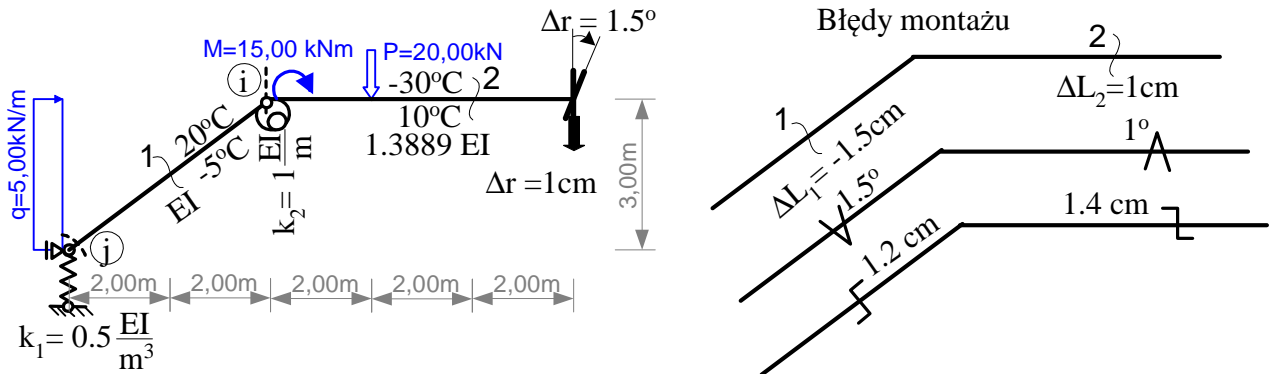


ROZWIĄZANIE RAMY PŁASKIEJ METODĄ SIŁ I OBLICZENIE PRZEMIESZCZEŃ

1 DANE WYJŚCIOWE

Dana jest rama jak na rysunku.



Rozwiązać ją metodą sił od danego obciążenia siłami, od zmiany temperatury oraz od błędów montażu i przemieszczeń podpór. Sporządzić wykresy sił przekrojowych i dokonać kontroli rozwiązania od jednego z wymienionych wpływów. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia.

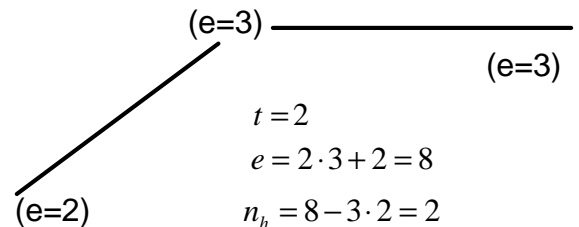
Uwaga dotycząca oznaczeń.

Aby uniknąć niejednoznaczności oznaczeń wszystkie przemieszczenia obliczane w statycznie wyznaczalnym układzie podstawowym i dotyczące tylko układu podstawowego oznaczać będziemy małym symbolem δ a przemieszczenia obliczane w statycznie niewyznaczalnym układzie danym lub obliczane w układzie podstawowym a dotyczące układu danego oznaczać będziemy dużym symbolem Δ . Siły przekrojowe i reakcje wyznaczone w układzie podstawowym oznaczać będziemy odpowiednim symbolem z nadkreśleniem (np. \bar{M}) a w układzie danym oznaczać będziemy odpowiednim symbolem bez nadkreślenia (np. M).

2 WYZNACZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Aby skorzystać z wzoru $n_h = e - 3 \cdot t$

przekształcamy układ dany w zbiór tarcz „sztywnych” otwartych przez usunięcie więzi podporowych, dokonanie przecięć wszędzie tam gdzie połączenie nie jest pełne oraz „otwarcie” tarcz zamkniętych. zilustrowano to na rysunku obok. Na rysunku tym w nawiasach podano liczby usuniętych więzi, których suma jest liczbą więzi e w przytoczonym wzorze.



3 ROZWIĄZANIE RAMY OD OBCIĄŻENIA SIŁAMI

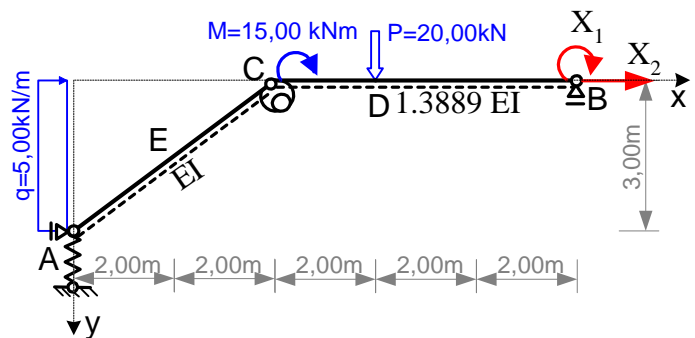
3.1 UKŁAD PODSTAWOWY I ODPOWIADAJĄCY MU UKŁAD RÓWNAŃ

KANONICZNYCH

3.1.1 UKŁAD PODSTAWOWY

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez zastąpienie n_h więzi niewiadomymi siłami w taki sposób by powstały układ był geometrycznie niezmienny.

Uwaga: Liniami przerywanymi wzdłuż osi prętów wyróżniono włókna do znakowania momentów zginających.



3.1.2 UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH

$$\delta_{11} \cdot X_1^F + \delta_{12} \cdot X_2^F + \delta_{1F} = \Delta_{1r_z}^F = 0,$$

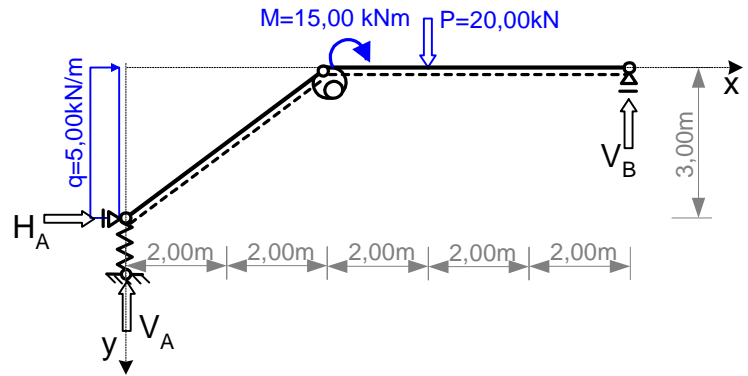
$$\delta_{21} \cdot X_1^F + \delta_{22} \cdot X_2^F + \delta_{2F} = \Delta_{2r_z}^F = 0.$$

3.2 ROZWIĄZANIA UKŁADU PODSTAWOWEGO

3.2.1 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD DANEGO OBCIĄŻENIA

$$F=(M,P,Q)$$

Uwaga: Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nadkreśleniem i indeksem górnym \bar{F} . Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



3.2.1.1 WYZNACZENIE REAKCJI PODPÓR

$$\sum M_A = -V_B \cdot 10m + P \cdot 6m + M + q \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-V_B \cdot 10m + 20kN \cdot 6m + 15kNm + 5kN/m \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \bar{V}_B^F = 15.75kN,$$

$$\sum Y = -V_A - V_B + P = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A - 15.75kN + 20kN = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \bar{V}_A^F = 4.25kN,$$

$$\sum X = H_A + q \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A + 5kN/m \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = \bar{H}_A^F = -15.00kN.$$

Kontrola

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m - P \cdot 4m + M - q \cdot 3m \cdot 3m / 2 = \\ &= (15 \cdot 3 + 4.25 \cdot 10 - 20 \cdot 4 + 15 - 5 \cdot 3 \cdot 3 / 2)kNm = 0 \end{aligned}$$

3.2.1.2 OBLICZENIE WARTOŚCI RZĘDNYCH CHARAKTERYSTYCZNYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH.

$$M_A = 0,$$

$$\begin{aligned} M_E &= V_A \cdot 2m - H_A \cdot 1.5m - q \cdot 1.5m \cdot 1.5m / 2 = \\ &= 4.25kN \cdot 2m + 15kN \cdot 1.5m - 5kN/m \cdot 1.5m \cdot 1.5m / 2 = 25.375kNm, \end{aligned}$$

$$M_{CA} = V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m - q \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 4.25 \cdot 4m + 15kN \cdot 3m - 5kN/m \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 39.50kNm,$$

$$M_{CD} = M_{CA} + M = 39.5kNm + 15kNm = 54.50kNm,$$

$$M_D = V_B \cdot 4m = 15.75kN \cdot 4m = 63.00kNm, \quad M_B = 0,$$

$$V_{AC} = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = (4.25 \cdot 0.8 + 15 \cdot 0.6)kN = 12.40kN,$$

$$N_{AC} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = (-4.25 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.8)kN = 9.45kN,$$

$$V_{CA} = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha - q \cdot 3m \cdot \sin \alpha = (4.25 \cdot 0.8 + 15 \cdot 0.6 - 5 \cdot 3 \cdot 0.6)kN = 3.40kN,$$

$$N_{CA} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha - q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = (-4.25 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.8 - 5 \cdot 3 \cdot 0.8)kN = -2.55kN,$$

$$V_{CD} = P - V_B = 20kN - 15.75kN = 4.25kN, \quad V_{DB} = -V_B = -15.75kN, \quad N_{CB} = 0.$$

Rzędne środkowe momentów zginających dla przedziału CD i DB, wykorzystując ich prostoliniowy charakter, obliczono jako średnie arytmetyczne z wartości brzegowych.

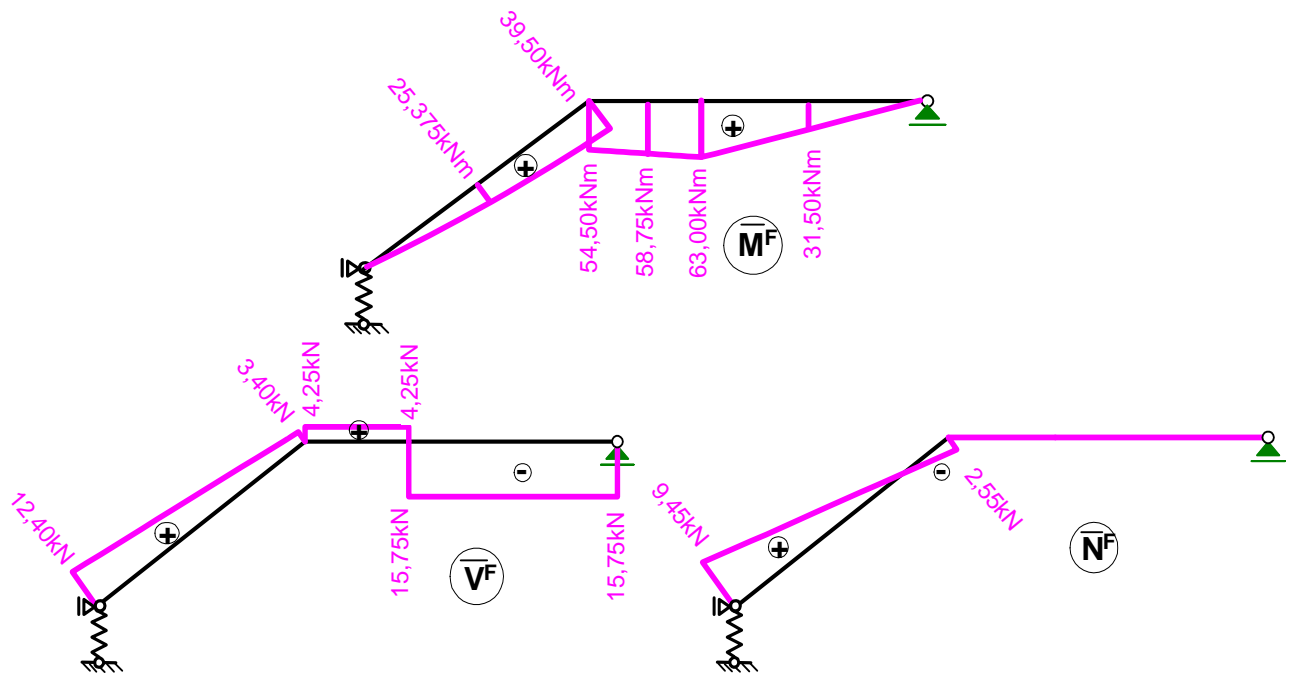
$$M_{s,CD} = (M_{CD} + M_D) / 2 = (54.5 + 63) / 2 \cdot kNm = 58.75kNm,$$

$$M_{s,DB} = (M_D + M_B) / 2 = (63 + 0) / 2 \cdot kNm = 31.50kNm$$

Siła podłużna w więzi sprężystej nr 1: $\bar{S}_1^F = -V_A = -4.25kN$

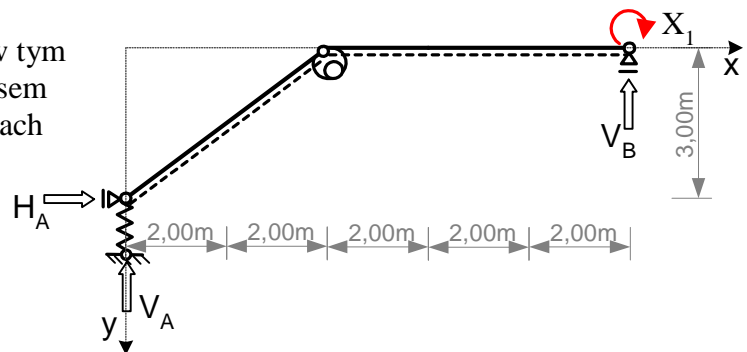
Moment zginający w więzi sprężystej nr 2: $\bar{S}_2^F = M_{CA} = 39.50kNm$

3.2.1.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH.



3.2.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA $X_1 = 1$

Uwaga: Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nadkreśleniem i indeksem górnym 1. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



3.2.2.1 WYZNACZENIE REAKCJI PODPÓR

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -V_B \cdot 10m + 1 = 0 & \Rightarrow & V_B = \bar{V}_B^1 = 0.10/m, \\ \sum Y &= -V_A - V_B = 0 & \Rightarrow & V_A = \bar{V}_A^1 = -0.10/m, \\ \sum X &= H_A = 0 & \Rightarrow & H_A = \bar{H}_A^1 = 0. \\ \text{Kontrola} \quad \sum M_B &= -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m + X_1 = -0 \cdot 3 - 0.1 \cdot 10 + 1 = 0 \end{aligned}$$

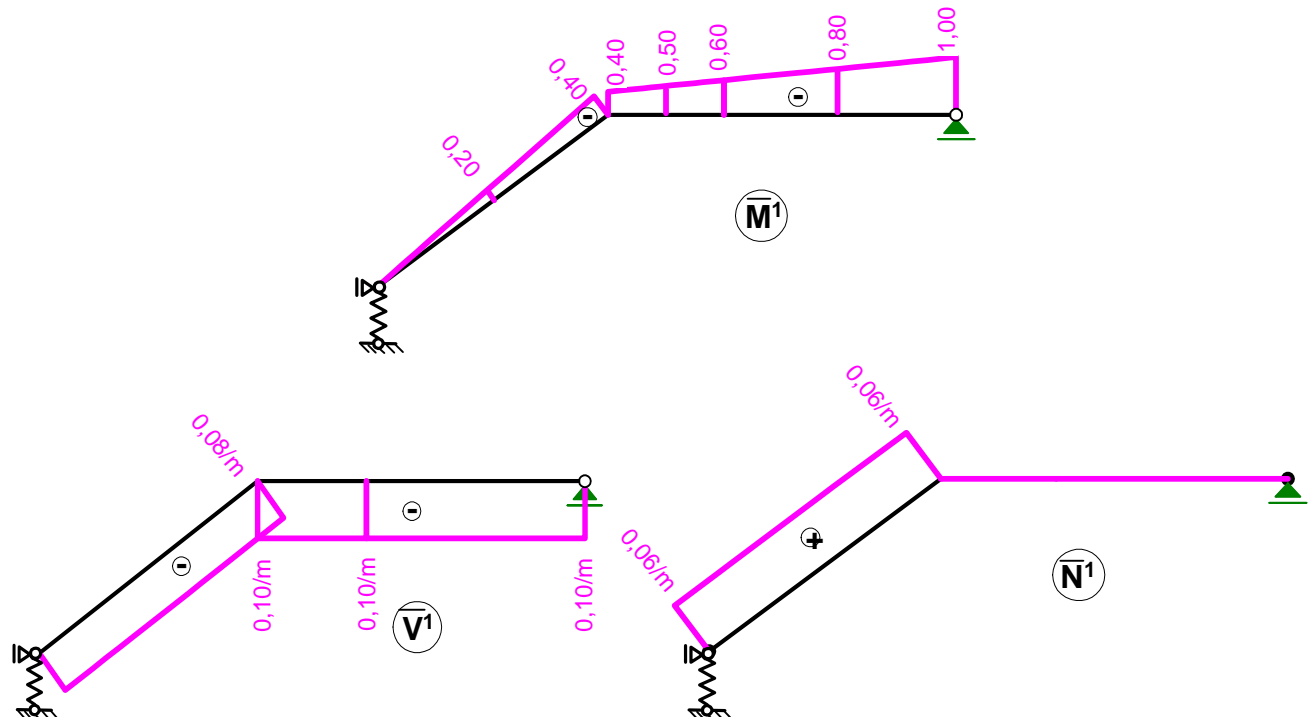
3.2.2.2 OBLICZENIE WARTOŚCI RZĘDNYCH CHARAKTERYSTYCZNYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH

$$\begin{aligned} M_A &= 0, & M_C &= V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m = -0.40, \\ M_D &= V_B \cdot 4m - 1 = -0.60, & M_B &= -1, \\ V_{AC} &= V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = -0.08/m, & N_{AC} &= -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = 0.06/m, \\ V_{CB} &= -V_B = -0.10/m, & N_{CB} &= 0. \\ M_E &= M_{s,AC} = (M_A + M_C)/2 = (0 - 0.4)/2 = -0.20, \\ M_{s,CD} &= (M_C + M_D)/2 = (-0.4 - 0.6)/2 = -0.50, & M_{s,DB} &= (M_D + M_B)/2 = (-0.6 - 1)/2 = -0.80. \\ M_{s,CB} &= (M_C + M_B)/2 = (-0.4 - 1)/2 = -0.70. \end{aligned}$$

Siła podłużna w więzi sprężystej nr 1: $\bar{S}_1^1 = -V_A = 0.10/m$

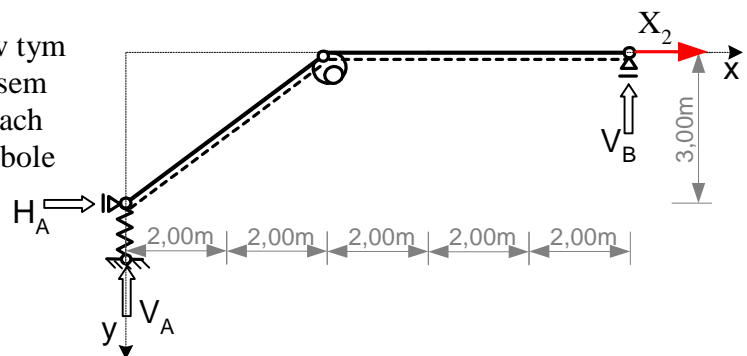
Moment zginający w więzi sprężystej nr 2: $\bar{S}_2^1 = M_C = -0.40$

3.2.2.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH



3.2.3 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA $X_2 = 1$

Uwaga: Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nadkreśleniem i indeksem górnym 2. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



3.2.3.1 WYZNACZENIE REAKCJI PODPÓR

$$\sum M_A = -V_B \cdot 10m + 1 \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_B = \bar{V}_B^2 = 0.30,$$

$$\sum Y = -V_A - V_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_A = \bar{V}_A^2 = -0.30,$$

$$\sum X = H_A + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$H_A = \bar{H}_A^2 = -1.$$

Kontrola

$$\sum M_B = -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m = -(-1) \cdot 3 + (-0.3) \cdot 10m = 0$$

3.2.3.2 OBLICZENIE WARTOŚCI RZĘDNYCH CHARAKTERYSTYCZNYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH

$$M_A = 0,$$

$$M_C = V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m = 1.80m,$$

$$M_D = V_B \cdot 4m = 1.20m,$$

$$M_B = 0,$$

$$V_{AC} = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = 0.36, \quad N_{AC} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = 0.98,$$

$$V_{CB} = -V_B = -0.30,$$

$$N_{CB} = 1.$$

$$M_E = M_{s,AC} = (M_A + M_C) / 2 = (0 + 1.8) / 2 \cdot m = 0.90m,$$

$$M_{s,CD} = (M_C + M_D) / 2 = (1.8 + 1.2) / 2 \cdot m = 1.50m, \quad M_{s,DB} = (M_D + M_B) / 2 = (1.2 + 0) / 2 \cdot m = 0.60m,$$

$$M_{s,CB} = (M_C + M_B) / 2 = (1.8 + 0) / 2 \cdot m = 0.90m.$$

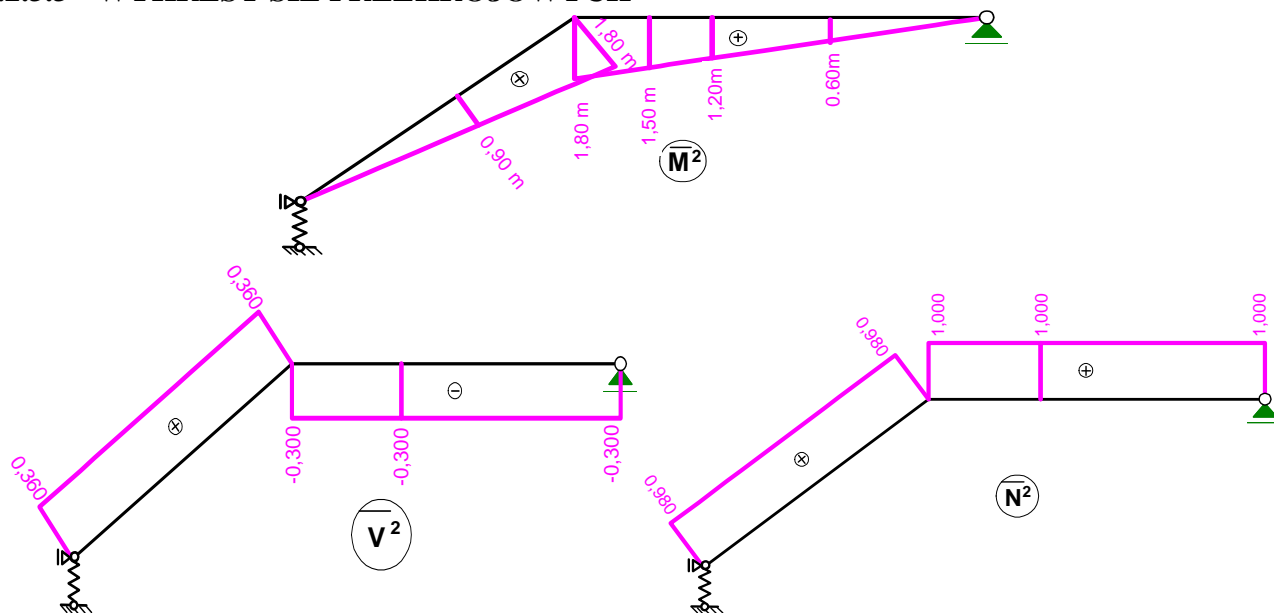
Siła podłużna w więzi sprężystej nr 1:

$$\bar{S}_1^2 = -V_A = 0.30$$

Moment zginający w więzi sprężystej nr 2:

$$\bar{S}_2^2 = M_C = 1.80m$$

3.2.3.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH



3.3 OBLICZENIE WSPÓLCZYNNIKÓW I ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ

3.3.1 OBLICZENIE WSPÓLCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

Współczynniki układu równań obliczamy wykorzystując wzory

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^j}{EI} dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot \bar{S}_s^j}{k_s}, \quad \delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^F}{EI} dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot \bar{S}_s^F}{k_s},$$

Do obliczenia całek w powyższych wzorach zastosowano wzór Simpsona lub Mohra. Ze względu na charakter wykresów momentów zginających całki w powyższych wzorach przedstawiono w postaci sum 3 lub 2 całek odpowiadających przedziałom całkowania, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie odpowiedniego wzoru.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^1 \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^1 \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^1 \cdot \bar{S}_1^1}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^1 \cdot \bar{S}_2^1}{k_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{-0.4 \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-0.4) + \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot ((-0.4) \cdot (-0.4) + 4 \cdot (-0.7) \cdot (-0.7) + (-1) \cdot (-1)) + \\ &\quad + \frac{0.1/m \cdot 0.1/m}{0.5EI/m^3} + \frac{(-0.4) \cdot (-0.4)}{EI/m} = 2.693049 \frac{m}{EI}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^1 \cdot \bar{S}_1^2}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^1 \cdot \bar{S}_2^2}{k_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{-0.4 \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-0.4 \cdot 1.8 + 4 \cdot (-0.7) \cdot 0.9 + (-1) \cdot 0)m^2 + \\ &\quad + \frac{0.1/m \cdot 0.3}{0.5EI/m^3} + \frac{(-0.4) \cdot 1.8m}{EI/m} = -4.192781 \frac{m^2}{EI}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^2 \cdot \bar{S}_1^2}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^2 \cdot \bar{S}_2^2}{k_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1.8m \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{1.8m \cdot 6m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.5EI/m^3} + \frac{1.8 \cdot 1.8m}{EI/m} = 13.485563 \frac{m^3}{EI}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^1 \cdot \bar{S}_1^F}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^1 \cdot \bar{S}_2^F}{k_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot (-0.2) \cdot 25.375kNm + (-0.4) \cdot 39.5kNm) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (-0.4 \cdot 54.5 + 4 \cdot (-0.5) \cdot 58.75 + (-0.6) \cdot 63) \text{kNm}^2 + \\
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (-0.6 \cdot 63 + 4 \cdot (-0.8) \cdot 31.5 + (-1) \cdot 0) \text{kNm}^2 + \frac{0.1/m \cdot (-4.25) \text{kN}}{0.5EI/m^3} + \frac{(-0.4) \cdot 39.5 \text{kNm}}{EI/m} = \\
 & = -155.764461 \frac{\text{kNm}^2}{EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{2F} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^2 \cdot \bar{S}_1^F}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^2 \cdot \bar{S}_2^F}{k_2} = \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.9m \cdot 25.375 \text{kNm} + 1.8m \cdot 39.5 \text{kNm}) + \\
 &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (1.8 \cdot 54.5 + 4 \cdot 1.5 \cdot 58.75 + 1.2 \cdot 63) \text{kNm}^3 + \\
 &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{1.2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 63 \text{kNm}^3 + \frac{0.3 \cdot (-4.25) \text{kN}}{0.5EI/m^3} + \frac{1.8 \cdot 39.5 \text{kNm}}{EI/m} = 402.787409 \frac{\text{kNm}^3}{EI}
 \end{aligned}$$

3.3.2 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\begin{aligned}
 2.693049 \frac{m}{EI} \cdot X_1^F - 4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_2^F - 155.764461 \frac{\text{kNm}^2}{EI} &= 0, \\
 -4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_1^F + 13.485563 \frac{m^3}{EI} \cdot X_2^F + 402.787409 \frac{\text{kNm}^3}{EI} &= 0 \\
 X_1^F &= 21.975393 \text{kNm}, \quad X_2^F = -23.035701 \text{kN}.
 \end{aligned}$$

3.4 OBLICZENIE WARTOŚCI „RZECZYWISTYCH” REAKCJI I SIŁ PRZEKROJOWYCH

$$\begin{aligned}
 R_r^F &= \bar{R}_r^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_r^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_r^F, & M_\alpha^F &= \bar{M}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_\alpha^F, \\
 N_\alpha^F &= \bar{N}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_\alpha^F, & V_\alpha^F &= \bar{V}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_\alpha^F, \\
 S_\alpha^F &= \bar{S}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{S}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{S}_\alpha^F.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_A^F &= \bar{H}_A^1 \cdot X_1 + \bar{H}_A^2 \cdot X_2 + \bar{H}_A^F = 0 \cdot 21.975393 \text{kNm} + (-1) \cdot (-23.035701 \text{kN}) - 15 \text{kN} = 8.036 \text{kN} \\
 V_A^F &= \bar{V}_A^1 \cdot X_1 + \bar{V}_A^2 \cdot X_2 + \bar{V}_A^F = -0.1/m \cdot 21.975393 \text{kNm} + (-0.3) \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 4.25 \text{kN} = 8.963 \text{kN} \\
 V_B^F &= \bar{V}_B^1 \cdot X_1 + \bar{V}_B^2 \cdot X_2 + \bar{V}_B^F = 0.1/m \cdot 21.975393 \text{kNm} + 0.3 \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 15.75 \text{kN} = 11.037 \text{kN} \\
 M_E^F &= \bar{M}_E^1 \cdot X_1 + \bar{M}_E^2 \cdot X_2 + \bar{M}_E^F = \\
 &= -0.2 \cdot 21.975393 \text{kNm} + 0.9m \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 25.375 \text{kNm} = 0.2478 \text{kNm} \\
 M_{CA}^F &= \bar{M}_{CA}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{CA}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{CA}^F = \\
 &= -0.4 \cdot 21.975393 \text{kNm} + 1.8m \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 39.5 \text{kNm} = -10.7544 \text{kNm} \\
 M_{CD}^F &= \bar{M}_{CD}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{CD}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{CD}^F = \\
 &= -0.4 \cdot 21.975393 \text{kNm} + 1.8m \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 54.5 \text{kNm} = 4.2456 \text{kNm} \\
 M_{DC}^F &= \bar{M}_{DC}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{DC}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{DC}^F = \\
 &= -0.4 \cdot 21.975393 \text{kNm} + 1.2m \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 63 \text{kNm} = 22.1719 \text{kNm} \\
 M_{DB}^F &= M_{DC}^F = 22.1719 \text{kNm} \\
 M_{BD}^F &= \bar{M}_{BD}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{BD}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{BD}^F = -1 \cdot 21.975393 \text{kNm} + 0 \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 0 = -21.9754 \text{kNm} \\
 V_{AC}^F &= \bar{V}_{AC}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{AC}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{AC}^F = -\frac{0.08}{m} \cdot 21.975393 \text{kNm} + 0.36 \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 12.4 \text{kN} = 2.349 \text{kN} \\
 V_{CA}^F &= \bar{V}_{CA}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{CA}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{CA}^F = -0.08/m \cdot 21.975393 \text{kNm} + 0.36 \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 3.4 \text{kN} = -6.651 \text{kN} \\
 V_{CD}^F &= \bar{V}_{CD}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{CD}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{CD}^F = -\frac{0.1}{m} \cdot 21.975393 \text{kNm} + (-0.3) \cdot (-23.035701 \text{kN}) + 4.25 \text{kN} = 8.963 \text{kN} \\
 V_{DC}^F &= V_{CD}^F = 8.963 \text{kN}
 \end{aligned}$$

$$V_{DB}^F = \bar{V}_{DB}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{DB}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{DB}^F = -0.1/m \cdot 21.975393kNm + (-0.3) \cdot (-23.035701kN) - 15.75kN = -11.037kN$$

$$V_{BD}^F = V_{DB}^F = -11.037kN$$

$$N_{AC}^F = \bar{N}_{AC}^1 \cdot X_1 + \bar{N}_{AC}^2 \cdot X_2 + \bar{N}_{AC}^F = -0.06/m \cdot 21.975393kNm + 0.98 \cdot (-23.035701kN) + 9.45kN = -11.807kN$$

$$N_{CA}^F = \bar{N}_{CA}^1 \cdot X_1 + \bar{N}_{CA}^2 \cdot X_2 + \bar{N}_{CA}^F = -\frac{0.06}{m} \cdot 21.975393kNm + 0.98 \cdot (-23.035701kN) - 2.55kN = -23.807kN$$

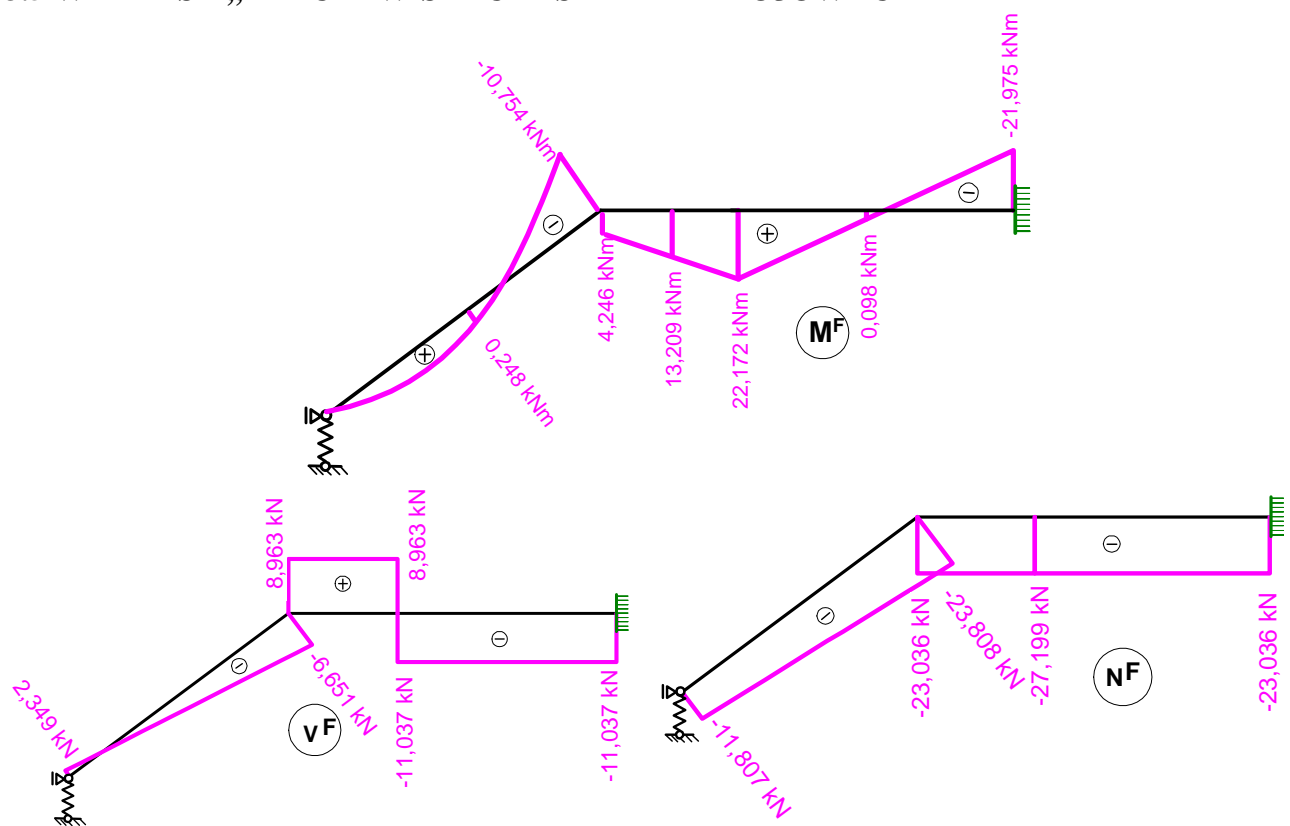
$$N_{CD}^F = \bar{N}_{CD}^1 \cdot X_1 + \bar{N}_{CD}^2 \cdot X_2 + \bar{N}_{CD}^F = 0 \cdot 21.975393kNm + 1 \cdot (-23.035701kN) + 0 = -23.036kN$$

$$N_{DC}^F = N_{CD}^F = N_{DB}^F = N_{BD}^F = -23.036kN$$

$$S_1^F = \bar{S}_1^1 \cdot X_1 + \bar{S}_1^2 \cdot X_2 + \bar{S}_1^F = 0.1/m \cdot 21.975393kNm + 0.3 \cdot (-23.035701kN) - 4.25kN = -8.9632kN$$

$$S_2^F = \bar{S}_2^1 \cdot X_1 + \bar{S}_2^2 \cdot X_2 + \bar{S}_2^F = -0.4 \cdot 21.975393kNm + 1.8m \cdot (-23.035701kN) + 39.5kN = -10.7544kNm$$

3.5 WYKRESY „RZECZYWISTYCH” SIŁ PRZEKROJOWYCH



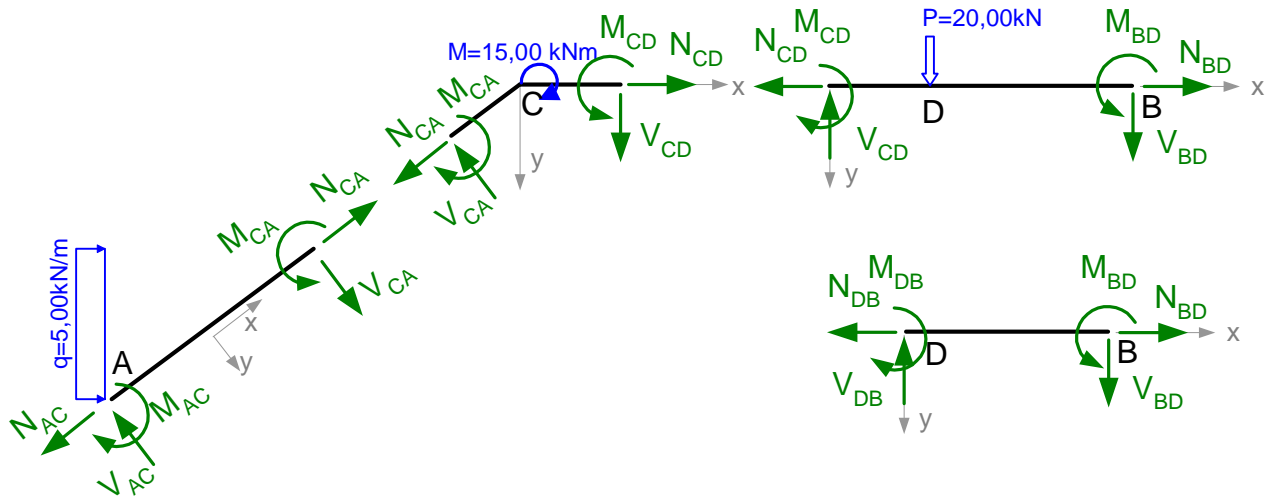
Rzeczywiste wartości sił przekrojowych można też policzyć rozwiązując układ podstawowy od działającego równocześnie obciążenia danego i znanych już sił hiperstatycznych. Wyniki obliczeń musiałyby być identyczny (w granicach dokładności rachunkowej) jak przedstawione powyżej.

3.6 KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA.

Kontrola poprawności rozwiązania polega na sprawdzeniu czy otrzymane rozwiązanie jest statycznie i kinematycznie dopuszczalne, czyli czy siły spełniają równania równowagi a przemieszczenia są zgodne z warunkami podparcia i ciągłości.

3.6.1 KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Dokonując kontroli równań równowagi należy pamiętać, że kontroli podlegają tylko te wartości, które występują w obliczeniach kontrolnych. Zaleca się, więc aby do sprawdzenia równań równowagi, podzielić układ na pręty i węzły i dla każdego tak wydzielonego elementu napisać 3 równania równowagi. W tym przypadku kontroli podlegają wszystkie wartości brzegowe sił przekrojowych. Na rysunku poniżej pokazano elementy, dla których sprawdzimy równania równowagi.



Dla pręta AC

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{AC} + N_{CA} + q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = -(-11.807) + (-23.808) + 5 \cdot 3 \cdot 0.8 \approx 0, \\ \sum Y &= -V_{AC} + V_{CA} + q \cdot 3m \cdot \sin \alpha = -2.349 + (-6.651) + 5 \cdot 3 \cdot 0.6 \approx 0, \\ \sum M_A &= M_{AC} - M_{CA} + V_{CA} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1.5m = 0 - (-10.754) + (-6.651) \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 1.5 \approx 0 \end{aligned}$$

Dla węzła C

$$\begin{aligned} \sum X &= N_{CD} - N_{CA} \cdot \cos \alpha - V_{CA} \cdot \sin \alpha = -23.036 - (-23.808) \cdot 0.8 - (-6.651) \cdot 0.6 \approx 0, \\ \sum Y &= V_{CD} + N_{CA} \cdot \sin \alpha - V_{CA} \cdot \cos \alpha = 8.963 + (-23.808) \cdot 0.6 - (-6.651) \cdot 0.8 \approx 0, \\ \sum M_c &= M_{CA} - M_{CD} + M = -10.754 - 4.246 + 15 \approx 0 \end{aligned}$$

Dla pręta CB

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{CD} + N_{BD} = -(-23.036) - 23.036 = 0, \\ \sum Y &= -V_{CD} + V_{BD} + P = -8.963 + (-11.037) + 20 = 0, \\ \sum M_C &= M_{CD} - M_{BD} + V_{BD} \cdot 6m + P \cdot 2m = 4.246 - (-21.975) + (-11.037) \cdot 6 + 20 \cdot 2 \approx 0 \end{aligned}$$

Dla pręta DB

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{DB} + N_{BD} = -(-23.036) - 23.036 = 0, \\ \sum Y &= -V_{DB} + V_{BD} = -(-11.037) + (-11.037) = 0, \\ \sum M_D &= M_{DB} - M_{BD} + V_{BD} \cdot 4m = 22.172 - (-21.975) + (-11.037) \cdot 4 \approx 0. \end{aligned}$$

3.6.2 KONTROLA KINEMATYCZNEJ ZGODNOŚCI PRZEMIESZCZEŃ.

Kontrola zgodności przemieszczeń polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w tylu miejscach ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności. Można tego dokonać postępując, w fazie początkowej, analogicznie jak buduje się układ równań kanonicznych, to jest: przyjmując układ podstawowy metody sił i sporządzając wykresy momentów zginających od jednostkowych wartości sił hiperstatycznych a następnie policzyć

przemieszczenia w układzie danym ze wzoru $\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^\alpha \cdot S_s^F}{k_s}$ w miejscach, w

których przecięto (usunięto) więzi tworząc układ podstawowy. Wartości tych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu i połączenia jego elementów. Wystarczające jest jednak sprawdzenie przemieszczeń w miejscach sił hiperstatycznych przyjętych do rozwiązania układu. W tym przypadku wykresy momentów zginających od jednostkowych wartości sił hiperstatycznych są już określone i wystarczy policzyć przemieszczenia Δ_{1F} i Δ_{2F} .

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int \bar{M}^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int \bar{M}^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int \bar{M}^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^1 \cdot S_1^F}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^1 \cdot S_2^F}{k_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot (-0.2) \cdot 0.248 \text{ kNm} + (-0.4) \cdot (-10.754) \text{ kNm}) + \end{aligned}$$

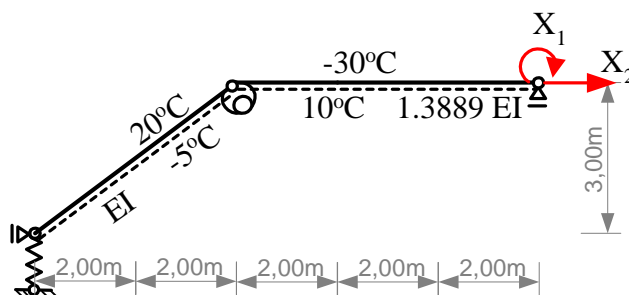
$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2m}{6} \cdot (-0.4 \cdot 4.246 + 4 \cdot (-0.5) \cdot 13.209 + (-0.6) \cdot 22.172) kNm + \\
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot (-0.6 \cdot 22.172 + 4 \cdot (-0.8) \cdot 0.098 + (-1) \cdot (-21.975)) kNm + \\
 & + \frac{0.1/m \cdot (-8.963 kN)}{0.5 \cdot EI / m^3} + \frac{-0.4 \cdot (-10.754 kNm)}{EI / m} \approx 0 \\
 \Delta_{2F} = & \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{\bar{S}_1^2 \cdot S_1^F}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^2 \cdot S_2^F}{k_2} = \\
 = & \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.9m \cdot 0.248 kNm + 1.8m \cdot (-10.754) kNm) + \\
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2m}{6} \cdot (1.8 \cdot 4.246 + 4 \cdot 1.5 \cdot 13.209 + 1.2 \cdot 22.172) kNm^2 + \\
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot (1.2 \cdot 22.172 + 4 \cdot 0.6 \cdot 0.098 + 0 \cdot (-21.975)) kNm^2 + \\
 & + \frac{0.3 \cdot (-8.963 kN)}{0.5 \cdot EI / m^3} + \frac{1.8m \cdot (-10.754 kNm)}{EI / m} \approx 0.
 \end{aligned}$$

4 ROZWIĄZANIE RAMY OD ZMIAN TEMPERATURY

4.1 UKŁAD PODSTAWOWY I ODPOWIADAJĄCY MU UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH

4.1.1 UKŁAD PODSTAWOWY

Przyjęto układ podstawowy taki jak dla rozwiązania od obciążeń siłami, aby móc wykorzystać w obliczeniach wykonane już rozwiązania od obciążeń hiperstatycznych



4.1.2 UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} \cdot X_1^T + \delta_{12} \cdot X_2^T + \delta_{1T} &= \Delta_{1rz}^T = 0, \\
 \delta_{21} \cdot X_1^T + \delta_{22} \cdot X_2^T + \delta_{2T} &= \Delta_{2rz}^T = 0.
 \end{aligned}$$

4.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO

4.2.1 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ZMIAN TEMPERATURY

Ponieważ układ podstawowy jest układem statycznie wyznaczalnym zmiany temperatury nie wywołują w nim żadnych sił

$$\bar{M}^T = \bar{N}^T = \bar{V}^T = \bar{S}_1^T = \bar{S}_2^T = 0$$

4.2.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA $X_1 = 1$ I $X_2 = 1$

Ze względu na to, że przyjęto układ podstawowy analogiczny jak dla rozwiązania od obciążenia siłami (różne jest tylko obciążenie) rozwiązania układu podstawowego od obciążenia $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ są identyczne jak w punktach 2.3 i 2.4.

4.3 OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW I ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ

4.3.1 OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

Współczynniki układu równań obliczamy wykorzystując wzory

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^j}{EI} dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot \bar{S}_s^j}{k_s}, \quad \delta_{iT} = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^i} \right)_p.$$

Uwzględniając fakt, że rozwiązania układu podstawowego od obciążenia $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ są identyczne jak w punktach 2.3 i 2.4 współczynniki δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ i δ_{22} mają wartości takie jak obliczono w punkcie 2.5.2. Obliczymy więc tylko współczynniki δ_{1T} i δ_{2T} .

Określenie składników wzorów dla poszczególnych prętów

Dla pręta AC $\Omega_{M^1} = \frac{-0.4m \cdot 5m}{2} = -1m, \quad \Omega_{M^2} = \frac{1.8m \cdot 5m}{2} = 4.5m^2,$

$$\Omega_{N^1} = 0.06 / m \cdot 5m = 0.3, \quad \Omega_{N^2} = 0.98 \cdot 5m = 4.9m,$$

$$\Delta T_w = -5^\circ C, \quad \Delta T_p = 20^\circ C, \quad \Delta T_o = \frac{\Delta T_w + \Delta T_p}{2} = \frac{-5 + 20}{2} = 7.5^\circ C \quad (\text{przekrój symetryczny}),$$

$$h = 0.044 \cdot 5m = 0.22m, \quad \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} = \frac{(-5 - 20)^\circ C}{0.22m} = \frac{-113.636^\circ C}{m},$$

$$\begin{aligned} \delta_{1T(AC)} &= \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^1} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^1} = \\ &= \alpha_T \cdot \left(-113.636^\circ C / m \cdot (-1m) + 7.5^\circ C \cdot 0.3 \right) = 115.886364^\circ C \cdot \alpha_T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2T(AC)} &= \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^2} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^2} = \\ &= \alpha_T \cdot \left(-113.636^\circ C / m \cdot 4.5m^2 + 7.5^\circ C \cdot 4.9m \right) = -474.613636^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T \end{aligned}$$

Dla pręta CB $\Omega_{M^1} = \frac{-(0.4+1) \cdot 6m}{2} = -4.2m, \quad \Omega_{M^2} = \frac{1.8m \cdot 6m}{2} = 5.4m^2,$
 $\Omega_{N^1} = 0, \quad \Omega_{N^2} = 1 \cdot 6m = 6m.$

$$\Delta T_w = 10^\circ C, \quad \Delta T_p = -30^\circ C, \quad \Delta T_o = \frac{10 - 30}{2} = -10^\circ C \quad (\text{przekrój symetryczny}),$$

$$h = 0.04 \cdot 6m = 0.24m, \quad \frac{(\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} = \frac{(10 - (-30))^\circ C}{0.24m} = \frac{166.6667^\circ C}{m},$$

$$\delta_{1T(CB)} = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^1} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^1} = \alpha_T \cdot \left(166.6667^\circ C / m \cdot (-4.2m) + 0 \right) = -700^\circ C \cdot \alpha_T,$$

$$\begin{aligned} \delta_{2T(CB)} &= \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^2} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^2} = \\ &= \alpha_T \cdot \left(-113.636^\circ C / m \cdot 5.4m^2 + 7.5^\circ C \cdot 6m \right) = 840^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m \end{aligned}$$

Szukane współczynniki:

$$\delta_{1T} = (115.8864 - 700)^\circ C \cdot \alpha_T = -584.113636^\circ C \cdot \alpha_T,$$

$$\delta_{2T} = (-474.613636 + 840)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m = 365.386363^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m.$$

4.3.2 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\begin{aligned} 2.693049 \frac{m}{EI} \cdot X_1^T - 4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_2^T - 584.1136^\circ C \cdot \alpha_T &= 0 \\ -4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_1^T + 13.485563 \frac{m^3}{EI} \cdot X_2^T + 365.386363^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m &= 0 \\ X_1^T = 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m}, \quad X_2^T = 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m^2}. \end{aligned}$$

4.4 OBLICZENIE WARTOŚCI „RZECZYWISTYCH” REAKCJI I SIŁ PRZEKROJOWYCH

$$R_r^T = \bar{R}_r^1 \cdot X_1^T + \bar{R}_r^2 \cdot X_2^T + \bar{R}_r^T, \quad M_\alpha^T = \bar{M}_\alpha^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_\alpha^2 \cdot X_2^T + \bar{M}_\alpha^T,$$

$$N_\alpha^T = \bar{N}_\alpha^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_\alpha^2 \cdot X_2^T + \bar{N}_\alpha^T, \quad V_\alpha^T = \bar{V}_\alpha^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_\alpha^2 \cdot X_2^T + \bar{V}_\alpha^T$$

$$S_\alpha^T = \bar{S}_\alpha^1 \cdot X_1^T + \bar{S}_\alpha^2 \cdot X_2^T + \bar{S}_\alpha^T$$

$$H_A^T = \bar{H}_A^1 \cdot X_1^T + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^T + \bar{H}_A^T = 0 + (-1) \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = -78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$V_A^T = \bar{V}_A^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^T + \bar{V}_A^T =$$

$$= -0.1 / m \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + (-0.3) \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = -57.3186^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$V_B^T = \bar{V}_B^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_B^2 \cdot X_2^T + \bar{V}_B^T =$$

$$= 0.1 / m \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 0.3 \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 57.3186^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$M_{CA}^T = \bar{M}_{CA}^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_{CA}^2 \cdot X_2^T + \bar{M}_{CA}^T =$$

$$= -0.4 \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 1.8m \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 5.2865^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m$$

$$M_{CB}^T = M_{CA}^T$$

$$M_{BC}^T = \bar{M}_{BC}^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_{BC}^2 \cdot X_2^T + \bar{M}_{BC}^T =$$

$$= -1 \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 0 \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = -338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m$$

$$V_{AC}^T = \bar{V}_{AC}^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_{AC}^2 \cdot X_2^T + \bar{V}_{AC}^T =$$

$$= -0.08 / m \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 0.36 \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 1.0573^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$V_{CA}^T = V_{AC}^T$$

$$V_{CB}^T = \bar{V}_{CB}^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_{CB}^2 \cdot X_2^T + \bar{V}_{CB}^T =$$

$$= -0.1 / m \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + (-0.3) \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = -57.3186^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$V_{BC}^T = V_{CB}^T$$

$$N_{AC}^T = \bar{N}_{AC}^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_{AC}^2 \cdot X_2^T + \bar{N}_{AC}^T =$$

$$= -0.06 / m \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 0.98 \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 96.9408^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$N_{CA}^T = N_{AC}^T$$

$$N_{CB}^T = \bar{N}_{CB}^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_{CB}^2 \cdot X_2^T + \bar{N}_{CB}^T = 0 + 1 \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$N_{BC}^T = N_{CB}^T$$

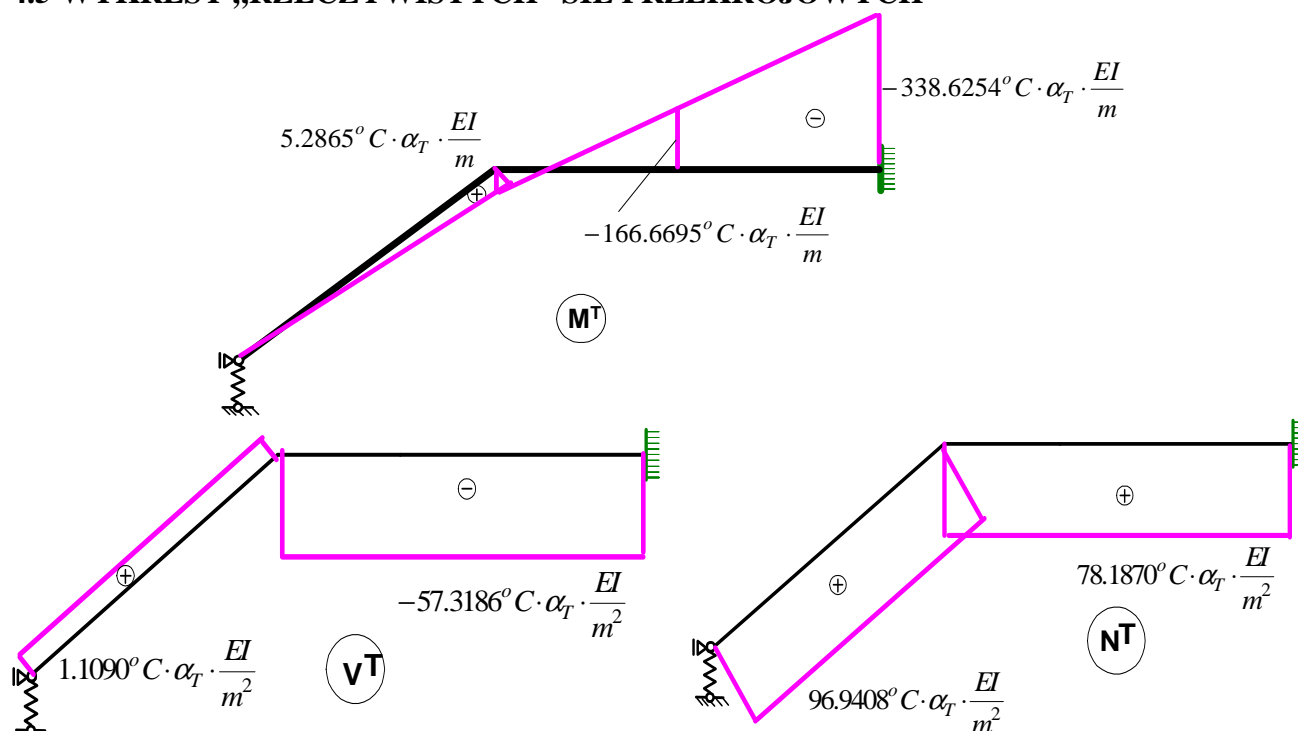
$$S_1^T = \bar{S}_1^1 \cdot X_1^T + \bar{S}_1^2 \cdot X_2^T + \bar{S}_1^T =$$

$$= 0.1 / m \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 0.3 \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 57.3186^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2$$

$$S_2^T = \bar{S}_2^1 \cdot X_1^T + \bar{S}_2^2 \cdot X_2^T + \bar{S}_2^T =$$

$$= -0.4 \cdot 338.6254^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + 1.8m \cdot 78.1870^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2 + 0 = 5.2865^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m$$

4.5 WYKRESY „RZECZYWISTYCH” SIŁ PRZEKROJOWYCH

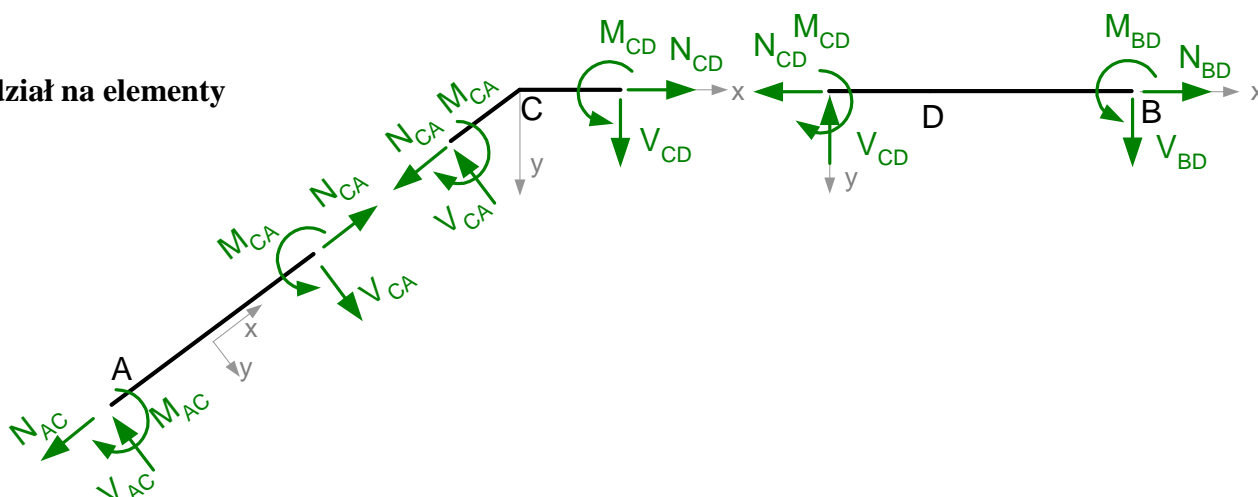


Rzeczywiste wartości sił przekrojowych mogą też być wyznaczone w wyniku rozwiązania układu podstawowego od działających równocześnie znanych już sił hiperstatycznych. Wyniki obliczeń musiałyby być identyczny (w granicach dokładności rachunkowej) jak przedstawione powyżej.

4.6 KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA.

4.6.1 KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Podział na elementy



Równania równowagi

Dla pręta AC

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_{AC} + N_{CA} = -96.9408 + 96.9408 = 0, \\ \sum Y &= -V_{AC} + V_{CA} = -1.0573 + 1.0573 = 0, \\ \sum M_A &= M_{AC} - M_{CA} + V_{CA} \cdot 5m = 0 - 5.2865 + 1.0573 \cdot 5 = 0\end{aligned}$$

Dla węzła C

$$\begin{aligned}\sum X &= N_{CB} - N_{CA} \cdot \cos \alpha - V_{CA} \cdot \sin \alpha = 78.1870 - 96.9408 \cdot 0.8 - 1.0573 \cdot 0.6 \approx 0, \\ \sum Y &= V_{CB} + N_{CA} \cdot \sin \alpha - V_{CA} \cdot \cos \alpha = -57.3186 + 96.9408 \cdot 0.6 - 1.0573 \cdot 0.8 \approx 0, \\ \sum M_C &= M_{CA} - M_{CD} = 5.2865 - 5.2865 = 0\end{aligned}$$

Dla pręta CB

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_{CB} + N_{BC} = -78.1870 + 78.1870 = 0, \\ \sum Y &= -V_{CB} + V_{BC} = -57.3186 + 57.3186 = 0, \\ \sum M_C &= M_{CB} - M_{BC} + V_{BC} \cdot 6m = 5.2865 - (-338.6254) + (-57.3186) \cdot 6 \approx 0\end{aligned}$$

4.6.2 KONTROLA KINEMATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Wykorzystujemy tu wzór na wyznaczanie przemieszczeń od zmian temperatury

$$\Delta_{\alpha T} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^\alpha \cdot S_s^T}{k_s} + \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{\bar{M}^\alpha} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{\bar{N}^\alpha} \right)_p$$

Obliczając Δ_{1T} i Δ_{2T} możemy wykorzystać fakt, że suma trzeciego i czwartego członu powyższego wzoru dla Δ_{1T} wynosi δ_{1T} a suma trzeciego i czwartego członu powyższego wzoru dla Δ_{2T} wynosi δ_{2T} , które to wielkości zostały już policzone (p.3.4.2)

$$\begin{aligned}\Delta_{1T} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{S_s^1 \cdot S_s^T}{k_s} + \delta_{1T} = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot M^T \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^1 \cdot M^T \cdot dx + \\ &+ \frac{\bar{S}_1^1 \cdot S_1^T}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^1 \cdot S_2^T}{k_2} + \delta_{1T} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5.2865^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-0.4) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot (-0.4 \cdot 5.2865 + 4 \cdot (-0.7) \cdot (-166.6695) + (-1) \cdot (-338.6254)) \cdot \frac{^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T}{m} + \\ &+ \frac{0.1/m \cdot 57.3186^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m^2}{0.5 \cdot EI / m^3} + \frac{-0.4 \cdot 5.2865^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m}{1 \cdot EI / m} - 584.1136^\circ C \cdot \alpha_T \approx 0, \\ \Delta_{2T} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{S_s^2 \cdot S_s^T}{k_s} + \delta_{2T} = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot M^T \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^2 \cdot M^T \cdot dx +\end{aligned}$$

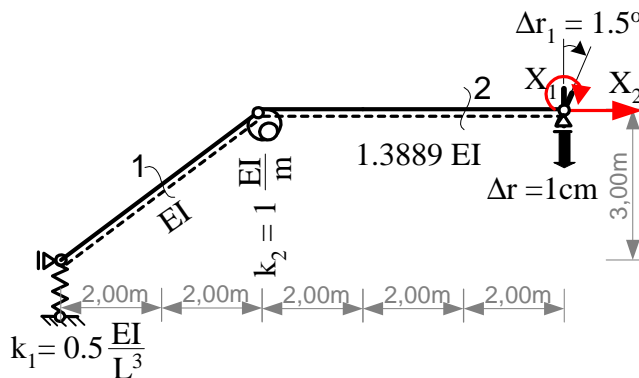
$$\begin{aligned}
 & + \frac{\bar{S}_1^2 \cdot S_1^T}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^2 \cdot S_2^T}{k_2} + \delta_{2T} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5.2865^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \\
 & + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot (1.8m \cdot 5.2865 + 4 \cdot 0.9m \cdot 166.6695 + 0) \frac{^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T}{m} + \\
 & + \frac{0.3 \cdot 57.3186^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m^2}{0.5 \cdot EI / m^3} + \frac{1.8m \cdot 5.2865^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m}{1 \cdot EI / m} + 365.3863^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T \approx 0.
 \end{aligned}$$

5 ROZWIĄZANIE RAMY OD PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR I BŁĘDÓW MONTAŻU

5.1 UKŁAD PODSTAWOWY I ODPOWIADAJĄCY MU UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH

5.1.1 UKŁAD PODSTAWOWY

Przyjęto układ podstawowy taki jak dla rozwiązania od obciążeń siłami, aby móc wykorzystać w obliczeniach wykonane już rozwiązania od obciążeń hiperstatycznych



5.1.2 UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH

$$\delta_{11} \cdot X_1^\Delta + \delta_{12} \cdot X_2^\Delta + \delta_{1\Delta} = \Delta_{1rz}^\Delta = 1.5^\circ \cdot \pi / 180^\circ = 0.02618,$$

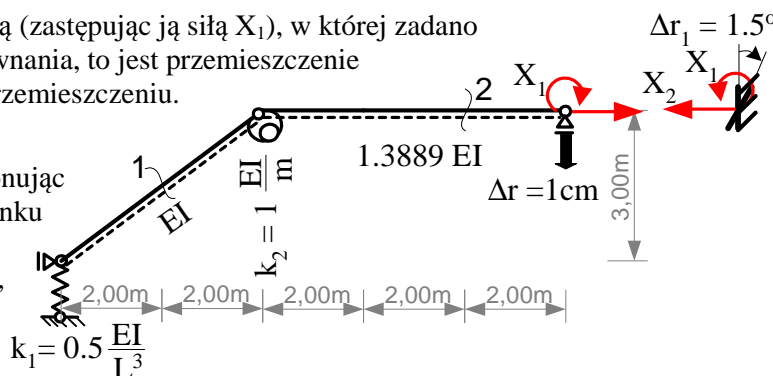
$$\delta_{21} \cdot X_1^\Delta + \delta_{22} \cdot X_2^\Delta + \delta_{2\Delta} = \Delta_{2rz}^\Delta = 0$$

UWAGA: Ponieważ usunięto więź podporową (zastępując ją siłą X_1), w której zadano przemieszczenie, prawa strona pierwszego równania, to jest przemieszczenie rzeczywiste w tym miejscu równe jest temu przemieszczeniu.

Jeśli chciałoby się mieć $\Delta_{1rz}^\Delta = 0$

to należałoby przyjąć układ podstawowy dokonując przecięcia odpowiednich więzi tak jak na rysunku obok. W tym przypadku równanie pierwsze opisywałoby zmianę kąta między przekrojami, w których przyłożono siły X_1 .

Dalsze obliczenia będą wykonywane dla układu przyjętego w punkcie 5.1.1.



5.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO

5.2.1 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR I BŁĘDÓW MONTAŻU

Ponieważ układ podstawowy jest układem statycznie wyznaczalnym przemieszczenia podpór i błędy montażu nie wywołują w nim żadnych sił

$$\bar{M}^\Delta = \bar{N}^\Delta = \bar{V}^\Delta = \bar{S}_1^\Delta = \bar{S}_2^\Delta = 0$$

5.2.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA $X_1 = 1$ I $X_2 = 1$

Ze względu na to, że przyjęto układ podstawowy analogiczny jak dla rozwiązania od obciążenia siłami (różne jest tylko obciążenie) rozwiązania układu podstawowego od obciążenia $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ są identyczne jak w punktach 2.3 i 2.4.

5.3 OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW I ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ

5.3.1 OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

Współczynniki układu równań obliczamy wykorzystując wzory

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^j}{EI} dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot \bar{S}_s^j}{k_s}, \quad \delta_{i\Delta} = \sum_m \bar{M}_m^i \cdot \Delta \varphi_m + \sum_v \bar{V}_v^i \cdot \Delta h_v + \sum_n \bar{N}_n^i \cdot \Delta L_n - \sum_r \bar{R}_r^i \cdot \Delta r_r.$$

Uwzględniając fakt, że rozwiązania układu podstawowego od obciążenia $X_1 = 1$ i $X_2 = 1$ są identyczne jak w punktach 2.3 i 2.4 współczynniki δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ i δ_{22} mają wartości takie jak obliczono w punkcie 2.5.2. Obliczymy więc tylko współczynniki $\delta_{1\Delta}$ i $\delta_{2\Delta}$.

Błędy montażu wystąpiły w dwóch przekrojach, co symbolicznie zilustrowano na rysunku obok.

Błędy montażu znakuje się analogicznie jak odpowiednie siły przekrojowe tzn. zmiany kąta jak momenty zginające, przesunięcia poprzeczne jak siły tnące a odkształcenia podłużne jak siły osiowe.

Odkształceniom podłużnym ΔL_1 i ΔL_2 przypisano znaki zgodnie z zasadą: wydłużenie i siła osiowa rozciągająca „+”, skrócenie i siła osiowa ściskająca „-”.

Symbole **odkształceń kątowych** ilustrują zmiany kąta między przekrojami równoległymi, co symbolicznie na osi pręta i dla elementu odkształconego przedstawiono na rysunku obok.

Jeśli tej zmianie kąta towarzyszy wydłużenie włókien wyróżnionych (symbol lewy) to takiej zmianie kąta przypisujemy znak „+” w przeciwnym przypadku (symbol prawy) znak „-”.

Wynika stąd, że odkształceniu kątowemu w przekroju „1” należy przypisać znak „-”, a odkształceniu kątowemu w przekroju „2” znak „+”.

Symbole **odkształceń postaciowych** ilustrują wzajemne poprzeczne przesunięcie osi pręta, co symbolicznie na osi pręta i dla elementu odkształconego przedstawiono na rysunku obok

Symbol lewy oznacza deformację Δh o zwrocie zgodnym z dodatnimi zwrotami siły poprzecznej (znak „+”) a symbol prawy oznacza deformację Δh o zwrocie przeciwnym do dodatnich zwrotów siły poprzecznej (znak „-”).

Wynika stąd, że odkształceniu postaciowemu w przekroju „1” należy przypisać znak „-”,

a odkształceniu postaciowemu w przekroju „2” znak „+”.

Wartości błędów montażu są, więc następujące:

$$\Delta\varphi_1 = -1.5^\circ = -\frac{1.5^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = -0.02618,$$

$$\Delta h_1 = -1.2\text{cm} = -0.012\text{m},$$

$$\Delta L_1 = -1.5\text{cm} = -0.015\text{m},$$

$$\Delta\varphi_2 = 1^\circ = \frac{1^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 0.0175,$$

$$\Delta h_2 = 1.4\text{cm} = 0.014\text{m},$$

$$\Delta L_2 = 1\text{cm} = 0.01\text{m}$$

Siły przekrojowe od obciążeń jednostkowych, w miejscach błędów, mają wartości

$$\bar{M}_1^1 = -0.2, \quad \bar{M}_2^1 = -0.8, \quad \bar{V}_1^1 = -0.08/m, \quad \bar{V}_2^1 = -0.1/m, \quad \bar{N}_1^1 = 0.06/m, \quad \bar{N}_2^1 = 0,$$

$$\bar{M}_1^2 = 0.9\text{m}, \quad \bar{M}_2^2 = 0.6\text{m}, \quad \bar{V}_1^2 = 0.36, \quad \bar{V}_2^2 = -0.3, \quad \bar{N}_1^2 = 0.98, \quad \bar{N}_2^2 = 1,$$

Przemieszczenia podpór wystąpiły w kierunku reakcji V_B i kąt obrotu podpory B.

Wynoszą one $\Delta_{V_B} = 1\text{cm} = 0.01\text{m}$, $\Delta_{R_{B\varphi}} = 1.5^\circ = 1.5 \cdot \pi / 180 = 0.02618$.

Zwroty reakcji V_B w rozwiązaniach od obciążeń jednostkowych przyjęto przeciwnie do zwrotu przemieszczenia podpory, więc do obliczania przemieszczeń zmieniamy znaki tej reakcji

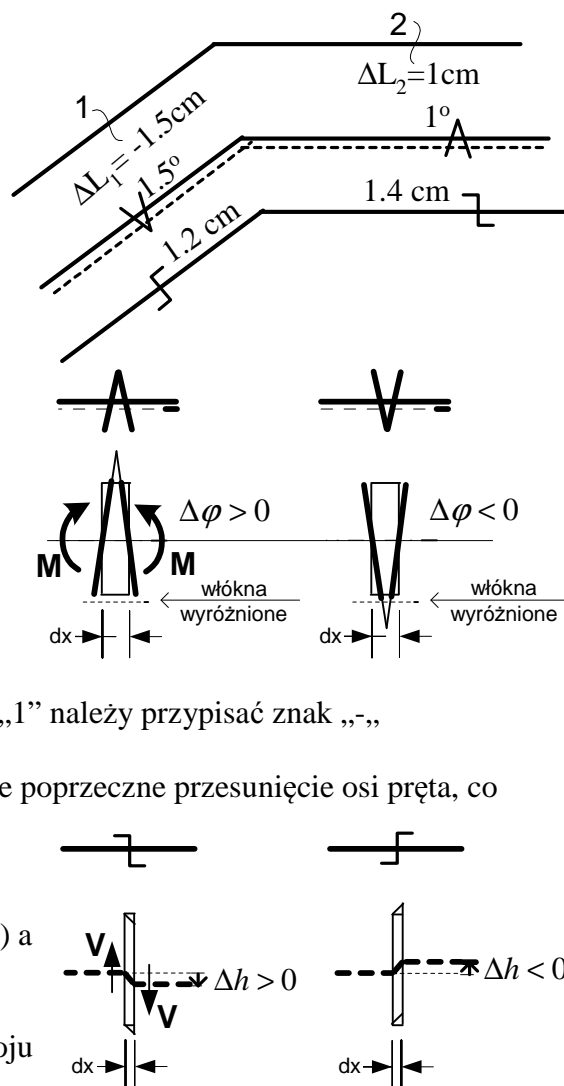
$$\bar{V}_1^1 = -0.1/m, \quad \bar{V}_B^2 = -0.3.$$

Przyjmując układ podstawowy usunięto więź rotacyjną podpory B, więc $\bar{R}_{B\varphi}^1 = \bar{R}_{B\varphi}^2 = 0$.

(Gdyby przyjąć układ podstawowy przytoczony w punkcie 4.1.2 byłoby $\bar{R}_{B\varphi}^1 = 1$, $\bar{R}_{B\varphi}^2 = 0$).

Szukane współczynniki:

$$\delta_{1\Delta} = -0.2 \cdot (-0.02618) - 0.8 \cdot 0.0175 - 0.08/m \cdot (-0.012\text{m}) - 0.1/m \cdot 0.014\text{m} + 0.06/m \cdot (-0.015\text{m}) + 0 + (-0.1/m) \cdot 0.01\text{m} - 0 = -0.009104,$$



$$\delta_{2\Delta} = 0.9m \cdot (-0.02618) + 0.6m \cdot 0.0175 + 0.36 \cdot (-0.012m) - 0.3 \cdot 0.014m + 0.98 \cdot (-0.015m) + 1 \cdot 0.01m + (-0.3) \cdot 0.01m - 0 = -0.023282m.$$

(Gdyby przyjęc układ podstawowy przytoczony w punkcie 4.1.2 byłoby

$$\delta_{1\Delta} = -0.2 \cdot (-0.02618) - 0.8 \cdot 0.0175 - 0.08/m \cdot (-0.012m) - 0.1/m \cdot 0.014m + 0.06/m \cdot (-0.015m) + 0 + (-0.1/m) \cdot 0.01m - 1 \cdot 0.02618 = -0.035284).$$

5.3.2 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\text{Równanie pierwsze} \quad 2.693049 \frac{m}{EI} \cdot X_1^\Delta - 4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_2^\Delta - 0.009104 = 0.02618$$

$$\text{po przekształceniu ma postać} \quad 2.693049 \frac{m}{EI} \cdot X_1^\Delta - 4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_2^\Delta - 0.035284 = 0$$

$$\text{Równanie drugie} \quad -4.192781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_1^\Delta + 13.485563 \frac{m^3}{EI} \cdot X_2^\Delta - 0.023282m = 0$$

$$\text{Rozwiązanie układu równań} \quad X_1^\Delta = 0.030603EI/m, \quad X_2^\Delta = 0.011241EI/m^2.$$

5.4 OBLICZENIE WARTOŚCI „RZECZYWISTYCH” REAKCJI I SIŁ PRZEKROJOWYCH

$$R_r^\Delta = \bar{R}_r^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{R}_r^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{R}_r^\Delta, \quad M_\alpha^\Delta = \bar{M}_\alpha^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{M}_\alpha^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{M}_\alpha^\Delta,$$

$$N_\alpha^\Delta = \bar{N}_\alpha^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{N}_\alpha^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{N}_\alpha^\Delta, \quad V_\alpha^\Delta = \bar{V}_\alpha^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_\alpha^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{V}_\alpha^\Delta$$

$$S_\alpha^\Delta = \bar{S}_\alpha^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{S}_\alpha^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{S}_\alpha^\Delta$$

$$H_A^\Delta = \bar{H}_A^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{H}_A^\Delta = 0 + (-1) \cdot 0.011241EI/m^2 + 0 = -0.011241EI/m^2$$

$$V_A^\Delta = \bar{V}_A^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{V}_A^\Delta = -\frac{0.1}{m} \cdot 0.030603 \frac{EI}{m} + (-0.3) \cdot 0.011241 \frac{EI}{m^2} + 0 = -0.006433 \frac{EI}{m^2}$$

$$V_B^\Delta = \bar{V}_B^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_B^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{V}_B^\Delta = 0.1/m \cdot 0.030603EI/m + 0.3 \cdot 0.011241EI/m^2 + 0 = 0.006433EI/m^2$$

$$M_{CA}^\Delta = \bar{M}_{CA}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{M}_{CA}^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{M}_{CA}^\Delta = -0.4 \cdot 0.030603 \frac{EI}{m} + 1.8m \cdot 0.011241 \frac{EI}{m^2} + 0 = 0.007993 \frac{EI}{m}$$

$$M_{CB}^\Delta = M_{CA}^\Delta$$

$$M_{BC}^\Delta = \bar{M}_{BC}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{M}_{BC}^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{M}_{BC}^\Delta = -1 \cdot 0.030603EI/m + 0 + 0 = -0.030603EI/m$$

$$V_{AC}^\Delta = \bar{V}_{AC}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_{AC}^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{V}_{AC}^\Delta = -\frac{0.08}{m} \cdot 0.030603 \frac{EI}{m} + 0.36 \cdot 0.011241 \frac{EI}{m^2} + 0 = 0.001599 \frac{EI}{m^2}$$

$$V_{CA}^\Delta = V_{AC}^\Delta$$

$$V_{CB}^\Delta = \bar{V}_{CB}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_{CB}^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{V}_{CB}^\Delta = -\frac{0.1}{m} \cdot 0.030603 \frac{EI}{m} + (-0.3) \cdot 0.011241 \frac{EI}{m^2} + 0 = -0.006433 \frac{EI}{m^2}$$

$$V_{BC}^\Delta = V_{CB}^\Delta$$

$$N_{AC}^\Delta = \bar{N}_{AC}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{N}_{AC}^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{N}_{AC}^\Delta = -\frac{0.06}{m} \cdot 0.030603 \frac{EI}{m} + 0.98 \cdot 0.011241 \frac{EI}{m^2} + 0 = 0.01285 \frac{EI}{m^2}$$

$$N_{CA}^\Delta = N_{AC}^\Delta$$

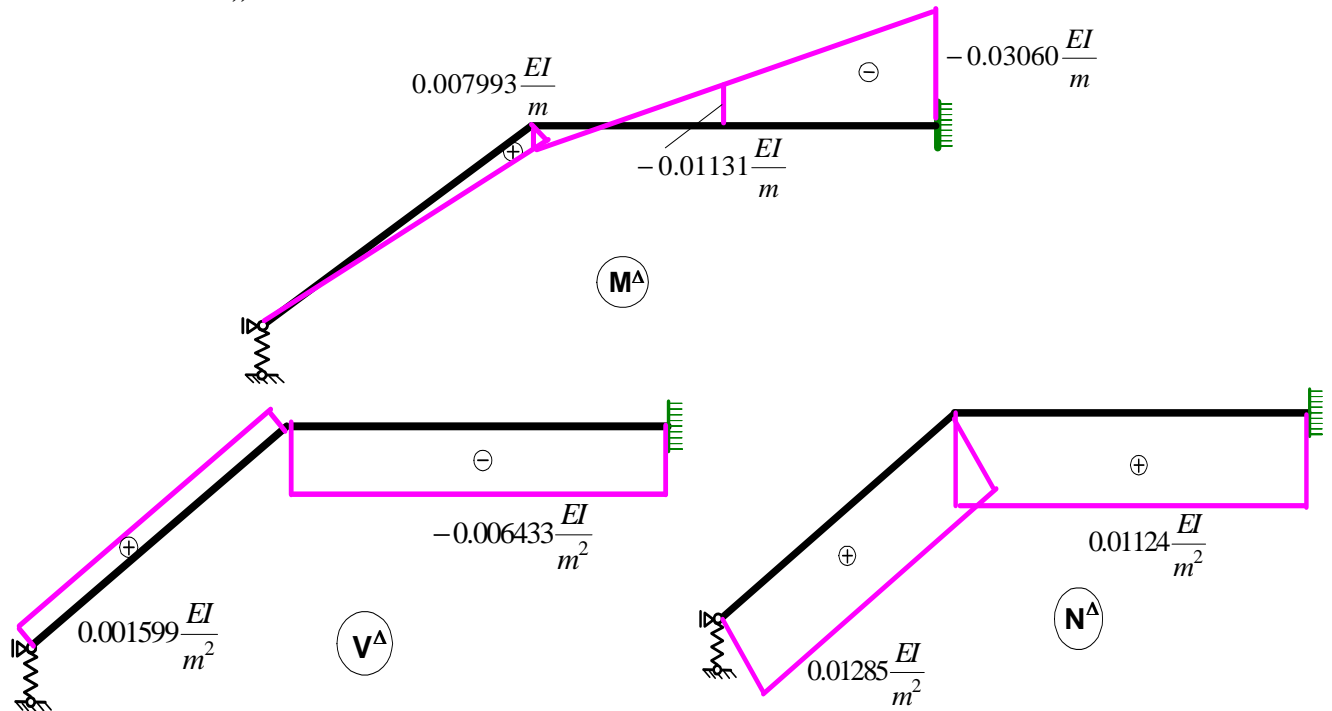
$$N_{CB}^\Delta = \bar{N}_{CB}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{N}_{CB}^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{N}_{CB}^\Delta = 0 + 1 \cdot 0.011241EI/m^2 + 0 = 0.011241EI/m^2$$

$$N_{BC}^\Delta = N_{CB}^\Delta$$

$$S_1^\Delta = \bar{S}_1^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{S}_1^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{S}_1^\Delta = 0.1/m \cdot 0.030603EI/m + 0.3 \cdot 0.011241EI/m^2 + 0 = 0.006433EI/m^2$$

$$S_2^\Delta = \bar{S}_2^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{S}_2^2 \cdot X_2^\Delta + \bar{S}_2^\Delta = -0.4 \cdot 0.030603EI/m + 1.8m \cdot 0.011241EI/m^2 + 0 = 0.007993EI/m$$

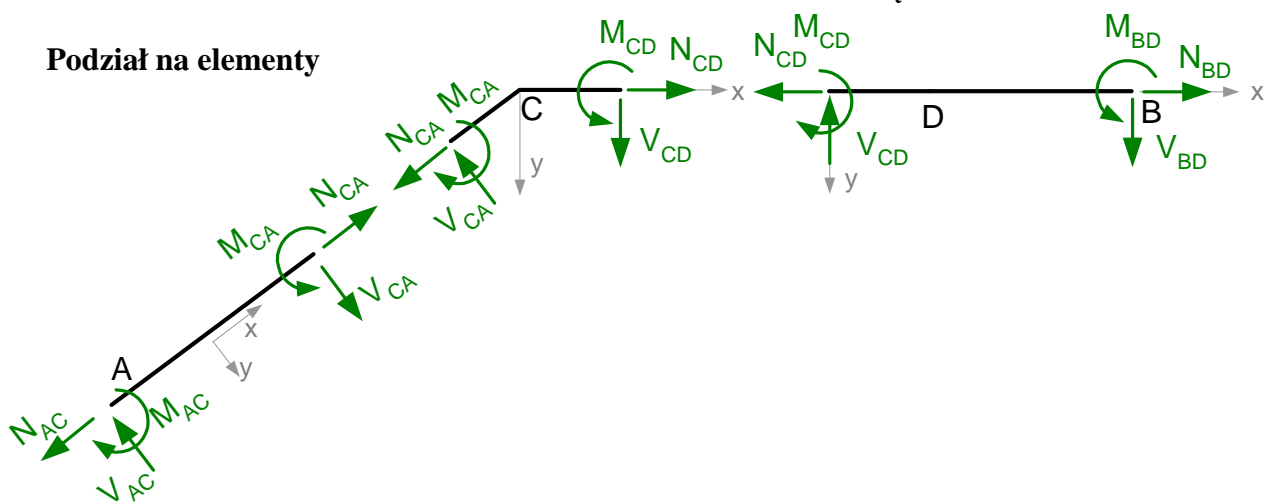
5.5 WYKRESY „RZECZYWISTYCH” SIŁ PRZEKROJOWYCH



Rzeczywiste wartości sił przekrojowych mogą też być wyznaczone w wyniku rozwiązania układu podstawowego od działających równocześnie znanych już sił hiperstatycznych. Wyniki obliczeń musiałyby być identyczny (w granicach dokładności rachunkowej) jak przedstawione powyżej.

5.6 KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA.

5.6.1 KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA



Równania równowagi

Dla pręta AC

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{AC} + N_{CA} = -0.01285 + 0.011285 = 0, \\ \sum Y &= -V_{AC} + V_{CA} = -0.001599 + 0.001599 = 0, \\ \sum M_A &= M_{AC} - M_{CA} + V_{CA} \cdot 5m = 0 - 0.007993 + 0.001599 \cdot 5 \approx 0 \end{aligned}$$

Dla węzła C

$$\begin{aligned} \sum X &= N_{CB} - N_{CA} \cdot \cos \alpha - V_{CA} \cdot \sin \alpha = 0.01124 - 0.01285 \cdot 0.8 - 0.001599 \cdot 0.6 \approx 0, \\ \sum Y &= V_{CB} + N_{CA} \cdot \sin \alpha - V_{CA} \cdot \cos \alpha = -0.006433 + 0.01124 \cdot 0.6 - 0.01285 \cdot 0.8 \approx 0, \\ \sum M_C &= M_{CA} - M_{CD} = 0.007993 - 0.007993 = 0 \end{aligned}$$

Dla pręta CB

$$\sum X = -N_{CB} + N_{BC} = -0.01124 + 0.01124 = 0,$$

$$\sum Y = -V_{CB} + V_{BC} = -(-0.006433) - 0.006433 = 0 ,$$

$$\sum M_C = M_{CB} - M_{BC} + V_{BC} \cdot 6m = 0.007993 - (-0.03060) + (-0.006433) \cdot 6 \approx 0$$

5.6.2 KONTROLA KINEMATYCZNEJ ZGODNOŚCI ROZWIĄZANIA

Wykorzystujemy tu wzór na wyznaczanie przemieszczeń od przemieszczeń podpór i błędów montażu.

$$\Delta_{\alpha\Delta} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^\alpha \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \sum_m \bar{M}_m^\alpha \cdot \Delta\varphi_m + \sum_v \bar{V}_v^\alpha \cdot \Delta h_v + \sum_n \bar{N}_n^\alpha \cdot \Delta L_n - \sum_r \bar{R}_r^\alpha \cdot \Delta_r .$$

Obliczając $\Delta_{1\Delta}$ i $\Delta_{2\Delta}$ możemy wykorzystać fakt, że człony: trzeci, czwarty, piąty i szósty powyższego wzoru dla $\Delta_{1\Delta}$ równe są razem $\delta_{1\Delta}$ a człony trzeci, czwarty, piąty i szósty powyższego wzoru dla $\Delta_{2\Delta}$ równe są razem $\delta_{2\Delta}$, które to wielkości zostały już policzone (p.4.4.1)

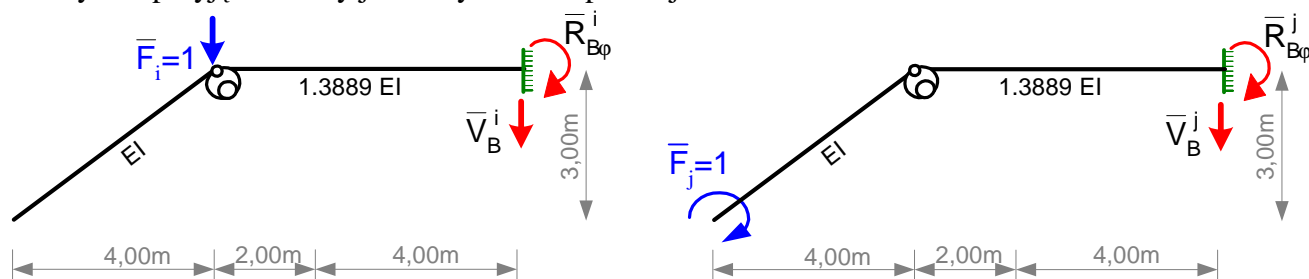
$$\begin{aligned} \Delta_{1\Delta} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{S_s^1 \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \delta_{1\Delta} = \frac{1}{EI_{AC}} \int \bar{M}^1 \cdot M^\Delta \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int \bar{M}^1 \cdot M^\Delta \cdot dx + \\ &+ \frac{\bar{S}_1^1 \cdot S_1^\Delta}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^1 \cdot S_2^\Delta}{k_2} + \delta_{1T} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{0.007993 \cdot EI / m \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} (-0.4) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot (-0.4 \cdot 0.007993 + 4 \cdot (-0.7) \cdot (-0.01131) + (-1) \cdot (-0.0306)) \frac{EI}{m} + \\ &+ \frac{0.1 / m \cdot 0.006433 \cdot EI / m^2}{0.5 \cdot EI / m^3} + \frac{-0.4 \cdot 0.007993 EI / m}{1 \cdot EI / m} - 0.009104 \approx \Delta_{1rz}^\Delta = 0.02618 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2\Delta} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{S_s^2 \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \delta_{2\Delta} = \frac{1}{EI_{AC}} \int \bar{M}^2 \cdot M^\Delta \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int \bar{M}^2 \cdot M^\Delta \cdot dx + \\ &+ \frac{\bar{S}_1^2 \cdot S_1^\Delta}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^2 \cdot S_2^\Delta}{k_2} + \delta_{2\Delta} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{0.007993 \cdot EI / m \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot (1.8m \cdot 0.007993 + 4 \cdot 0.9m \cdot (-0.01131) + 0) \frac{EI}{m} + \\ &+ \frac{0.3 \cdot 0.006433 \cdot EI / m^2}{0.5 \cdot EI / m^3} + \frac{1.8m \cdot 0.007993 EI / m}{1 \cdot EI / m} - 0.02328m \approx 0 \end{aligned}$$

6 WYZNACZENIE SZUKANYCH PRZEMIESZCZEŃ

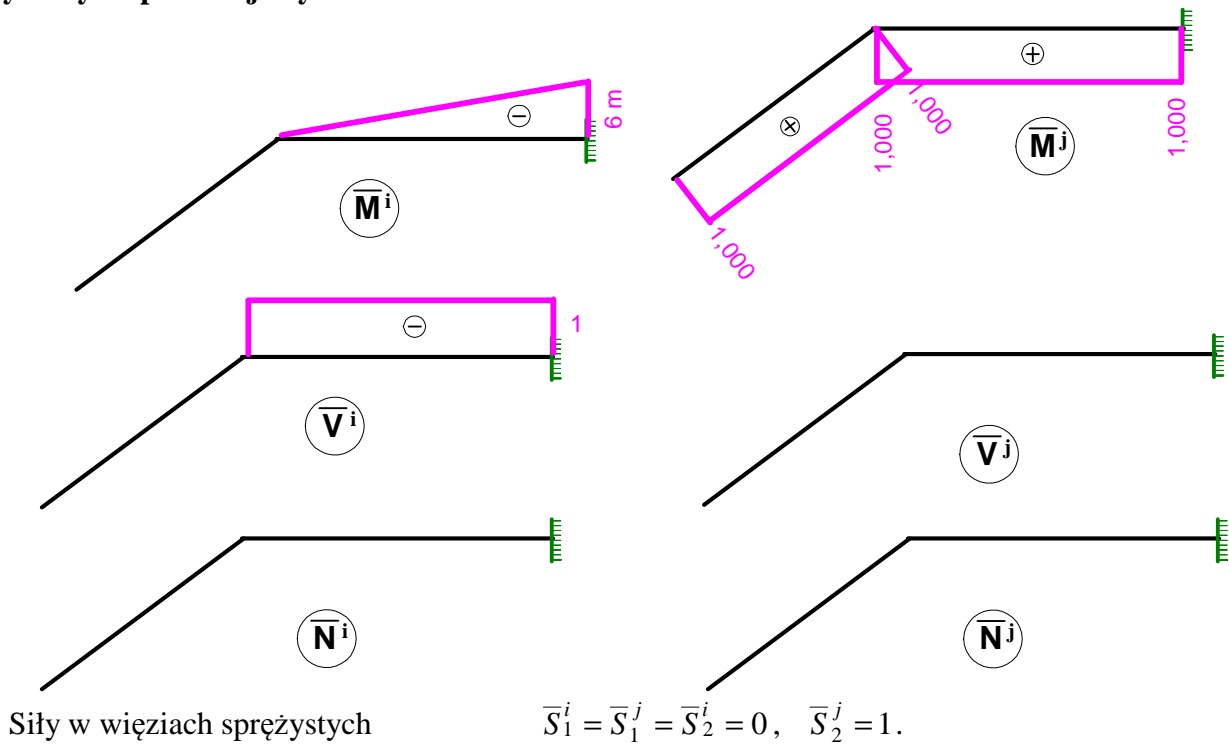
6.1 ROZWIĄZANIA WIRTUALNE OD OBCIĄŻEŃ JEDNOSTKOWYCH

Uwzględniając fakt, że układy zostały rozwiązane od danych obciążeń, w celu obliczenia szukanych przemieszczeń należy uzyskać rozwiązania wirtualne od obciążeń jednostkowych przyłożonych w miejscach i kierunkach szukanych przemieszczeń. Rozwiązania te otrzymamy rozwiązując dowolne układy podstawowe danej ramy od obciążeń $\bar{F}_i = 1$ i $\bar{F}_j = 1$. Może to być taki sam układ, jaki był przyjęty do rozwiązania ramy od obciążenia danego. Mogą też być dowolne inne układy. Tu przyjęto układy jak na rysunkach poniżej.



Reakcje w miejscach przemieszczeń podpór: $\bar{V}_B^i = -1$, $\bar{R}_{B\varphi}^i = 6m$, $\bar{V}_B^j = 0$, $\bar{R}_{B\varphi}^j = -1$.

Wykresy sił przekrojowych



6.2 PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

Szukane przemieszczenia obliczymy na podstawie wzorów

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s}, \quad \Delta_{jF} = \int \frac{\bar{M}^j \cdot M^F}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^j \cdot S_s^F}{k_s}.$$

Do obliczenia całek w powyższych wzorach zastosowano wzór Simpsona lub Mohra. Ze względu na charakter wykresów momentów zginających całki w powyższych wzorach przedstawiono w postaci sum 3 całek odpowiadających przedziałom całkowania, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie odpowiedniego wzoru.

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} &= \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^i \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^i \cdot M^F \cdot dx + 0 = \\ &= \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{2m}{6} \cdot (0 + 4 \cdot (-1m) \cdot 13.209kNm + (-2m) \cdot 22.172kNm) + \\ &+ \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot (-2m \cdot 22.172kNm + 4 \cdot (-4m) \cdot 0.098kNm + (-6m) \cdot (-21.975)kNm) = 17.9264 \frac{kNm^3}{EI} \\ \Delta_{jF} &= \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^j \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^j \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^j \cdot M^F \cdot dx + 0 + \frac{\bar{S}_2^j \cdot S_2^F}{k_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0.248kNm + 1 \cdot (-10.754)kNm) + \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{4.246kNm + 22.172kNm}{2} \cdot 2m \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{22.172kNm - 21.975kNm}{2} \cdot 4m \cdot 1 + \frac{1 \cdot (-10.7544kNm)}{1EI/m} = 0.4130 \frac{kNm^2}{EI} \end{aligned}$$

6.3 PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

Szukane przemieszczenia policzymy na podstawie wzorów

$$\Delta_{iT} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \delta_{iT}, \quad \Delta_{jT} = \int \frac{\bar{M}^j \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^j \cdot S_s^T}{k_s} + \delta_{jT}$$

gdzie
$$\delta_{iT} = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{\bar{M}^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{\bar{N}^i} \right)_p,$$

$$\delta_{jT} = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^j} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^j} \right)_p.$$

Ze względu na charakter wykresów momentów zginających całki w powyższych wzorach przedstawiono w postaci sum 2 całek odpowiadających przedziałom całkowania, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie odpowiedniego wzoru.

Obliczenia rozpoczniemy od wyznaczenia składników δ_{iT} , δ_{jT}

Pręt AC $\Omega_{M^i} = 0$, $\Omega_{M^j} = 1 \cdot 5m = 5m$, $\Omega_{N^i} = 0$, $\Omega_{N^j} = 0$,

$$\Delta T_w = -5^\circ C, \quad \Delta T_p = 20^\circ C, \quad \Delta T_o = \frac{\Delta T_w + \Delta T_p}{2} = \frac{-5 + 20}{2} = 7.5^\circ C \quad (\text{przekrój symetryczny}),$$

$$h = 0.044 \cdot 5m = 0.22m, \quad \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} = \frac{(-5 - 20)^\circ C}{0.22m} = \frac{-113.636^\circ C}{m},$$

$$\delta_{iT(AC)} = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^i} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^i} = 0,$$

$$\delta_{jT(AC)} = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^j} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^j} = \alpha_T \cdot (-113.636^\circ C / m \cdot 5m + 0) = -568.1818^\circ C \cdot \alpha_T$$

Dla pręta CB $\Omega_{M^i} = -6m \cdot 6m / 2 = -18m^2$, $\Omega_{M^j} = 1 \cdot 6m = 6m$, $\Omega_{N^i} = 0$, $\Omega_{N^j} = 0$,

$$\Delta T_w = 10^\circ C, \quad \Delta T_p = -30^\circ C, \quad \Delta T_o = \frac{10 - 30}{2} = -10^\circ C \quad (\text{przekrój symetryczny}),$$

$$h = 0.04 \cdot 6m = 0.24m, \quad \frac{(\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} = \frac{(10 - (-30))^\circ C}{0.24m} = \frac{166.6667^\circ C}{m},$$

$$\delta_{iT(CB)} = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^i} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^i} =$$

$$= \alpha_T \cdot (166.6667^\circ C / m \cdot (-18m^2) + 0) = -3000^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T,$$

$$\delta_{jT(CB)} = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot \Omega_{M^j} + \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^j} = \alpha_T \cdot (166.6667^\circ C / m \cdot 6m + 0) = 1000^\circ C \cdot \alpha_T$$

$$\delta_{iT} = (0 - 3000)^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T = -3000^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T,$$

$$\delta_{jT} = (-568.1818 + 1000)^\circ C \cdot \alpha_T = 431.8182^\circ C \cdot \alpha_T.$$

Szukane przemieszczenia

$$\Delta_{iT} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \delta_{iT} = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^i \cdot M^T \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^i \cdot M^T \cdot dx +$$

$$+ \frac{\bar{S}_1^i \cdot S_1^T}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^i \cdot S_2^T}{k_2} + \delta_{iT} =$$

$$= 0 + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot (0 + 4 \cdot (-3m) \cdot (-166.6695) + (-6m) \cdot (-338.6254)) \frac{^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T}{m} + 0 +$$

$$- 3000^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T = -97.1373^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

$$\Delta_{jT} = \int \frac{\bar{M}^j \cdot M^T}{EI} dx + \sum_s \frac{S_s^j \cdot S_s^T}{k_s} + \delta_{jT} = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^j \cdot M^T \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^j \cdot M^T \cdot dx +$$

$$+ \frac{\bar{S}_1^j \cdot S_1^T}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^j \cdot S_2^T}{k_2} + \delta_{jT} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5.2865^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m \cdot 5m}{2} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot (1 \cdot 5.2865 + 4 \cdot 1 \cdot (-166.6695) + 1 \cdot (-338.6254)) \frac{^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T}{m} + 0 +$$

$$+ \frac{1 \cdot 5.2865^\circ C \cdot EI \cdot \alpha_T / m}{1EI / m} + 431.8182^\circ C \cdot \alpha_T = -269.6855^\circ C \cdot \alpha_T$$

6.4 PRZEMIESZCZENIA OD PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR I BŁĘDÓW MONTAŻU

Szukane przemieszczenia policzymy na podstawie wzorów

$$\Delta_{i\Delta} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \delta_{i\Delta}, \quad \Delta_{j\Delta} = \int \frac{\bar{M}^j \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^j \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \delta_{j\Delta}$$

gdzie $\delta_{i\Delta} = \sum_m \bar{M}_m^i \cdot \Delta\varphi_m + \sum_v \bar{V}_v^i \cdot \Delta h_v + \sum_n \bar{N}_n^i \cdot \Delta L_n - \sum_r \bar{R}_r^i \cdot \Delta_r,$

$$\delta_{j\Delta} = \sum_m \bar{M}_m^j \cdot \Delta\varphi_m + \sum_v \bar{V}_v^j \cdot \Delta h_v + \sum_n \bar{N}_n^j \cdot \Delta L_n - \sum_r \bar{R}_r^j \cdot \Delta_r$$

Ze względu na charakter wykresów momentów zginających całki w powyższych wzorach przedstawiono w postaci sum 2 całek odpowiadających przedziałom całkowania, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie odpowiedniego wzoru.

Błędy montażu scharakteryzowane w punkcie 4.4.1 wynoszą:

$$\Delta\varphi_1 = -1.5^\circ = -\frac{1.5^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = -0.02618, \quad \Delta\varphi_2 = 1^\circ = \frac{1^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 0.0175,$$

$$\Delta h_1 = -1.2\text{cm} = -0.012\text{m}, \quad \Delta h_2 = 1.4\text{cm} = 0.014\text{m},$$

$$\Delta L_1 = -1.5\text{cm} = -0.015\text{m}, \quad \Delta L_2 = 1\text{cm} = 0.01\text{m}$$

Siły przekrojowe od obciążeń jednostkowych, w miejscach błędów, mają wartości

$$\begin{aligned} \bar{M}_1^i = 0, \quad \bar{M}_2^i = -4\text{m}, \quad \bar{V}_1^i = 0, \quad \bar{V}_2^i = -1, \quad \bar{N}_1^i = 0, \quad \bar{N}_2^i = 0, \\ \bar{M}_1^j = 1, \quad \bar{M}_2^j = 1, \quad \bar{V}_1^j = 0, \quad \bar{V}_2^j = 0, \quad \bar{N}_1^j = 0, \quad \bar{N}_2^j = 0, \end{aligned}$$

Przemieszczenia podpór wystąpiły w kierunku reakcji V_B i kąt obrotu podpory B.

Wynoszą one $\Delta_{V_B} = 1\text{cm} = 0.01\text{m}, \quad \Delta r_1 = 1.5^\circ = 1.5 \cdot \pi / 180 = 0.02618.$

Wartości reakcji odpowiadających tym przemieszczeniom wywołane obciążeniami jednostkowymi

wynoszą $\bar{V}_B^i = -1, \quad \bar{R}_{B\varphi}^i = 6\text{m}, \quad \bar{V}_B^j = 0, \quad \bar{R}_{B\varphi}^j = -1.$

$$\delta_{i\Delta} = 0 - 4 \cdot 0.0175 + 0 - 1 \cdot 0.014\text{m} + 0 + 0 - (-1) \cdot 0.01\text{m} - 6\text{m} \cdot 0.02618 = -0.23108\text{m},$$

$$\delta_{j\Delta} = 1 \cdot (-0.02618) + 1 \cdot 0.0175 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0 - (-1) \cdot 0.02618 = 0.0175.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i\Delta} &= \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \delta_{i\Delta} = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^i \cdot M^\Delta \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^i \cdot M^\Delta \cdot dx + \\ &+ \frac{\bar{S}_1^i \cdot S_1^\Delta}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^i \cdot S_2^\Delta}{k_2} + \delta_{i\Delta} = \\ &= 0 + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6\text{m}}{6} \cdot (0 + 4 \cdot (-3\text{m}) \cdot (-0.01131) + (-6\text{m}) \cdot (-0.0306)) \frac{EI}{m} + 0 - 0.23108\text{m} = -0.0012\text{m}, \\ \Delta_{j\Delta} &= \int \frac{\bar{M}^j \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^j \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \delta_{j\Delta} = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^j \cdot M^\Delta \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^j \cdot M^\Delta \cdot dx + \\ &+ \frac{\bar{S}_1^j \cdot S_1^\Delta}{k_1} + \frac{\bar{S}_2^j \cdot S_2^\Delta}{k_2} + \delta_{j\Delta} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{0.007993 \cdot EI / \text{m} \cdot 5\text{m}}{2} \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6\text{m}}{6} \cdot (1 \cdot 0.007993 + 4 \cdot 1 \cdot (-0.01131) + 1 \cdot (-0.0306)) \frac{EI}{m} + 0 + \frac{1 \cdot 0.007993 EI / \text{m}}{1 EI / \text{m}} + 0.0175 = \\ &= -0.003363 = -0.003363 \cdot 180^\circ / \pi = -0.19^\circ. \end{aligned}$$