}}^T B\,\dot{\overline{q}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(b_{11} * \dot{q}_1^2 + b_{12} * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 + b_{21} * \dot{q}_2 * \dot{q}_1 + b_{22} * \dot{q}_2^2\right)$$

gdzie $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ – macierz bezwładności

W niniejszym przykładzie

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m * \dot{q}_1^2 + 0 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 + 0 * \dot{q}_2 * \dot{q}_1 + 2m * \dot{q}_2^2\right)$$

stąd

$$B = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m\end{bmatrix}$$

2.4. Wyznaczenie wektora wzbudzania

Praca sił wzbudzających sformułowana w bazie dwóch współrzędnych uogólnionych ma postać

$$L = \overline{q}^T \overline{F} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = F_1 * q_1 + F_2 * q_2$$

gdzie $\overline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ – wektor wzbudzania

W niniejszym przykładzie

$$L = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} = 0 * q_1 + F(t) * q_2$$

stąd

$$\overline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

2.5. Równanie ruchu układu

Równanie ruchu układu zapisano zgodnie z metodą sił

$$D \cdot B * \ddot{\overline{q}} + \overline{q} = D \cdot \overline{F}$$

stąd

$$\frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix} 0,26378 & 0,170604 \\ 0,170604 & 0,191601 \end{bmatrix} * m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{EJ}\begin{bmatrix} 0,26378 & 0,170604 \\ 0,170604 & 0,191601 \end{bmatrix} * F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.6. Rozwiązanie zagadnienia własnego

Formułując równanie ruchu układu za pomocą metody sił uzyskuje się równanie drgań własnych w postaci

$$\mathrm{D} \cdot \mathrm{B} \cdot \ddot{\overline{\mathrm{q}}} + \overline{\mathrm{q}} = \overline{0}$$

Zakładając rozwiązanie harmoniczne ($\ddot{\overline{\mathrm{q}}} = -\omega^2 \overline{\mathrm{q}}$) otrzymamy

$$\left(-\mathrm{D} \cdot \mathrm{B} \cdot \omega^2 + \mathrm{I}\right) \cdot \overline{\mathrm{q}} = \overline{0}$$

Powyższe równanie posiada nietrywialne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$\det\left(\mathrm{D} \cdot \mathrm{B} - \omega^{-2} \cdot \mathrm{I}\right) = 0$ – jest to równanie zagadnienia własnego

Dalej wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymamy

$$\det\left(\frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{L}^3}{\mathrm{EJ}} \mathrm{D}^* \cdot \mathrm{B}^* - \omega^{-2} \cdot \mathrm{I}\right) = 0$$

$$\det\left(\mathrm{D}^* \cdot \mathrm{B}^* - \frac{\mathrm{EJ}}{\omega^2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{L}^3} \cdot \mathrm{I}\right) = 0$$

Przyjmując , że $\lambda = \frac{\mathrm{EJ}}{\omega^2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{L}^3}$ (gdzie λ są wartościami własnymi) otrzymamy relację pomiędzy wartościami własnymi a częstościami własnymi

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\lambda \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{L}^3}}$$

Zatem

$$D^* = \begin{pmatrix} 0.26378 & 0.170604 \\ 0.170604 & 0.191601 \end{pmatrix} \qquad B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^*B^* = \begin{pmatrix} 0.26378 & 0.170604 \\ 0.170604 & 0.191601 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.26378 & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.383202 \end{pmatrix}$$

$$D^*B^* - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.26378 & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.383202 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.26378 - \lambda & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.383202 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(D^*B^* - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 0.288276 - \lambda & 0.369592 \\ 0.184796 & 0.383202 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 4.2869573928 \cdot 10^{-2} - 0.646982 \cdot \lambda + \lambda^2$$

Z powyższego równania kwadratowego uzyskuje się wartości własne

$\lambda 1 = 0.5720405 \qquad \lambda 2 = 0.0749415$

a na ich podstawie częstości własne układu

$$\omega 1 = 1{,}3222 \sqrt{\frac{E \cdot J}{m \cdot L^3}} \qquad \omega 2 = 3{,}6529 \sqrt{\frac{E \cdot J}{m \cdot L^3}}$$

Następnie wyznacza się wektory własne, które uporządkowane kolejno tworzą macierz własną

- pierwszy wektor własny

$$D^*B^* - \lambda 1 \times I = \begin{pmatrix} 0.26378 & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.383202 \end{pmatrix} - 0.5720405 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3082605 & 0.341208 \\ 0.170604 & -0.1888385 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj} \begin{pmatrix} -0.3082605 & 0.341208 \\ 0.170604 & -0.1888385 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1888385 & -0.341208 \\ -0.170604 & -0.3082605 \end{pmatrix}$$

$$w1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9034 \end{pmatrix}$$

- drugi wektor własny

$$D^*B^* - \lambda 2 \times I = \begin{pmatrix} 0.26378 & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.383202 \end{pmatrix} - 0.0749415 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1888385 & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.3082605 \end{pmatrix}$$

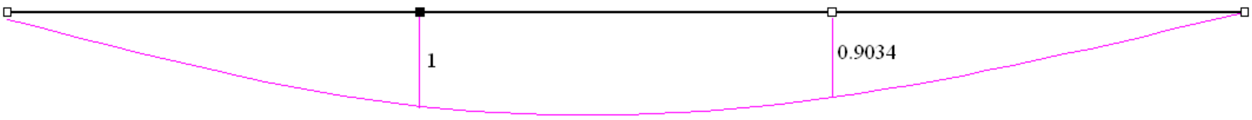
$$\mathrm{adj} \begin{pmatrix} 0.1888385 & 0.341208 \\ 0.170604 & 0.3082605 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3082605 & -0.341208 \\ -0.170604 & 0.1888385 \end{pmatrix}$$

$$w2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5534 \end{pmatrix}$$

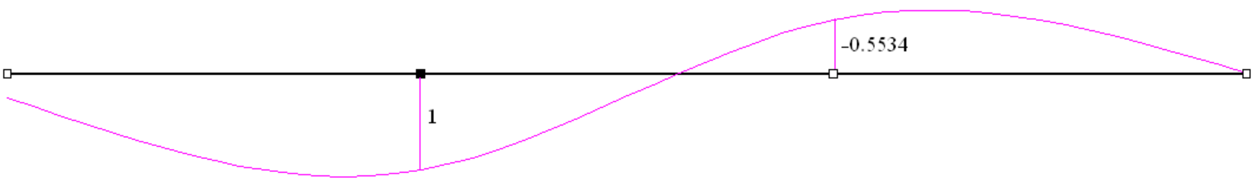
- macierz własna

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.9034 & -0.5534 \end{pmatrix}$$

<u>Pierwsza forma własna</u>



<u>Druga forma własna</u>



2.7. Równanie ruchu w bazie współrzędnych głównych

Aby przejść do bazy współrzędnych głównych zastosujemy metodę transformacji własnej, wykorzystując znaną macierz własną.

Załóżmy postać rozwiązania

$$\overline{q} = W \cdot \overline{y}$$

gdzie: $\overline{y}$ - wektor współrzędnych głównych (rozseparowanych, co wynika z ortogonalności drgań własnych)

Wówczas równanie ruchu zapisane bezpośrednio (zgodnie z metodą przemieszczeń) przybierze postać

$$B \cdot W \cdot \ddot{\bar{y}} + K \cdot W \cdot \bar{y} = \overline{F}$$

przy czym nie zmieniamy bazy $\bar{q}$ a zatem prawdziwa jest relacja

$$D \cdot K = I$$

Następnie pomnóżmy równanie ruchu lewostronnie przez macierz własną transponowaną

$$W^T \cdot B \cdot W \cdot \ddot{\bar{y}} + W^T \cdot K \cdot W \cdot \bar{y} = W^T \cdot \overline{F}$$

z ortogonalności wektorów własnych wynika, że macierzowe równanie ruchu zapisane w bazie współrzędnych głównych będzie stanowić układ równań różniczkowych rozseparowanych, czyli

$$\{b\} \cdot \ddot{\bar{y}} + \{k\} \cdot \bar{y} = \bar{f}$$

w niniejszym przykładzie

$$\text{WT*B*W} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9034 \\ 1 & -0.5534 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \cdot m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.9034 & -0.5534 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6323 \cdot m & 0 \\ 0 & 1.6125 \cdot m \end{pmatrix}$$

$$\text{K = D^-1} = \begin{pmatrix} 0.26378 \dfrac{L^3}{E \cdot J} & 0.170604 \dfrac{L^3}{E \cdot J} \\ 0.170604 \dfrac{L^3}{E \cdot J} & 0.191601 \dfrac{L^3}{E \cdot J} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8.938787 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} & -7.959211 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} \\ -7.959211 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} & 12.306164 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} \end{pmatrix}$$

$$\text{WT*K*W} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9034 \\ 1 & -0.5534 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8.938787 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} & -7.959211 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} \\ -7.959211 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} & 12.306164 \cdot \dfrac{E \cdot J}{L^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.9034 & -0.5534 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6015 \cdot E \cdot \dfrac{J}{L^3} & 0 \\ 0 & 21.5168 \cdot E \cdot \dfrac{J}{L^3} \end{pmatrix}$$

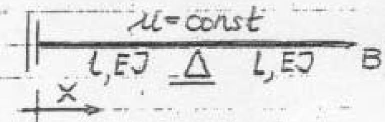
$$\text{WT*F} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9034 \\ 1 & -0.5534 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9034 \cdot F(t) \\ -0.5534 \cdot F(t) \end{pmatrix}$$

Stąd postać równania ruchu w bazie współrzędnych głównych jest następująca

$$m \begin{bmatrix} 2{,}6323 & 0 \\ 0 & 1{,}6125 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \frac{EJ}{L^3} \begin{bmatrix} 4{,}6015 & 0 \\ 0 & 21{,}5168 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} 0{,}93034 \\ -0{,}5534 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 3.

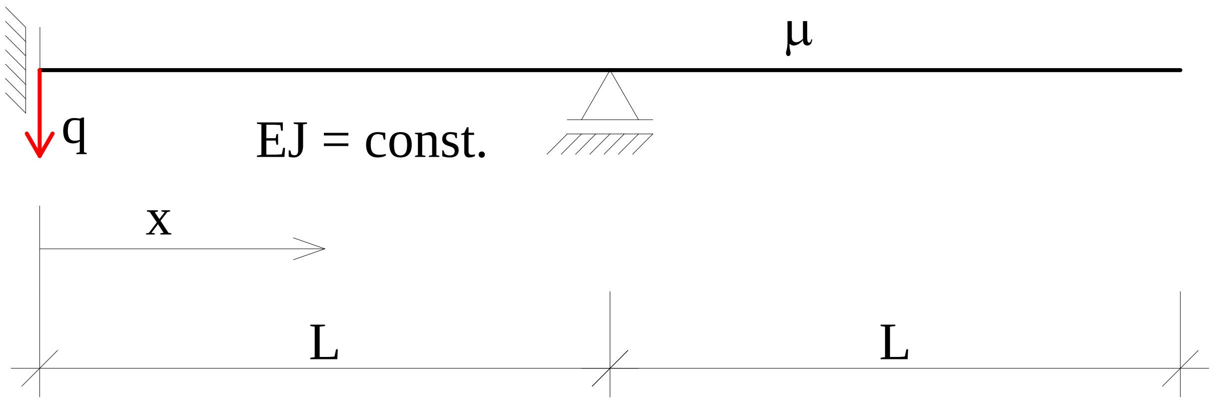
10.2 Wyznaczyć podstawową częstość drgań własnych belki masowej. Funkcja aproksymacyjna ma postać:
$f = (-x^5/L^5+5x^4/L^4-40\,x^2/L^2+36)/36.$



Jaką sztywnością rotacyjną powinna charakteryzować się dodatkowa więź przyłożona do punktu B, aby nowa częstość była 2 razy większa od pierwotnej? $(k_\varphi = \xi\, EJ/L)$.

Analizowany układ jest ciągłym układem dynamicznym, który ma nieskończenie wiele stopni swobody. Jednak za pomocą metody aproksymacyjnej (w zadaniu podano funkcję aproksymacyjną) możliwe jest wyznaczenie przybliżonej wartości pierwszej częstości własnej.

Schemat dynamiczny z przyjętą współrzędną uogólnioną przedstawiono poniżej



3.1. Wyznaczenie częstości drgań własnych

Funkcję aproksymująca przyjmuje wartość jednostkową w punkcie $x = 0$, zatem współrzędną uogólnioną przyjęto w zamocowaniu sztywno-przesuwnym. Wynika stąd, że funkcja aproksymująca stan przemieszczeń zależnych od czasu oraz położenia punktu materialnego przyjmie postać

$$w(x,t) = q(t)\cdot\left(-\frac{x^5}{L^5}+5\frac{x^4}{L^4}-40\frac{x^2}{L^2}+36\right)\cdot\frac{1}{36}$$

pochodna po czasie

$$\dot{w}(x,t) = \dot{q}(t)\cdot\left(-\frac{x^5}{L^5}+5\frac{x^4}{L^4}-40\frac{x^2}{L^2}+36\right)\cdot\frac{1}{36}$$

pochodne geometryczne

$$w'(x,t) = q(t)\cdot\left(-5\frac{x^4}{L^5}+20\frac{x^3}{L^4}-80\frac{x}{L^2}\right)\cdot\frac{1}{36}$$

$$w''(x,t)=q(t)\cdot\left(-20\frac{x^3}{L^5}+60\frac{x^2}{L^4}-\frac{80}{L^2}\right)\cdot\frac{1}{36}$$

- **Energia kinetyczna układu**

$$E_k=\frac{1}{2}\int_0^{2L}\mu\,dx\,\dot{w}(x,t)^2=\frac{1}{2}\int_0^{2L}\mu\,dx\left(\dot{q}(t)\cdot\left(-\frac{x^5}{L^5}+5\frac{x^4}{L^4}-40\frac{x^2}{L^2}+36\right)\cdot\frac{1}{36}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2L}\mu\left(\left(-\frac{x^5}{L^5}+5\frac{x^4}{L^4}-40\frac{x^2}{L^2}+36\right)\cdot\frac{1}{36}\right)^2dx\,\dot{q}^2=\frac{1}{2}\cdot 1{,}94299\mu\,L\,\dot{q}^2=\frac{1}{2}\tilde{m}\dot{q}^2$$

<u>Stąd masa modalna wynosi</u>: $\tilde{m}=1{,}94299\mu\,L$

- **Energia potencjalna układu**

$$E_p=\frac{1}{2}\int_0^{2L}M\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2L}M\,\frac{M}{EJ}dx=\frac{1}{2}\int_0^{2L}\frac{1}{EJ}\left(EJw''(x,t)\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2L}EJ\left(q(t)\cdot\left(-20\frac{x^3}{L^5}+60\frac{x^2}{L^4}-\frac{80}{L^2}\right)\cdot\frac{1}{36}\right)^2dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2L}EJ\left(\left(-20\frac{x^3}{L^5}+60\frac{x^2}{L^4}-\frac{80}{L^2}\right)\cdot\frac{1}{36}\right)^2dx\cdot q^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1{,}83422\frac{EJ}{L^3}\cdot q^2=\frac{1}{2}\tilde{k}\,q^2$$

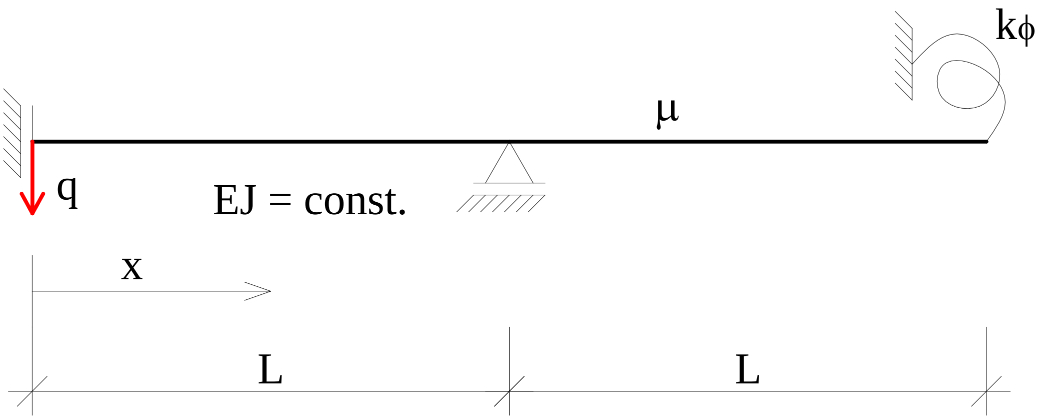
<u>Stąd sztywność modalna wynosi</u>: $\tilde{k}=3{,}66843\frac{EJ}{L^3}$

- Częstość drgań własnych (przybliżona) obliczona z aproksymacji wynosi

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{3{,}66843\frac{EJ}{L^3}}{1{,}94299\mu\,L}}=1{,}3741\sqrt{\frac{EJ}{\mu\,L^4}}$$

Nie jest to wartość dokładna, ponieważ funkcja aproksymacyjna daje jedynie pewne przybliżenie. W tym przypadku jest to oszacowanie odgórne, tzn. zawyżona została sztywność układu.

3.2. Oszacowanie sztywności więzi sprężystej



Kąt obrotu węzła w miejscu k_ϕ wyrażony za pomocą współrzędnej uogólnionej jest równy

$$\varphi(t) = w'(2L,t) = q(t)\cdot\left(-5\frac{(2L)^4}{L^5} + 20\frac{(2L)^3}{L^4} - 80\frac{2L}{L^2}\right)\cdot\frac{1}{36} = -2{,}22222\cdot\frac{q}{L}$$

Zatem energia potencjalna układu przybierze postać

$$E_p = \frac{1}{2}\cdot 3{,}66843\frac{EJ}{L^3}\cdot q^2 + \frac{1}{2}\cdot\xi\frac{EJ}{L}\cdot\left(-2{,}22222\cdot\frac{q}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(3{,}66843\frac{EJ}{L^3} + 4{,}93827\cdot\xi\frac{EJ}{L^3}\right)\cdot q^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\tilde{k}\cdot q^2$$

<u>Stąd nowa sztywność modalna wynosi</u>: $\tilde{k} = (3{,}66843 + 4{,}93827\cdot\xi)\frac{EJ}{L^3}$

Nowa częstość własna ma być 2 razy większa od pierwotnej, stąd

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\cdot 1{,}3741\sqrt{\frac{EJ}{\mu L^4}} = 2{,}7482\sqrt{\frac{EJ}{\mu L^4}}$$

$$\sqrt{\frac{(3{,}66843 + 4{,}93827\cdot\xi)\frac{EJ}{L^3}}{1{,}94299\mu L}} = 2{,}7482\sqrt{\frac{EJ}{\mu L^4}}$$

$$\frac{(3{,}66843 + 4{,}93827\cdot\xi)\frac{EJ}{L^3}}{1{,}94299\mu L} = 7{,}5526\frac{EJ}{\mu L^4}$$

$$\frac{3{,}66843 + 4{,}93827\cdot\xi}{1{,}94299} = 7{,}5526$$

$$\xi = 2{,}22876$$

Więź rotacyjna powinna mieć sztywność równą $k_\varphi = 2{,}22876\frac{EJ}{L}$