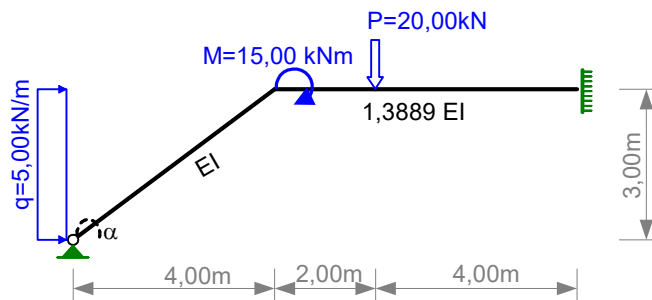


## 1 ROZWIĄZANIE RAMY METODĄ SIŁ I OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA

### 1.1 DANE WYJŚCIOWE DO OBLICZEŃ

Dana jest rama jak na rysunku.

Rozwiązać ją metodą sił, sporządzić wykresy sił przekrojowych i dokonać kontroli rozwiązania oraz obliczyć zaznaczone przemieszczenie.



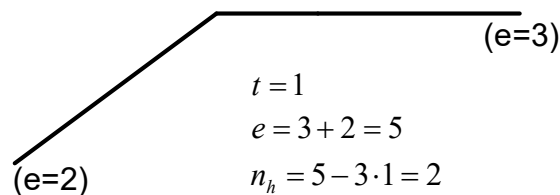
#### Uwaga dotycząca oznaczeń.

Aby uniknąć niejednoznaczności oznaczeń wszystkie przemieszczenia obliczane w statycznie wyznaczalnym układzie podstawowym i dotyczące tylko układu podstawowego oznaczać będziemy małym symbolem  $\delta$  a przemieszczenia obliczane w statycznie niewyznaczalnym układzie danym lub obliczane w układzie podstawowym a dotyczące układu danego oznaczać będziemy dużym symbolem  $\Delta$ . Siły przekrojowe i reakcje wyznaczone w układzie podstawowym oznaczać będziemy odpowiednim symbolem z nadkreśleniem (np.  $\bar{M}$ ) a w układzie danym oznaczać będziemy odpowiednim symbolem bez nadkreślenia (np.  $M$ ).

### 1.2 WYZNACZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Aby skorzystać z wzoru  $n_h = e - 3 \cdot t$  przekształcamy układ dany w zbiór tarcz „sztywnych” otwartych przez usunięcie więzi podporowych, dokonanie przecięć wszędzie tam gdzie połączenie nie jest pełne oraz „otwarcie” tarcz zamkniętych.

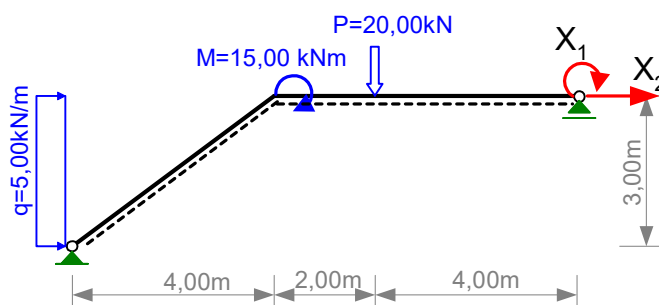
W rozpatrywanym przykładzie wystarczy usunięcie więzi podporowych, co ilustruje rysunek poniżej. Na rysunku tym w nawiasach podano liczby usuniętych więzi, których suma jest liczbą więzi  $e$  w przytoczonym wzorze.



### 1.3 UKŁAD PODSTAWOWY

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez zastąpienie  $n_h$  więzi niewiadomymi siłami w taki sposób by powstały układ był geometrycznie niezmienny.

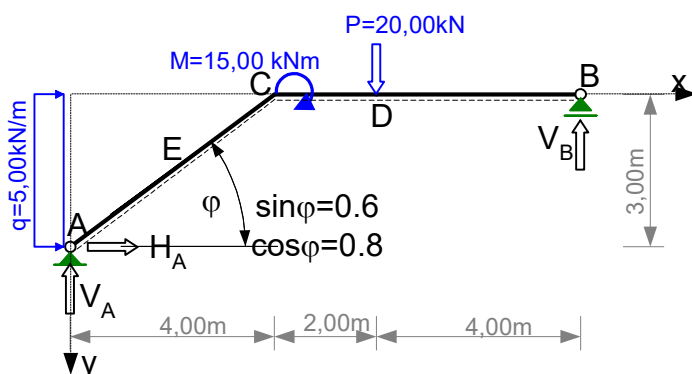
**Uwaga:** Liniami przerywanymi wzdłuż osi prętów wyróżniono włókna do znakowania momentów zginających



### 1.4 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD DANEGO OBCIĄŻENIA

$$F = (M, P, Q)$$

**Uwaga:** Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nadkreśleniem i indeksem górnym F. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



### 1.4.1 WYZNACZENIE REAKCJI PODPÓR

$$\begin{aligned} \sum M_A &= -V_B \cdot 10m + P \cdot 6m + M + q \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 0 & \Rightarrow \\ -V_B \cdot 10m + 20kN \cdot 6m + 15kNm + 5kN/m \cdot 3m \cdot 3m / 2 &= 0 & \Rightarrow V_B = \bar{V}_B^F = 15.75kN, \\ \sum Y &= -V_A - V_B + P = 0 & \Rightarrow -V_A - 15.75kN + 20kN = 0 & \Rightarrow V_A = \bar{V}_A^F = 4.25kN, \\ \sum X &= H_A + q \cdot 3m = 0 & \Rightarrow H_A + 5kN/m \cdot 3m = 0 & \Rightarrow H_A = \bar{H}_A^F = -15.00kN. \end{aligned}$$

**Kontrola** 
$$\begin{aligned} \sum M_B &= -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m - P \cdot 4m + M - q \cdot 3m \cdot 3m / 2 = \\ &= (15 \cdot 3 + 4.25 \cdot 10 - 20 \cdot 4 + 15 - 5 \cdot 3 \cdot 3 / 2)kNm = 0 \end{aligned}$$

### 1.4.2 OBLICZENIE WARTOŚCI RZĘDNYCH CHARAKTERYSTYCZNYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH.

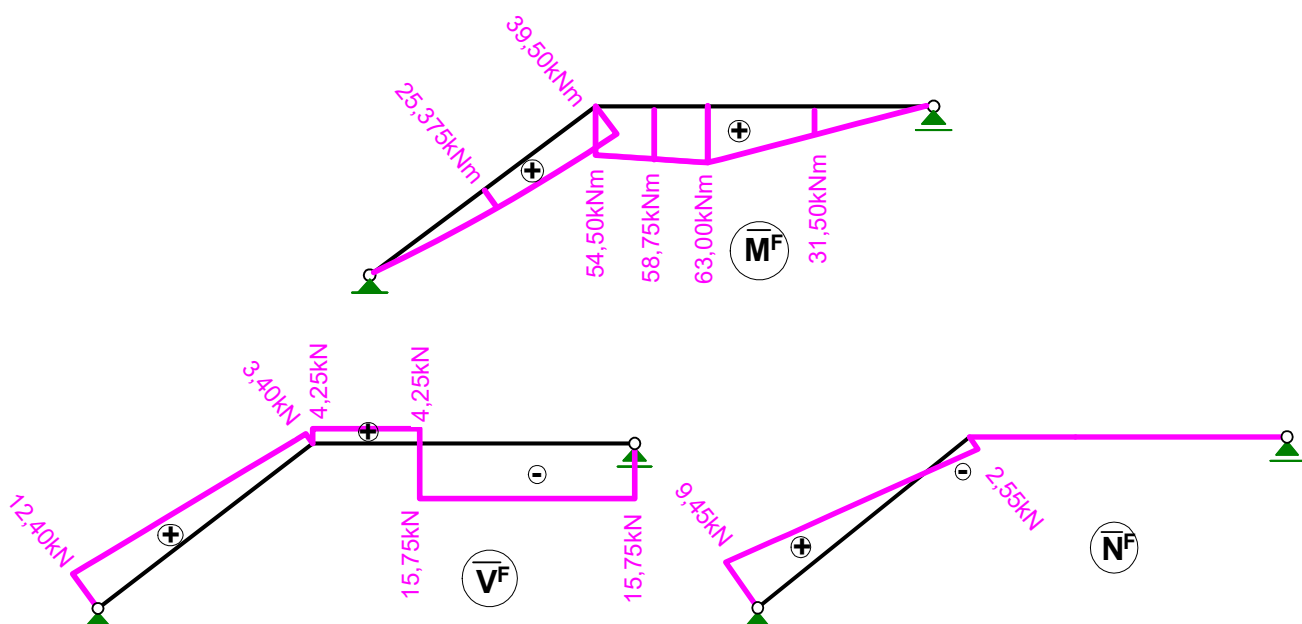
$$\begin{aligned} M_A &= 0, \\ M_E &= V_A \cdot 2m - H_A \cdot 1.5m - q \cdot 1.5m \cdot 1.5m / 2 = \\ &= 4.25kN \cdot 2m + 15kN \cdot 1.5m - 5kN/m \cdot 1.5m \cdot 1.5m / 2 = 25.375kNm, \\ M_{CA} &= V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m - q \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 4.25 \cdot 4m + 15kN \cdot 3m - 5kN/m \cdot 3m \cdot 3m / 2 = 39.50kNm, \\ M_{CD} &= M_{CA} + M = 39.5kNm + 15kNm = 54.50kNm, \\ M_D &= V_B \cdot 4m = 15.75kN \cdot 4m = 63.00kNm, & M_B &= 0, \\ V_{AC} &= V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = (4.25 \cdot 0.8 + 15 \cdot 0.6)kN = 12.40kN, \\ N_{AC} &= -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = (-4.25 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.8)kN = 9.45kN, \\ V_{CA} &= V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha - q \cdot 3m \cdot \sin \alpha = (4.25 \cdot 0.8 + 15 \cdot 0.6 - 5 \cdot 3 \cdot 0.6)kN = 3.40kN, \\ N_{CA} &= -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha - q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = (-4.25 \cdot 0.6 + 15 \cdot 0.8 - 5 \cdot 3 \cdot 0.8)kN = -2.55kN, \\ V_{CD} &= P - V_B = 20kN - 15.75kN = 4.25kN, & V_{DB} &= -V_B = -15.75kN, & N_{CB} &= 0. \end{aligned}$$

Rzędne środkowe momentów zginających dla przedziału CD i DB, wykorzystując ich prostoliniowy charakter, obliczono jako średnie arytmetyczne z wartości brzegowych.

$$M_{s,CD} = (M_{CD} + M_D) / 2 = (54.5 + 63) / 2 \cdot kNm = 58.75kNm,$$

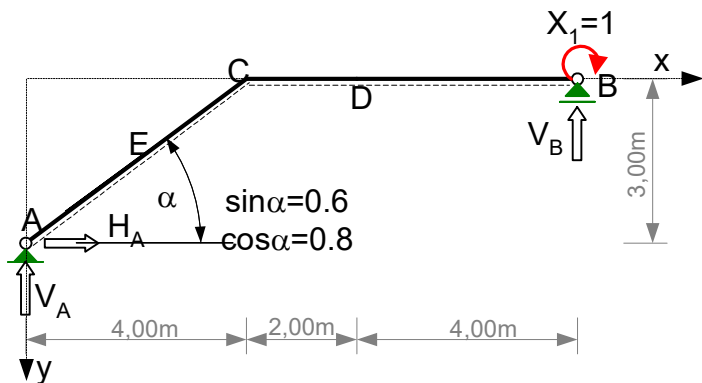
$$M_{s,DB} = (M_D + M_B) / 2 = (63 + 0) / 2 \cdot kNm = 31.50kNm$$

### 1.4.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH.



## 1.5 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA $X_1 = 1$

**Uwaga:** Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nadkreśleniem i indeksem górnym 1. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



### 1.5.1 WYZNACZENIE REAKCJI PODPÓR.

$$\sum M_A = -V_B \cdot 10m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \bar{V}_B^1 = 0.10/m,$$

$$\sum Y = -V_A - V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \bar{V}_A^1 = -0.10/m,$$

$$\sum X = H_A = 0$$

$$\Rightarrow H_A = \bar{H}_A^1 = 0.$$

**Kontrola**

$$\sum M_B = -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m + X_1 = -0 \cdot 3 - 0.1 \cdot 10 + 1 = 0$$

### 1.5.2 OBLICZENIE WARTOŚCI RZĘDNYCH CHARAKTERYSTYCZNYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH.

$$M_A = 0,$$

$$M_C = V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m = -0.40,$$

$$M_D = V_B \cdot 4m - 1 = -0.60,$$

$$M_B = 0,$$

$$V_{AC} = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = -0.08/m,$$

$$N_{AC} = -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = 0.06/m,$$

$$V_{CB} = -V_B = -0.10/m,$$

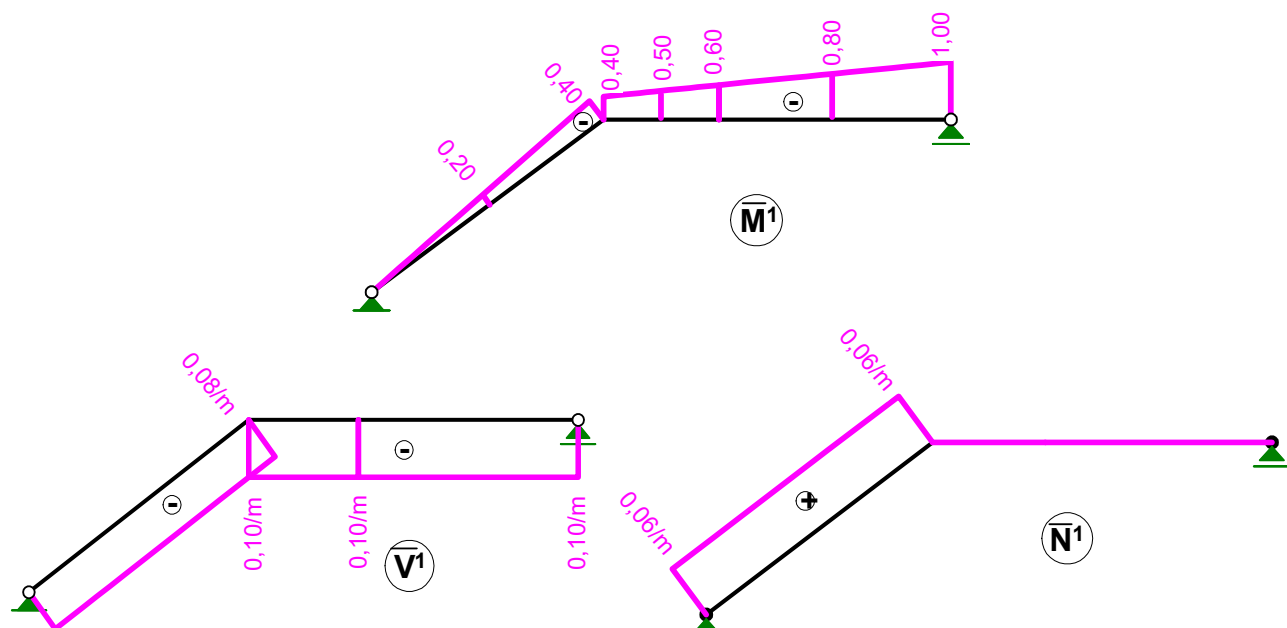
$$N_{CB} = 0.$$

$$M_E = M_{s,AC} = (M_A + M_C)/2 = (0 - 0.4)/2 = -0.20,$$

$$M_{s,CD} = (M_C + M_D)/2 = (-0.4 - 0.6)/2 = -0.50, \quad M_{s,DB} = (M_D + M_B)/2 = (-0.6 - 1)/2 = -0.80.$$

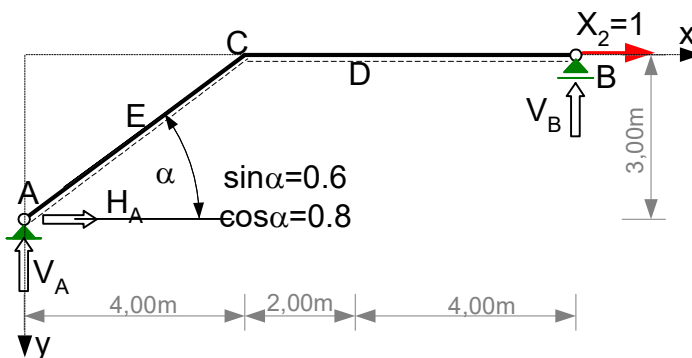
$$M_{s,CB} = (M_C + M_B)/2 = (-0.4 - 1)/2 = -0.70.$$

### 1.5.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH.



1.6 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA  $X_2 = 1$ .

**Uwaga:** Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nadkreśleniem i indeksem górnym 2. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



1.6.1 WYZNACZENIE REAKCJI PODPÓR.

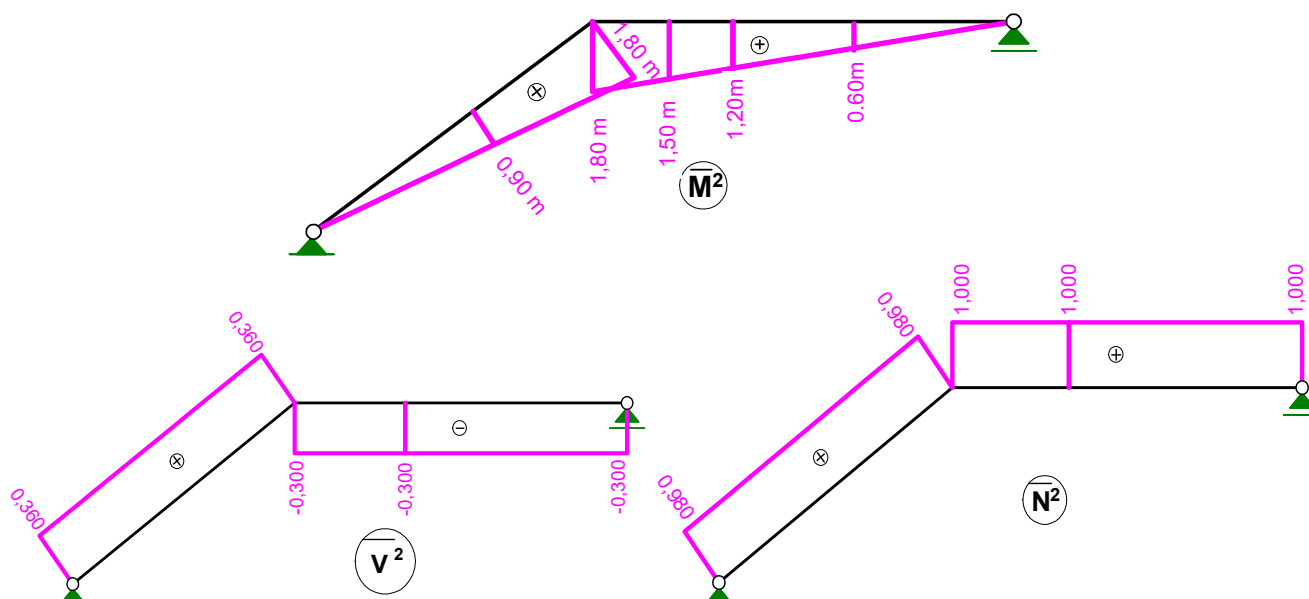
$$\begin{aligned} \sum M_A &= -V_B \cdot 10m + 1 \cdot 3m = 0 & \Rightarrow & V_B = \bar{V}_B^2 = 0.30, \\ \sum Y &= -V_A - V_B = 0 & \Rightarrow & V_A = \bar{V}_A^2 = -0.30, \\ \sum X &= H_A + 1 = 0 & \Rightarrow & H_A = \bar{H}_A^2 = -1. \end{aligned}$$

**Kontrola**  $\sum M_B = -H_A \cdot 3m + V_A \cdot 10m = -(-1) \cdot 3 + (-0.3) \cdot 10m = 0$

1.6.2 OBLICZENIE WARTOŚCI RZĘDNYCH CHARAKTERYSTYCZNYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH.

$$\begin{aligned} M_A &= 0, & M_C &= V_A \cdot 4m - H_A \cdot 3m = 1.80m, \\ M_D &= V_B \cdot 4m = 1.20m, & M_B &= 0, \\ V_{AC} &= V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha = 0.36, & N_{AC} &= -V_A \cdot \sin \alpha - H_A \cdot \cos \alpha = 0.98, \\ V_{CB} &= -V_B = -0.30, & N_{CB} &= 1. \\ M_E &= M_{s,AC} = (M_A + M_C) / 2 = (0 + 1.8) / 2 \cdot m = 0.90m, \\ M_{s,CD} &= (M_C + M_D) / 2 = (1.8 + 1.2) / 2 \cdot m = 1.50m, & M_{s,DB} &= (M_D + M_B) / 2 = (1.2 + 0) / 2 \cdot m = 0.60m, \\ M_{s,CB} &= (M_C + M_B) / 2 = (1.8 + 0) / 2 \cdot m = 0.90m. \end{aligned}$$

1.6.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH



## 1.7 UKŁAD RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE.

### 1.7.1 POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} = \Delta_{1rz} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} = \Delta_{2rz} = 0$$

### 1.7.2 OBLICZENIE WSPÓLCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

Współczynniki układu równań obliczamy wykorzystując wzory

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^j}{EI} dx, \quad \delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^F}{EI} dx,$$

Do obliczenia całek w powyższych wzorach zastosowano wzór Simpsona lub Mohra. Ze względu na charakter wykresów momentów zginających całki w powyższych wzorach przedstawiono w postaci sum 3 lub 2 całek odpowiadających przedziałom całkowania, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie odpowiedniego wzoru.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot \bar{M}^1}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^1 \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^1 \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{-0.4 \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-0.4) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6m}{6} \cdot ((-0.4) \cdot (-0.4) + 4 \cdot (-0.7) \cdot (-0.7) + (-1) \cdot (-1)) = 2.513049 \frac{m}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot \bar{M}^2}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{-0.4 \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-0.4 \cdot 1.8 + 4 \cdot (-0.7) \cdot 0.9 + (-1) \cdot 0)m^2 = -3.532781 \frac{m^2}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot \bar{M}^2}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx + \frac{1}{EI_{CB}} \int_{CB} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^2 \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1.8m \cdot 5m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m + \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{1.8m \cdot 6m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.8m = 10.065563 \frac{m^3}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^1 \cdot \bar{M}^F \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot (-0.2) \cdot 25.375kNm + (-0.4) \cdot 39.5kNm) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (-0.4 \cdot 54.5 + 4 \cdot (-0.5) \cdot 58.75 + (-0.6) \cdot 63)kNm^2 + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (-0.6 \cdot 63 + 4 \cdot (-0.8) \cdot 31.5 + (-1) \cdot 0)kNm^2 = -139.114461 \frac{kNm^2}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2F} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^2 \cdot \bar{M}^F \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.9m \cdot 25.375kNm + 1.8m \cdot 39.5kNm) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (1.8 \cdot 54.5 + 4 \cdot 1.5 \cdot 58.75 + 1.2 \cdot 63)kNm^3 + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{1.2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 63kNm^3 = 334.237409 \frac{kNm^3}{EI} \end{aligned}$$

### 1.7.3 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ

$$\begin{aligned} 2.513049 \frac{m}{EI} \cdot X_1 - 3.532781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_2 - 139.114461 \frac{kNm^2}{EI} &= 0 \\ -3.532781 \frac{m^2}{EI} \cdot X_1 + 10.065563 \frac{m^3}{EI} \cdot X_2 + 334.237409 \frac{kNm^3}{EI} &= 0 \end{aligned}$$

### 1.7.4 ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ

$$X_1 = X_1^F = 17.114920kNm, \quad X_2 = X_2^F = -27.199089kN.$$

### 1.8 OBLICZENIE WARTOŚCI „RZECZYWISTYCH” REAKCJI I SIŁ PRZEKROJOWYCH

$$R_r^F = \bar{R}_r^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_r^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_r^F, \quad M_\alpha^F = \bar{M}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_\alpha^F,$$

$$N_\alpha^F = \bar{N}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_\alpha^F, \quad V_\alpha^F = \bar{V}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_\alpha^F$$

$$H_A^F = \bar{H}_A^1 \cdot X_1 + \bar{H}_A^2 \cdot X_2 + \bar{H}_A^F = 0 \cdot 17.11492kNm + (-1) \cdot (-27.199089kN) - 15kN = 12.199kN$$

$$V_A^F = \bar{V}_A^1 \cdot X_1 + \bar{V}_A^2 \cdot X_2 + \bar{V}_A^F = -0.1/m \cdot 17.11492kNm + (-0.3) \cdot (-27.194kN) + 4.25kN = 10.698kN$$

$$V_B^F = \bar{V}_B^1 \cdot X_1 + \bar{V}_B^2 \cdot X_2 + \bar{V}_B^F = 0.1/m \cdot 17.11492kNm + 0.3 \cdot (-27.199089kN) + 15.75kN = 9.302kN$$

$$\begin{aligned} M_E^F &= \bar{M}_E^1 \cdot X_1 + \bar{M}_E^2 \cdot X_2 + \bar{M}_E^F = \\ &= -0.2 \cdot 17.11492kNm + 0.9m \cdot (-27.199089kN) + 25.375kNm = -2.527kNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CA}^F &= \bar{M}_{CA}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{CA}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{CA}^F = \\ &= -0.4 \cdot 17.11492kNm + 1.8m \cdot (-27.199089kN) + 39.5kNm = -16.304kNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CD}^F &= \bar{M}_{CD}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{CD}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{CD}^F = \\ &= -0.4 \cdot 17.11492kNm + 1.8m \cdot (-27.199089kN) + 54.5kNm = -1.304kNm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{DC}^F &= \bar{M}_{DC}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{DC}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{DC}^F = \\ &= -0.6 \cdot 17.11492kNm + 1.2m \cdot (-27.199089kN) + 63kNm = 20.092kNm \end{aligned}$$

$$M_{DB}^F = M_{DC}^F = 20.092kNm$$

$$M_{BD}^F = \bar{M}_{BD}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{BD}^2 \cdot X_2 + \bar{M}_{BD}^F = -1 \cdot 17.11492kNm + 0 \cdot (-27.199089kN) + 0 = -17.115kNm$$

$$V_{AC}^F = \bar{V}_{AC}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{AC}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{AC}^F = -0.08/m \cdot 17.11492kNm + 0.36 \cdot (-27.199089kN) + 12.4kN = 1.239kN$$

$$V_{CA}^F = \bar{V}_{CA}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{CA}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{CA}^F = -0.08/m \cdot 17.11492kNm + 0.36 \cdot (-27.199089kN) + 3.4kN = -7.761kN$$

$$\begin{aligned} V_{CD}^F &= \bar{V}_{CD}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{CD}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{CD}^F = \\ &= -0.1/m \cdot 17.11492kNm + (-0.3) \cdot (-27.199089kN) + 4.25kN = 10.698kN \end{aligned}$$

$$V_{DC}^F = V_{CD}^F = 10.698kN$$

$$\begin{aligned} V_{DB}^F &= \bar{V}_{DB}^1 \cdot X_1 + \bar{V}_{DB}^2 \cdot X_2 + \bar{V}_{DB}^F = \\ &= -0.1/m \cdot 17.11492kNm + (-0.3) \cdot (-27.199089kN) - 15.75kN = -9.302kN \end{aligned}$$

$$V_{BD}^F = V_{DB}^F = -9.302kN$$

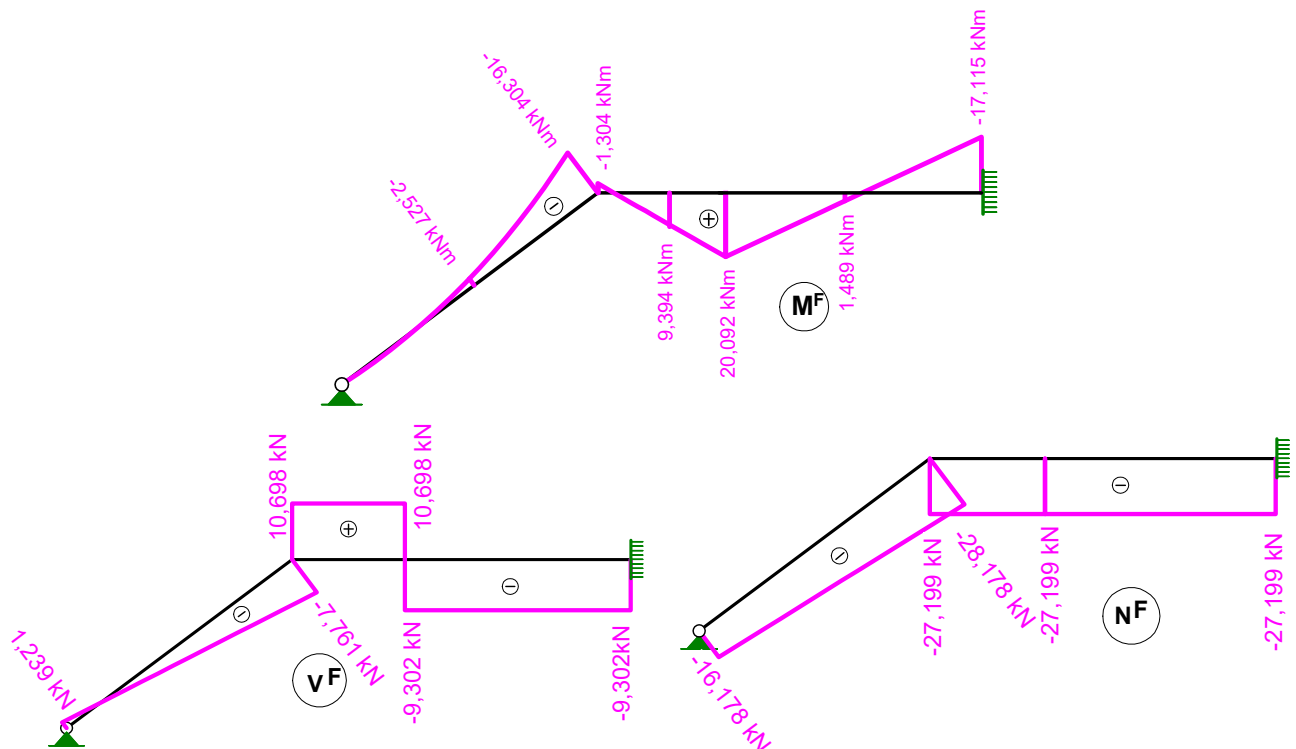
$$\begin{aligned} N_{AC}^F &= \bar{N}_{AC}^1 \cdot X_1 + \bar{N}_{AC}^2 \cdot X_2 + \bar{N}_{AC}^F = \\ &= -0.06/m \cdot 17.128kNm + 0.98 \cdot (-27.199089kN) + 9.45kN = -16.178kN \end{aligned}$$

$$N_{CA}^F = \bar{N}_{CA}^1 \cdot X_1 + \bar{N}_{CA}^2 \cdot X_2 + \bar{N}_{CA}^F = -0.06/m \cdot 17.128kNm + 0.98 \cdot (-27.199089kN) - 2.55kN = -28.178kN$$

$$N_{CD}^F = \bar{N}_{CD}^1 \cdot X_1 + \bar{N}_{CD}^2 \cdot X_2 + \bar{N}_{CD}^F = 0 \cdot 17.128kNm + 1 \cdot (-27.199089kN) + 0 = -27.199kN$$

$$N_{CD}^F = N_{DC}^F = N_{DB}^F = N_{BD}^F = -27.199kN$$

## 1.9 WYKRESY „RZECZYWISTYCH” SIŁ PRZEKROJOWYCH



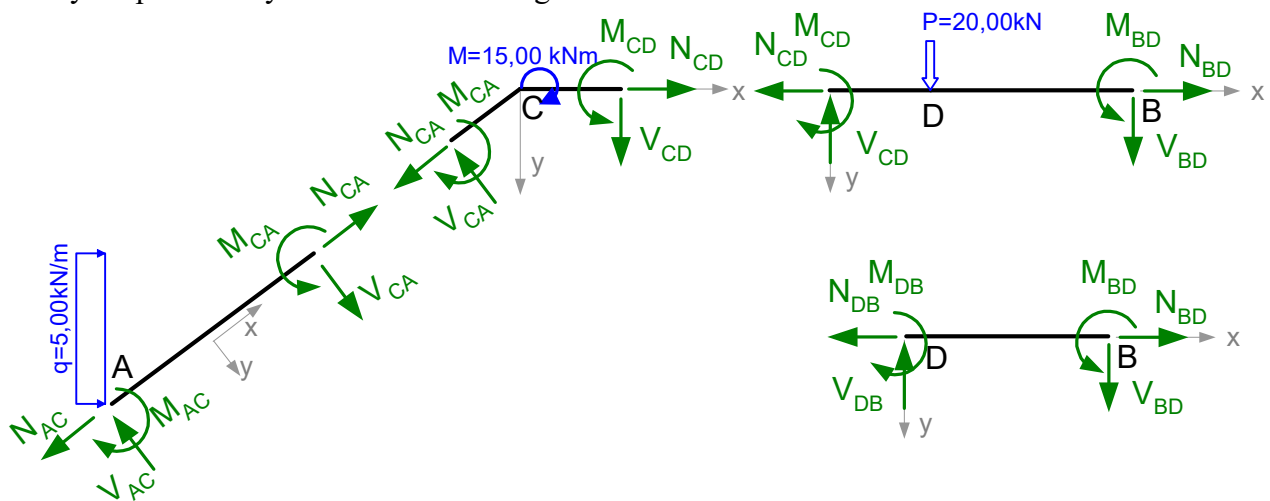
Rzeczywiste wartości sił przekrojowych można by też policzyć rozwiązując układ podstawowy od działającego równocześnie obciążenia danego i znanych już sił hiperstatycznych. Wyniki obliczeń musiałyby być identyczne (w granicach dokładności rachunkowej) jak przedstawione powyżej.

## 1.10 KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA.

Kontrola rozwiązania polega na sprawdzeniu czy otrzymane rozwiązanie jest statycznie i kinematycznie dopuszczalne, czyli czy siły spełniają równania równowagi a przemieszczenia są kinematycznie zgodne. Dokonując kontroli należy pamiętać, że kontroli podlegają tylko te wartości, które występują w obliczeniach kontrolnych.

### 1.10.1 KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Zaleca się, aby do sprawdzenia równań równowagi, podzielić układ na pręty i węzły i dla każdego tak wydzielonego elementu napisać 3 równania równowagi. W tym przypadku kontroli podlegają wszystkie wartości brzegowe sił przekrojowych. Aby sprawdzić czy spełniają równania równowagi rzędne pośrednie należy dodatkowo wydzielić odpowiednie elementy. Na rysunku pokazano elementy, dla których sprawdzimy równania równowagi.



## RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

### Dla pręta AC

$$\sum X = -N_{AC} + N_{CA} + q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = -(-16.178) + (-28.178) + 5 \cdot 3 \cdot 0.8 = 0,$$

$$\sum Y = -V_{AC} + V_{CA} + q \cdot 3m \cdot \sin \alpha = -1.239 + (-7.761) + 5 \cdot 3 \cdot 0.6 = 0,$$

$$\sum M_A = M_{AC} - M_{CA} + V_{CA} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1.5m = 0 - (-16.304) + (-7.761) \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 1.5 = -0.001 \approx 0$$

### Dla węzła C

$$\sum X = N_{CD} - N_{CA} \cdot \cos \alpha - V_{CA} \cdot \sin \alpha = -27.199 - (-28.178) \cdot 0.8 - (-7.761) \cdot 0.6 = 0,$$

$$\sum Y = V_{CD} + N_{CA} \cdot \sin \alpha - V_{CA} \cdot \cos \alpha = 10.698 + (-28.178) \cdot 0.6 - (-7.761) \cdot 0.8 = 0,$$

$$\sum M_c = M_{CA} - M_{CD} + M = -16.304 - (-1.304) + 15 = 0$$

### Dla pręta CB

$$\sum X = -N_{CD} + N_{BD} = -(-27.199) - 27.199 = 0,$$

$$\sum Y = -V_{CD} + V_{BD} + P = -10.698 + (-9.302) + 20 = 0,$$

$$\sum M_C = M_{CD} - M_{BD} + V_{BD} \cdot 6m + P \cdot 2m = -1.304 - (-17.155) + (-9.302) \cdot 6 + 20 \cdot 2 = -0.001 \approx 0$$

### Dla pręta DB

$$\sum X = -N_{DB} + N_{BD} = -(-27.199) - 27.199 = 0,$$

$$\sum Y = -V_{DB} + V_{BD} = -(-9.302) + (-9.302) = 0,$$

$$\sum M_D = M_{DB} + M_{BD} - V_{BD} \cdot 4m = 20.092 - (-17.115) + (-9.302) \cdot 4 = -0.001 \approx 0.$$

## 1.10.2 KONTROLA KINEMATYCZNEJ ZGODNOŚCI ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej zgodności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w tylu miejscach ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności. Można tego dokonać postępując analogicznie jak budowano układ równań kanonicznych, to jest: przyjmując układ podstawowy metody sił, sporządzić wykresy momentów zginających od jednostkowych wartości sił hiperstatycznych i policzyć przemieszczenia w układzie

danym ze wzoru  $\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx$  w miejscach, w których usunięto więzi tworząc układ

podstawowy. Wartości tych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu i połączenia jego elementów. Można oczywiście sprawdzać te same przemieszczenia, które stanowiły podstawę układu równań kanonicznych. W tym przypadku wykresy momentów zginających od jednostkowych wartości sił hiperstatycznych są już określone i wystarczy policzyć przemieszczenia

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx \text{ dla } i = 1, \dots, i, \dots, n_h.$$

W rozwiązywanym przykładzie są to przemieszczenia

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^1 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^1 \cdot M^F \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot (-0.2) \cdot (-2.527) \text{ kNm} + (-0.4) \cdot (-16.304) \text{ kNm}) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (-0.4 \cdot (-1.304) + 4 \cdot (-0.5) \cdot 9.394 + (-0.6) \cdot 20.092) \text{ kNm}^2 + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (-0.6 \cdot 20.092 + 4 \cdot (-0.8) \cdot 1.4885 + (-1) \cdot (-17.115)) \text{ kNm}^2 = -0.015 \frac{\text{kNm}^2}{EI} \approx 0 \end{aligned}$$

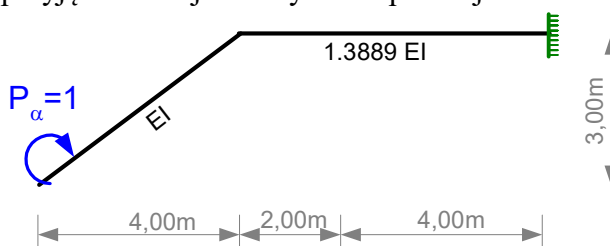


$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^2 \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^2 \cdot M^F \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.9m \cdot (-2.527)kNm + 1.8m \cdot (-16.304)kNm) + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (1.8 \cdot (-1.304) + 4 \cdot 1.5 \cdot 9.394 + 1.2 \cdot 20.092)kNm^3 + \\ &+ \frac{1}{1.3889 \cdot EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (1.2 \cdot 20.092 + 4 \cdot 0.6 \cdot 1.4885 + 0 \cdot (-17.155))kNm^3 = 0.001 \frac{kNm^3}{EI} \approx 0 \end{aligned}$$

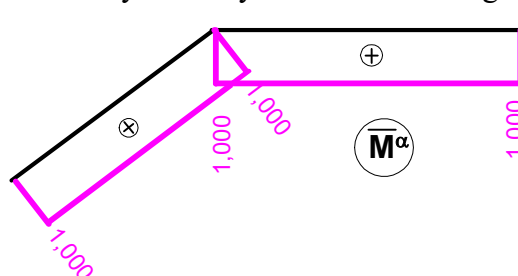
### 1.11 WYZNACZENIE SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA.

Szukane przemieszczenie policzymy na podstawie wzoru  $\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx$ .

Wyznaczyliśmy już momenty  $M^F$  od obciążenia danego w ramie statycznie niewyznaczalnej. Aby skorzystać z przytoczonego wzoru musimy jeszcze rozwiązać dowolny układ podstawowy danej ramy od obciążenia jednostkowego przyłożonego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia  $P_\alpha = 1$ . Może to być taki sam układ, jaki był przyjęty do rozwiązania ramy od obciążenia danego. Może też być dowolny inny układ. Tu przyjęto układ jak na rysunku poniżej.



W wyniku rozwiązania tego układu otrzymano wykres momentów zginających jak na rysunku.



Wartość szukanego przemieszczenia wynosi

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha F} &= \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx = \frac{1}{EI_{AC}} \int_{AC} \bar{M}^\alpha \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{CD}} \int_{CD} \bar{M}^\alpha \cdot M^F \cdot dx + \frac{1}{EI_{DB}} \int_{DB} \bar{M}^\alpha \cdot M^F \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} \cdot (1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot (-2.527)kNm + 1 \cdot (-16.304)kNm) + \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{20.092kNm - 1.304kNm}{2} \cdot 2m \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{1.3889EI} \cdot \frac{20.092kNm - 17.115kNm}{2} \cdot 2m \cdot 1 = -4.196 \frac{kNm^2}{EI} \end{aligned}$$