

# METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

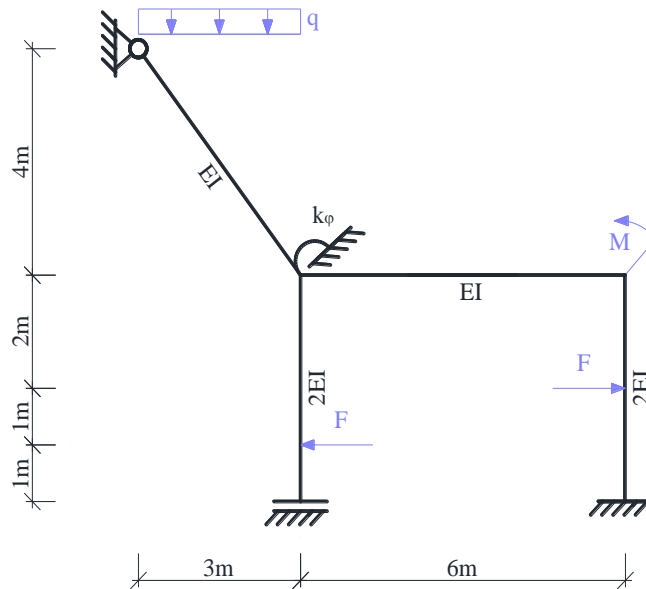
## SPIS TREŚCI

<b>1.</b>	<b>DANE I SZUKANE.....</b>	<b>2</b>
<b>2.</b>	<b>SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI .....</b>	<b>2</b>
<b>3.</b>	<b>OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU .....</b>	<b>3</b>
3.1.	PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW .....	3
3.2.	WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW .....	3
3.3.	STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU .....	4
<b>4.</b>	<b>UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ.....</b>	<b>4</b>
<b>5.</b>	<b>ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SKŁADOWYCH STANÓW OBCIĄŻEŃ .....</b>	<b>5</b>
5.1.	STAN OBCIĄŻENIA DANO .....	5
5.2.	PIERWSZY STAN ROTACYJNY .....	6
5.3.	DRUGI STAN ROTACYJNY .....	7
<b>6.</b>	<b>UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE.....</b>	<b>8</b>
6.1.	POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ .....	8
6.2.	OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ .....	8
6.3.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE .....	8
<b>7.</b>	<b>OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW .....</b>	<b>9</b>
7.1.	OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH.....	9
7.2.	OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	9
7.3.	OBLICZENIE MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH .....	12
7.4.	WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH.....	13
<b>8.</b>	<b>KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA .....</b>	<b>13</b>

## 1. DANE I SZUKANE

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku 1.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń wyznaczyć siły przekrojowe i reakcje.
- Przeprowadzić kontrolę rozwiązania (jego statyczną i kinematyczną dopuszczalność).

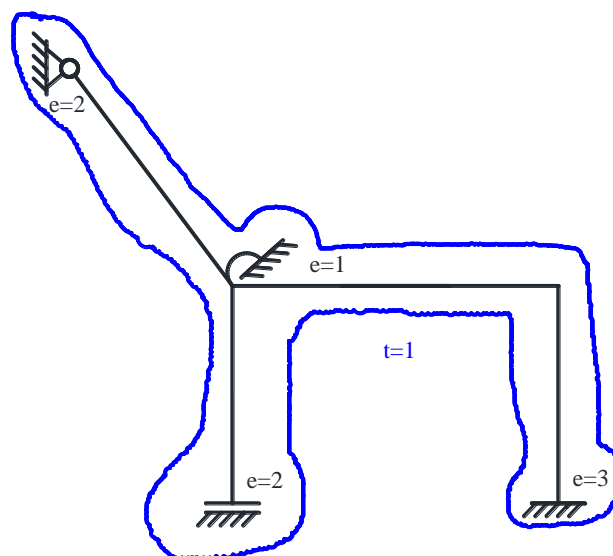


Rys. 1.1. Schemat statyczny

Dane do obliczeń:  $F = 8 \text{ kN}$ ;  $q = 4 \text{ kN/m}$ ;  $M = 20 \text{ kN m}$ ;  $k_\varphi = 10 \text{ EI/m}$ .

## 2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności



Rys. 2.1. Tarcze i więzi

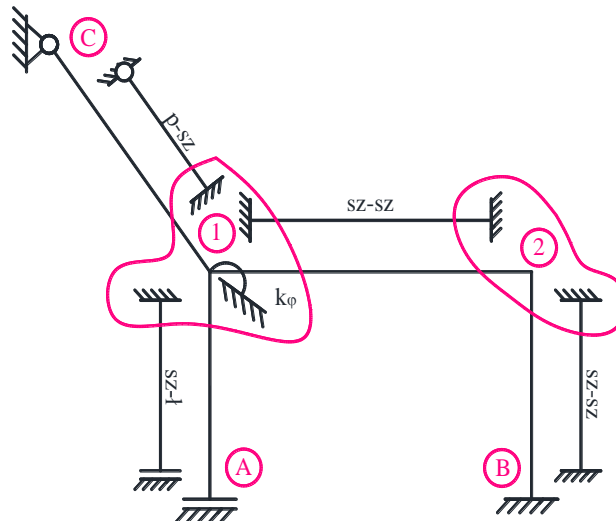
$$t = 1, e = 2 + 2 + 3 + 1 = 8,$$

$$n_h = e - 3 \cdot t = 8 - 3 = 5$$

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją ośmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

### 3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZLNOŚCI UKŁADU

#### 3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW



Rys. 3.1.1. Numeracja węzłów i typów prętów

Z przyjętego podziału na pręty wynika, że:

- Dla prętów i-j stosowane będą wzory transformacyjne w postaci:
- 

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o$$

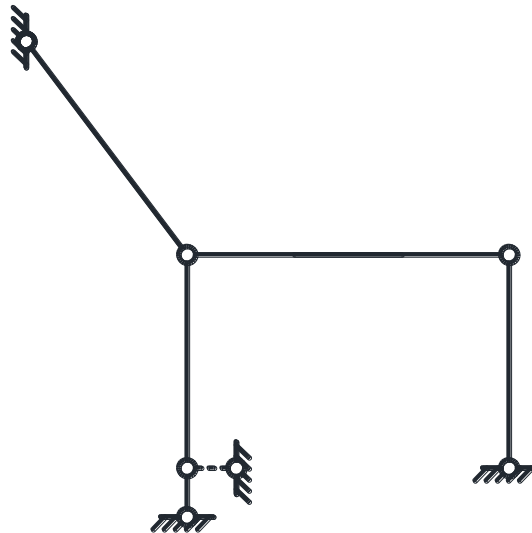
$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o$$

Uwzględniając, że  $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$ ,  $\varphi_{2B} = \varphi_{21} = \varphi_2$ , stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów  $n_\varphi = 2$ .

#### 3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym a prawym utwierdzony z przesuwarem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



Rys. 3.2.1. Model przegubowy

Oszacowani liczby stopni swobody przesuwu węzłów

$$n_{\delta} \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 7 - 6 - 8 = 0,$$

gdzie:  $w = 7$  - liczba węzłów modelu,  
 $p = 6$  - liczba prętów w modelu,  
 $r = 8$  - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że układ może być nieprzesuwny, jednak dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy jest geometrycznie niezmienny, co oznacza, że układ dany jest nieprzesuwny.

**UWAGA:** Ponieważ dany układ jest nieprzesuwny, w dalszym etapie układ podstawowy metody przemieszczeń nie będzie rozwiązywany od stanów translacyjnych. We wzorach transformacyjnych pomijany będzie człon wynikający z kąta obrotu cięciwy ( $\psi_{ij} = 0$ ).

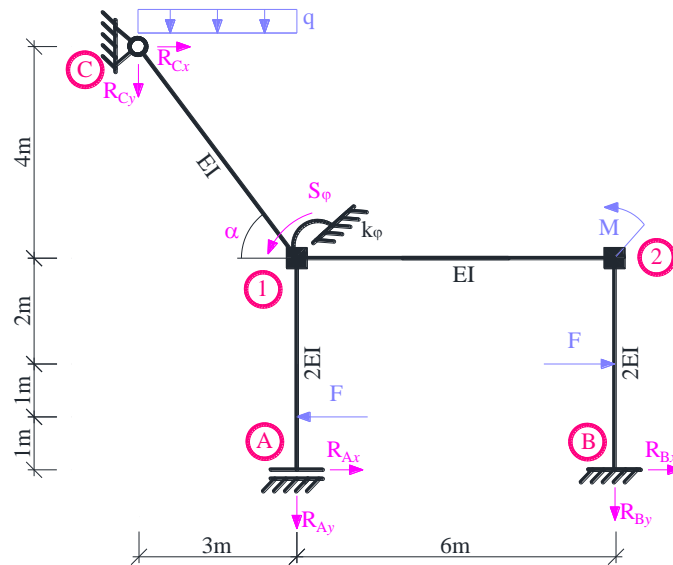
### 3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU

Stożek geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

$$n_g = n_{\varphi} + n_{\delta} = 2 + 0 = 2.$$

## 4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMISZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie  $n_{\varphi}$  więzi rotacyjnych i  $n_{\delta}$  więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne – oznaczone czarnymi kwadratami na rysunku poniżej).



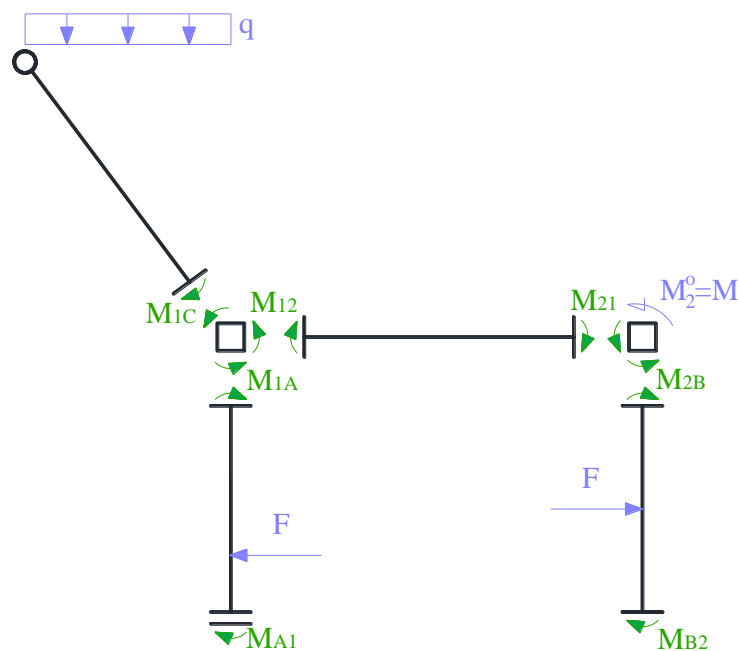
Rys. 4.1. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Równania kanoniczne metody sił są równaniami przemieszczeniowymi. Ogólna postać układu równań metody sił ma postać

## 5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SKŁADOWYCH STAÓW OBCIĄŻŃ

### 5.1. STAN OBCIĄŻENIA DANGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = 0$ . Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty brzegowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



Rys. 5.1.1. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego

$$M_{1A}^O = -FL\xi(1 - \xi/2) = -8kN \cdot 4m \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{3}{4 \cdot 2}) = -15kN \cdot m,$$

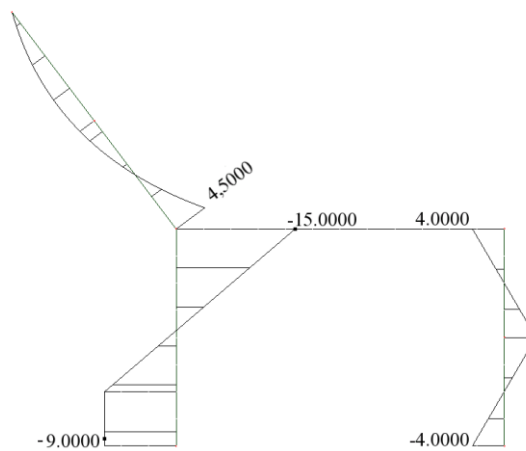
$$M_{A1}^O = -FL\xi^2/2 - 8kN \cdot 4m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2} = -9kN \cdot m,$$

$$M_{1C}^O = qL^2/8 = \frac{4kN/m \cdot (3m)^2}{8} = 4,5kN \cdot m,$$

$$M_{2B}^O = FL/8 = \frac{8kN \cdot 4m}{8} = 4kN \cdot m,$$

$$M_{B2}^O = -FL/8 = \frac{-8kN \cdot 4m}{8} = -4kN \cdot m,$$

$$M_{C1}^O = M_{12}^O = M_{21}^O = 0.$$



Rys. 5.1.2. Wykres momentów  $M^O$  w  $kN \cdot m$ .

## 5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_1 = \varphi_{1j} = 1$ ,  $\varphi_2 = 0$  oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}}(a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}}(a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty brzegowe wynoszą:

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}}(a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{4m}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1}{2} \frac{EI}{m},$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

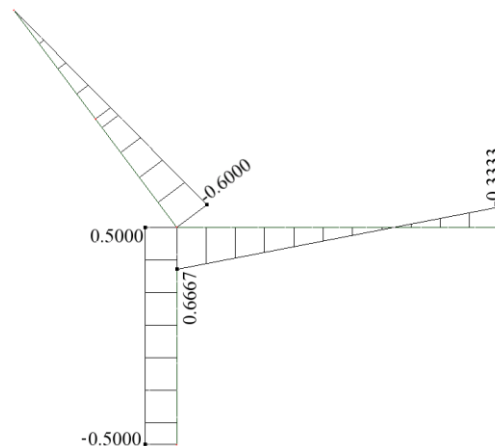
$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}}(a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{4m}(4 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1}{2} \frac{EI}{m}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}}(a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m}(3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{3}{5} \frac{EI}{m}$$

$$M_{C1}^1 = 0, M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$

$$S_{\varphi_1}^1 = k_1^{\varphi} \cdot \varphi_1 = 10 \frac{EI}{m} \cdot 1 = 10 \frac{EI}{m},$$

**Uwaga:** Moment  $S_{\varphi_1}^1$  działający na więź sprężystą traktowany jest jak moment brzegowy pręta: prawoskrętny ”+”, lewoskrętny ”-”. Dodatnia reakcja więzi jest lewoskrętna, tak jak moment brzegowy pręta)



Rys. 5.2.1. Wykres momentów  $M^I$  w  $EI/m$ .

### 5.3. DRUGI STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_2 = \varphi_{2j} = 1$ ,  $\varphi_1 = 0$  oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{2j}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}}(a_{2j} \cdot \varphi_{2j} + b_{2j} \cdot \varphi_{j2}),$$

$$M_{j2}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}}(a_{j2} \cdot \varphi_{j2} + b_{j2} \cdot \varphi_{2j}).$$

Momenty brzegowe wynoszą:

$$M_{21}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{12}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} \frac{EI}{m}$$

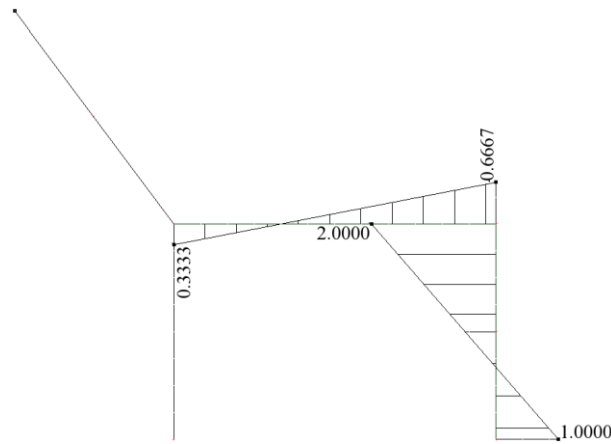
$$M_{2B}^2 = \frac{EI_{1B}}{L_{1B}}(a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2}) = \frac{2EI}{4m}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^2 = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}}(a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B}) = \frac{2EI}{4m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1 \frac{EI}{m},$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$M_{C1}^2 = M_{1C}^2 = M_{12}^2 = M_{21}^2 = 0, M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$

$$S_{\varphi_1}^2 = k_1^{\varphi} \cdot \varphi_1 = 10 \frac{EI}{m} \cdot 0 = 0,$$



Rys. 5.3.1. Wykres momentów  $M^2$  w  $EI/m$ .

## 6. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

### 6.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2o} = 0$$

### 6.2. OBLICZENIE WSPÓLCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^{\varphi} = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^{\varphi} = (0,6667 + 0,5 + 0,6 + 10) \frac{EI}{m} = 11,7667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{12} = \sum_j M_{1j}^2 = M_{12}^2 + M_{1A}^2 + M_{1C}^2 = (0,3333 + 0 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o = M_{12}^o + M_{1A}^o + M_{1C}^o = (0 - 15 + 4,5) kN \cdot m = -10,5 kN \cdot m,$$

$$k_{21} = \sum_j M_{2j}^1 = M_{21}^1 + M_{2B}^1 = (0,3333 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k_2^{\varphi} = M_{21}^2 + M_{2B}^2 + k_2^{\varphi} = (0,6667 + 2 + 0) \frac{EI}{m} = 2,6667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{2o} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = [0 + 4 - (-20)] kN \cdot m = 24 kN \cdot m.$$

### 6.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$11,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 10,5 kN \cdot m = 0,$$

$$0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,6667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 24 kN \cdot m = 0,$$



$$\varphi_1 = 1,1514 \frac{kN \cdot m^2}{EI}, \quad \varphi_2 = -9,1439 \frac{kN \cdot m^2}{EI}.$$

## 7. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

### 7.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^o,$$

Momenty brzegowe:

$$M_{12} = M_{12}^1 \cdot \varphi_1 + M_{12}^2 \cdot \varphi_2 + M_{12}^o = \left[ \frac{2}{3} \cdot 1,1514 + \frac{1}{3} \cdot (-9,1439) + 0 \right] kN \cdot m = -2,2804 kN \cdot m$$

$$M_{21} = M_{21}^1 \cdot \varphi_1 + M_{21}^2 \cdot \varphi_2 + M_{21}^o = \left[ \frac{1}{3} \cdot 1,1514 + \frac{2}{3} \cdot (-9,1439) + 0 \right] kN \cdot m = -5,7121 kN \cdot m$$

$$M_{1A} = M_{1A}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1A}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1A}^o = [0,5 \cdot 1,1514 + 0 \cdot (-9,1439) + (-15)] kN \cdot m = -14,4243 kN \cdot m$$

$$M_{A1} = M_{A1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{A1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{A1}^o = [(-0,5) \cdot 1,1514 + 0 \cdot (-9,1439) + (-9)] kN \cdot m = -9,5757 kN \cdot m$$

$$M_{1C} = M_{1C}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1C}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1C}^o = [0,6 \cdot 1,1514 + 0 \cdot (-9,1439) + 4,5] kN \cdot m = 5,1908 kN \cdot m$$

$$M_{C1} = M_{C1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{C1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{C1}^o = [0 \cdot 1,1514 + 0 \cdot (-9,1439) + 0] kN \cdot m = 0$$

$$M_{2B} = M_{2B}^1 \cdot \varphi_1 + M_{2B}^2 \cdot \varphi_2 + M_{2B}^o = [0 \cdot 1,1514 + 2 \cdot (-9,1439) + 4] kN \cdot m = -14,2878 kN \cdot m$$

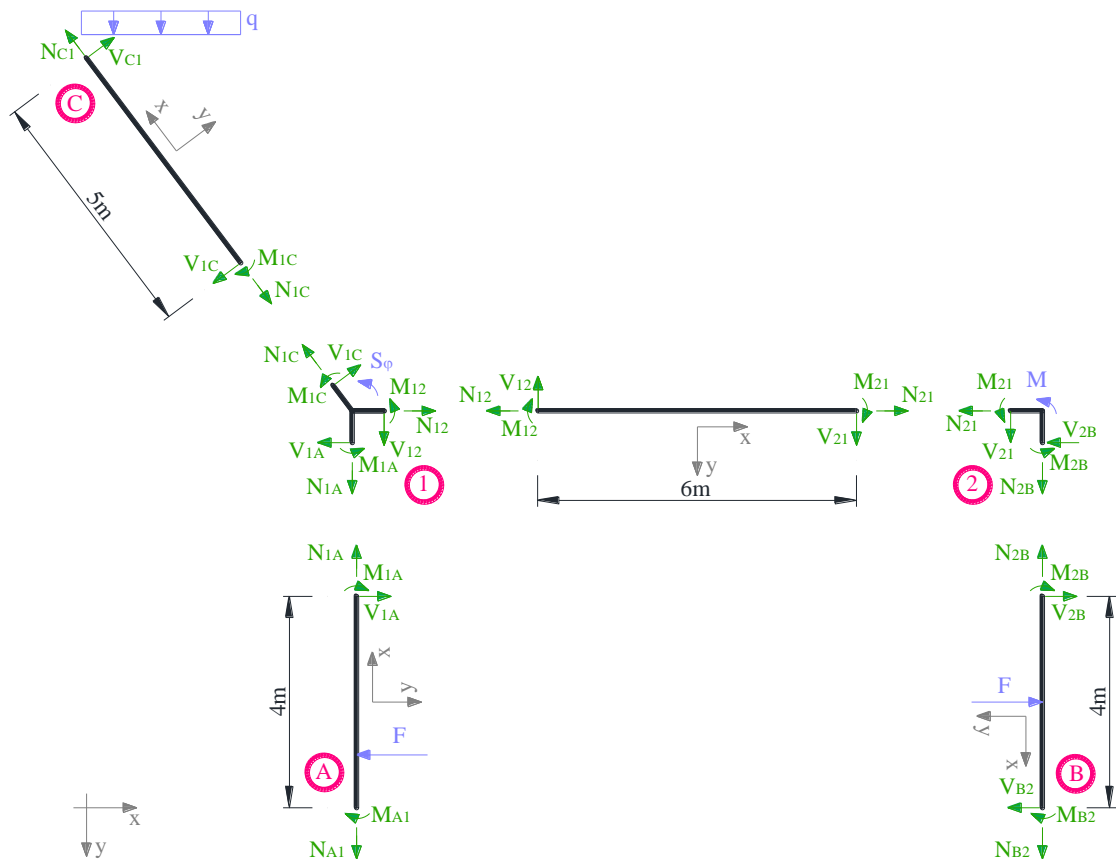
$$M_{B2} = M_{B2}^1 \cdot \varphi_1 + M_{B2}^2 \cdot \varphi_2 + M_{B2}^o = [0 \cdot 1,1514 + 1 \cdot (-9,1439) + (-4)] kN \cdot m = -13,1439 kN \cdot m$$

Moment zginający w więzi sprężystej:

$$S_\varphi = S_{\varphi_1}^1 \cdot \varphi_1 + S_{\varphi_1}^2 \cdot \varphi_2 = [10 \cdot 1,1514 + 0 \cdot (-9,1439)] kN \cdot m = 11,5140 kN \cdot m$$

### 7.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 7.2.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

### Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{21}^F + V_{21} \cdot 6m = [-2,2804 - 5,7121 + V_{21} \cdot 6] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{21} = 1,3321,$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = [V_{12} - 1,3321] kN = 0 \Rightarrow V_{12} = 1,3321,$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$$

### Pręt 1-A

$$\sum V = -V_{1A} + F = [-V_{1A} + 8] kN = 0 \Rightarrow V_{1A} = 8kN,$$

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 4m - F \cdot 1m = [(-9,5757) + (-14,4243) + 8 \cdot 4 - 8 \cdot 1] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A}.$$

### Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C} + V_{1C} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m = [5,1908 + V_{1C} \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = -4,6382kN,$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + V_{C1} \cdot 5m - q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = [5,1908 + V_{C1} \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{C1} = 2,5618kN,$$

$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} + q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = [N_{1C} - N_{C1} + 4 \cdot 3 \cdot 0,8] kN = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C} + 9,6kN.$$

### Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2} + M_{2B} + V_{2B} \cdot 4m + F \cdot 2m = [(-13,1439) + (-14,4878) + V_{2B} \cdot 4 + 8 \cdot 2] kN \cdot m = 0$$

$$\Rightarrow V_{2B} = 2,8579 kN,$$

$$\sum V = V_{2B} - V_{B2} + F = [2,8579 - V_{B2} + 8] kN = 0 \Rightarrow V_{B2} = 10,8579 kN,$$

$$\sum N = N_{2B} - N_{B2} = 0 \Rightarrow N_{B2} = N_{2B}.$$

### Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} + M = [-5,7121 + (-14,2878) + 20] kN \cdot m = 0,0001,$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = [2,8579 + N_{21}] kN = 0 \Rightarrow N_{21} = -2,8579 kN,$$

$$\sum Y = V_{21} - N_{2B} = [1,3321 - N_{2B}] kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = 1,3321 kN.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B  $N_{B2} = N_{2B} = 1,3321 kN$ .

Z trzeciego równania dla pręta 1-2  $N_{12} = N_{21} = -2,8579 kN$ .

### Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1C} + S_1^\varphi = [(-2,2804) + (-14,4243) + 5,1908 + 11,5140] kN \cdot m = 0,0002 kN \cdot m,$$

$$\sum X = N_{12} - V_{1A} + V_{1C} \sin \alpha - N_{1C} \cdot \cos \alpha = [-2,8579 - 8 + (-4,6382) \cdot 0,8 - N_{1C} \cdot 0,6] kN = 0$$

$$\Rightarrow N_{1C} = -24,2808 kN.$$

$$\sum Y = V_{12} + N_{1A} - V_{1C} \cdot \cos \alpha - N_{1C} \cdot \sin \alpha = [1,3321 + N_{1A} - (-4,6382) \cdot 0,6 - (-24,2808) \cdot 0,8] kN = 0 kN$$

$$\Rightarrow N_{1A} = -23,5397 kN$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A  $N_{A1} = N_{1A} \Rightarrow N_{A1} = -23,5397 kN$ .

Z trzeciego równania dla pręta 1-C  $N_{C1} = N_{1C} + 9,6 kN = -24,2808 kN + 9,6 kN = -14,6808 kN$

Aby sprawdzić globalne równania równowagi, obliczamy reakcje wykorzystując obliczone siły osiowe i tnące

$$R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ay} = N_{A1} = -23,5397 kN$$

$$R_{Bx} = V_{B2} = -10,8579 kN$$

$$R_{By} = N_{B2} = 1,3321 kN$$

$$R_{Cx} = V_{C1} \cos \alpha - N_{C1} \sin \alpha = 2,5618 \cdot 0,8 - (-14,6808 \cdot 0,6) = 10,8579 kN$$

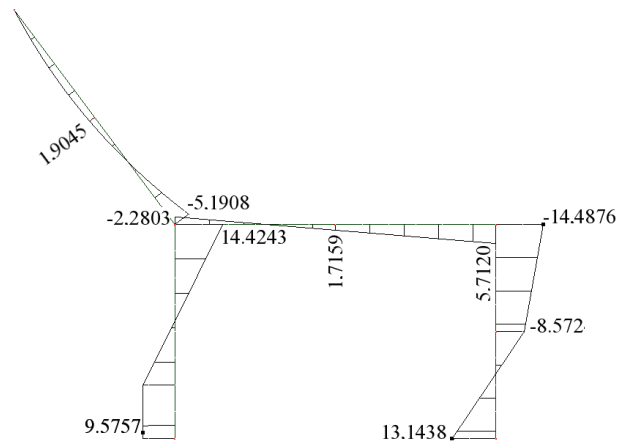
$$R_{Cy} = -V_{C1} \sin \alpha - N_{C1} \cos \alpha = -2,5618 \cdot 0,6 - (-14,6808 \cdot 0,8) = 10,2076 kN$$

### Równowaga globalna

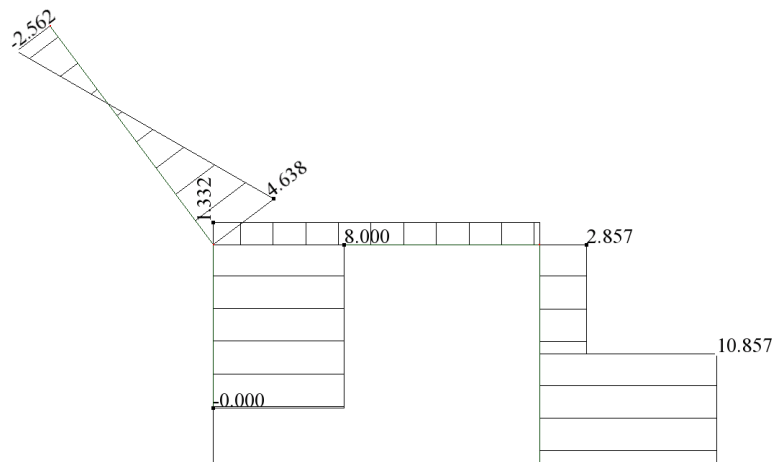
$$\sum X = R_{Bx} + R_{Cx} - F + F = [-10,8579 + 10,8579 - 8 + 8] kN = 0,$$



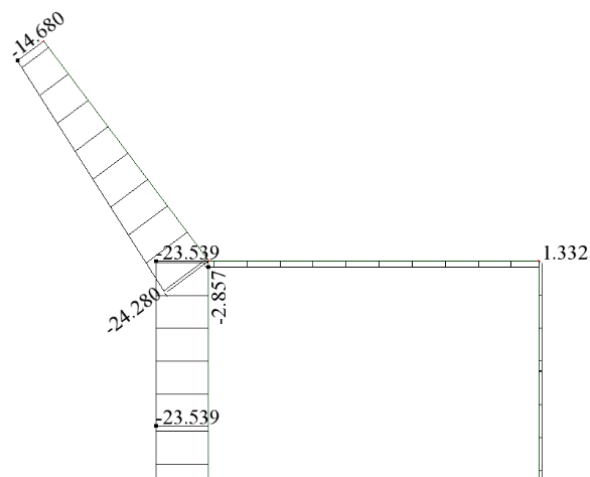
## 7.4. WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH



Rys. 5.7.3.1. Wykres momentów zginających  $M$  w  $kN \cdot m$



Rys. 5.7.3.2. Wykres sił tnących  $V$  w  $kN$



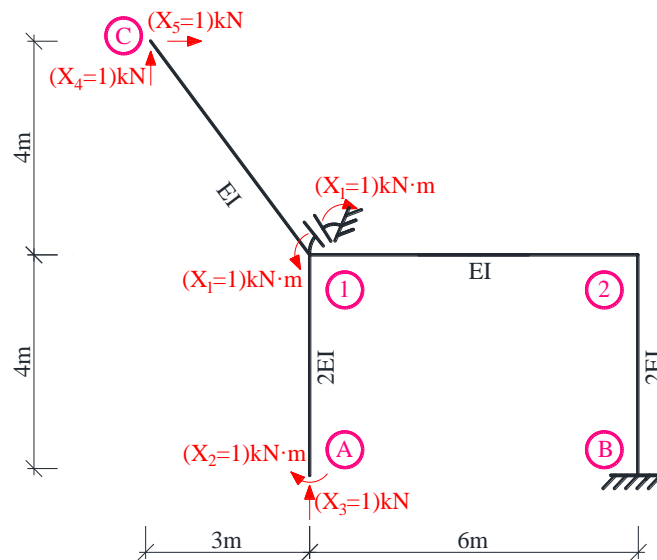
Rys. 5.7.3.3. Wykres sił osiowych  $N$  w  $kN$

## 8. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na

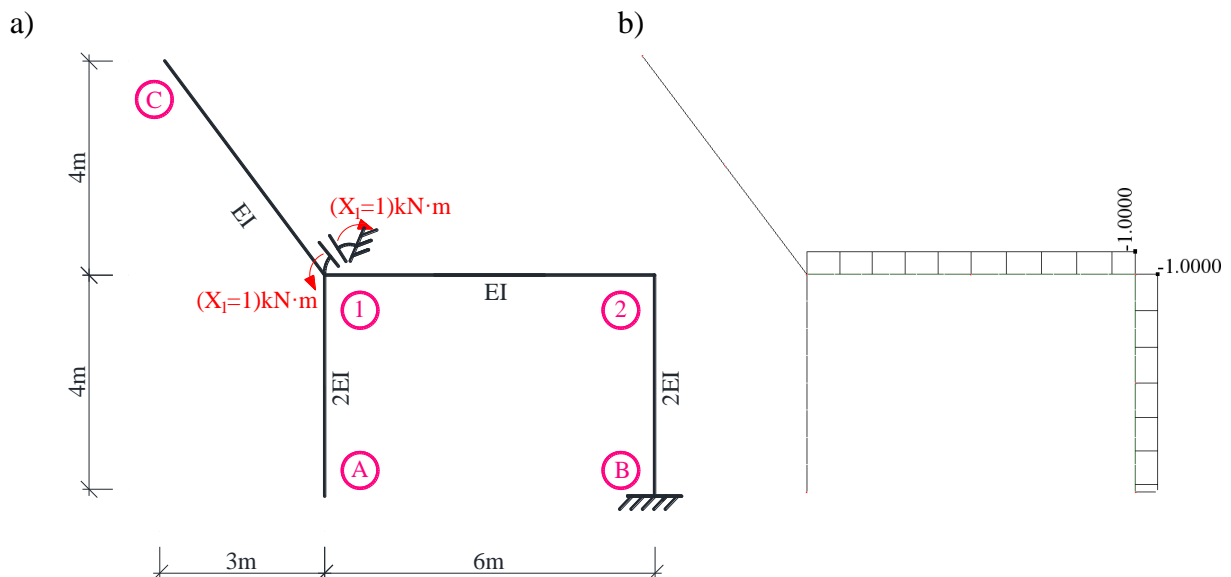
kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając pięć więzi podporowych. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

$$\Delta_{iF} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_i$$



Rys. 8.1. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego

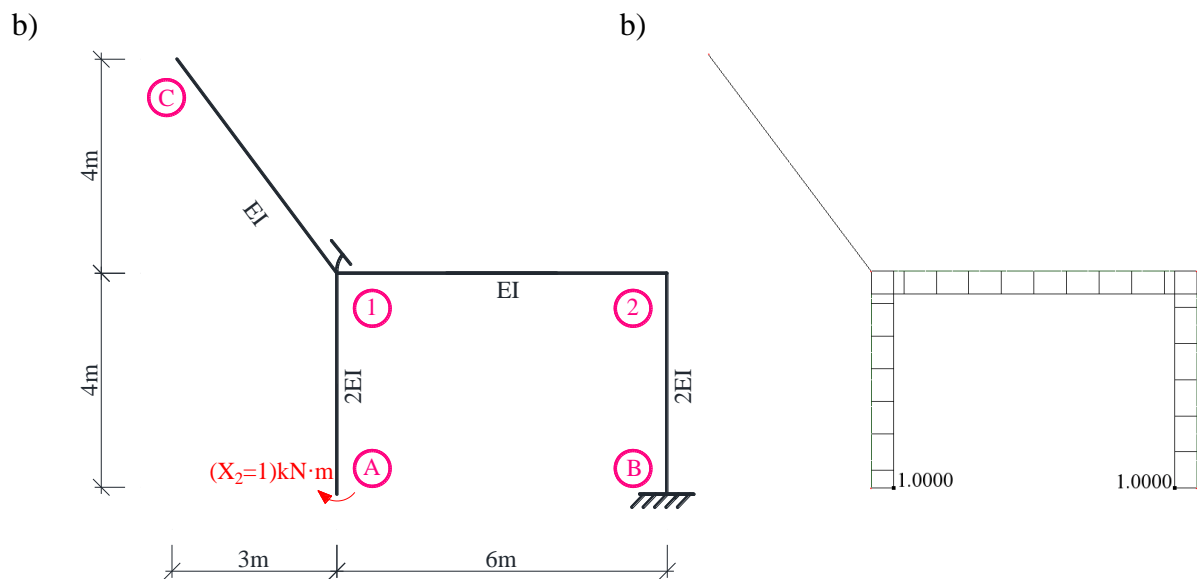
- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej  $(X_1 = 1)\text{kN}\cdot\text{m}$



Rys. 8.2. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową  $(X_1 = 1)\text{kN}\cdot\text{m}$ ,  
b) wykres momentów zginających  $\bar{M}^1$  w  $\text{kN}\cdot\text{m}$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_1 = \left\{ \frac{6}{6} [(-1) \cdot (-2,2803) + 4 \cdot (-1) \cdot 1,7159 + (-1) \cdot 5,7121] + \right. \\ &+ \frac{2}{6 \cdot 2} [(-1) \cdot (-14,2876) + 4 \cdot (-1) \cdot (-11,4298) + (-1) \cdot (-8,5720)] + \\ &+ \left. \frac{2}{6 \cdot 2} [(-1) \cdot (-8,5720) + 4 \cdot (-1) \cdot 2,2859 + (-1) \cdot 13,1438] + \frac{1 \cdot 11,5140}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = \\ &= [-10,2952 + 11,4298 + (-2,2859) + 1,1514] \frac{kN \cdot m^2}{EI} = -0,0001 \frac{kN \cdot m^2}{EI} \approx \Delta_{1F}^{rzecz} = 0 \end{aligned}$$

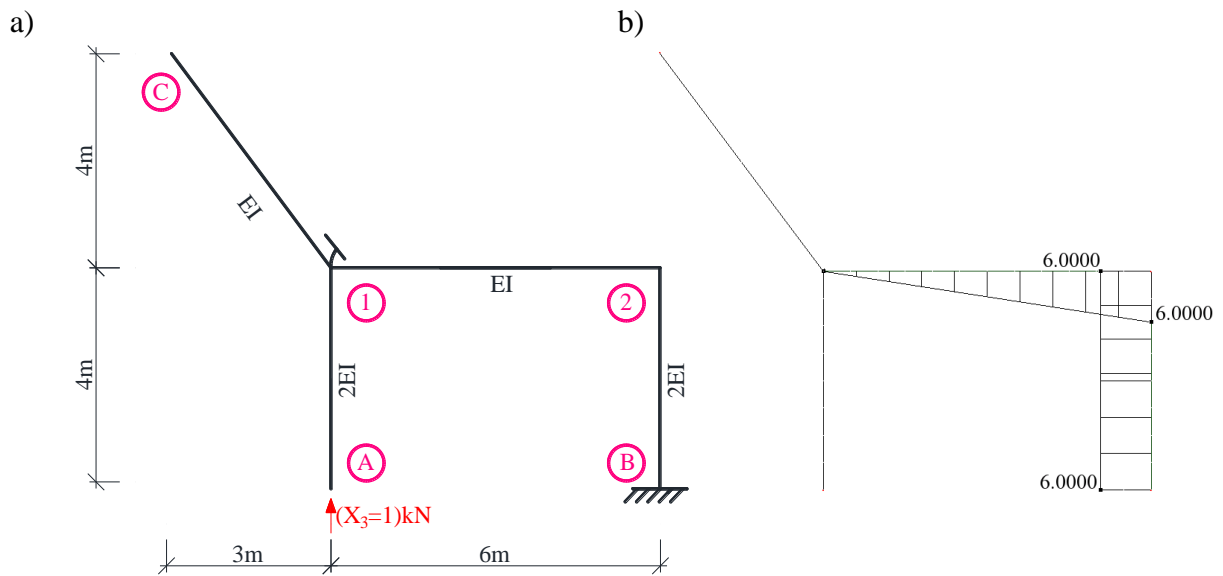
- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej ( $X_2 = 1$ ) kN·m



Rys. 8.3. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową ( $X_2 = 1$ ) kN·m, b) wykres momentów zginających  $\bar{M}^2$  w kN·m

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_2 = \left\{ \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot (-9,5757) + \frac{3}{6 \cdot 2} [1 \cdot (-9,5757) + 4 \cdot 1 \cdot 2,4243 + 1 \cdot 14,4243] + \right. \\ &+ \frac{6}{6} [1 \cdot (-2,2803) + 4 \cdot 1 \cdot 1,7159 + 1 \cdot 5,7121] + \frac{2}{6 \cdot 2} [1 \cdot (-14,2876) + 4 \cdot 1 \cdot (-11,4298) + 1 \cdot (-8,5720)] + \\ &+ \left. \frac{2}{6 \cdot 2} [1 \cdot (-8,5720) + 4 \cdot 1 \cdot 2,2859 + 1 \cdot 13,1438] \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = [(-4,7879) + 3,6365 + 10,2952 + (-11,4298) + \\ &+ 2,2859] \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 0,0001 \frac{kN \cdot m^2}{EI} \approx \Delta_{2F}^{rzecz} = 0 \end{aligned}$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej ( $X_3 = 1$ )kN



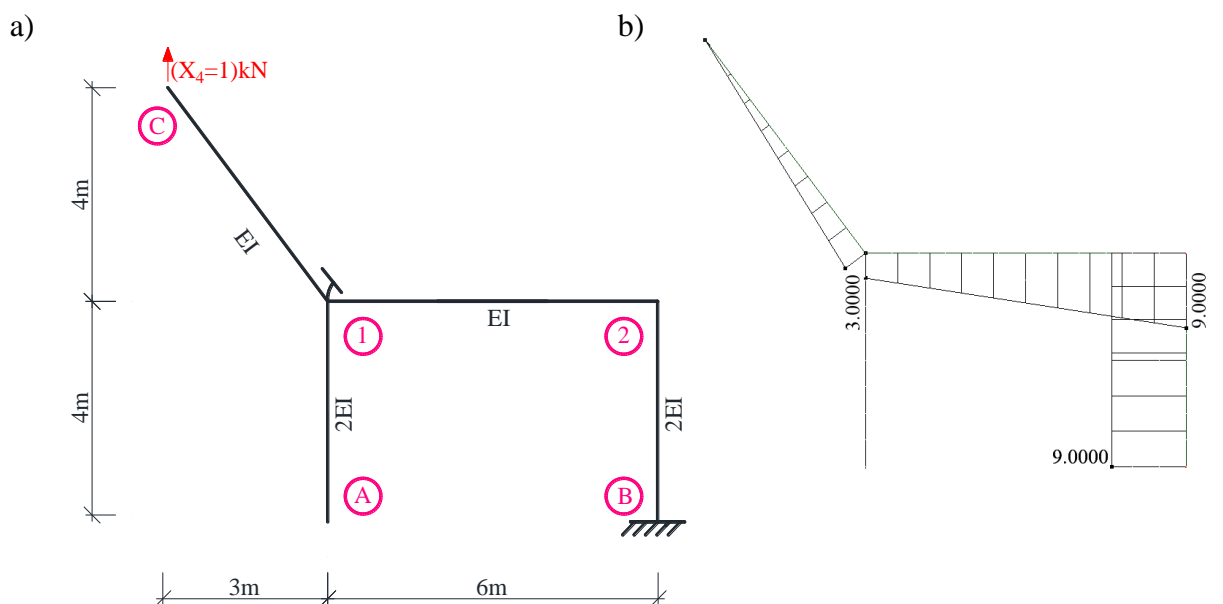
Rys. 8.4. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową ( $X_3 = 1$ )kN, b) wykres momentów zginających  $\bar{M}^3$  w kN·m

$$\Delta_{3F} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_3 = \left\{ \frac{6}{6} [0 \cdot (-2,2803) + 4 \cdot 3 \cdot 1,7159 + 6 \cdot 5,7121] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{6 \cdot 2} [6 \cdot (-14,2876) + 4 \cdot 6 \cdot (-11,4298) + 6 \cdot (-8,5720)] + \frac{2}{6 \cdot 2} [6 \cdot (-8,5720) + 4 \cdot 6 \cdot 2,2859 + 6 \cdot 13,1438] \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} =$$

$$= [54,8628 + (-68,5788) + 13,7154] \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -0,0006 \frac{kN \cdot m^3}{EI} \approx \Delta_{4F}^{rzecz} = 0$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej ( $X_4 = 1$ )kN

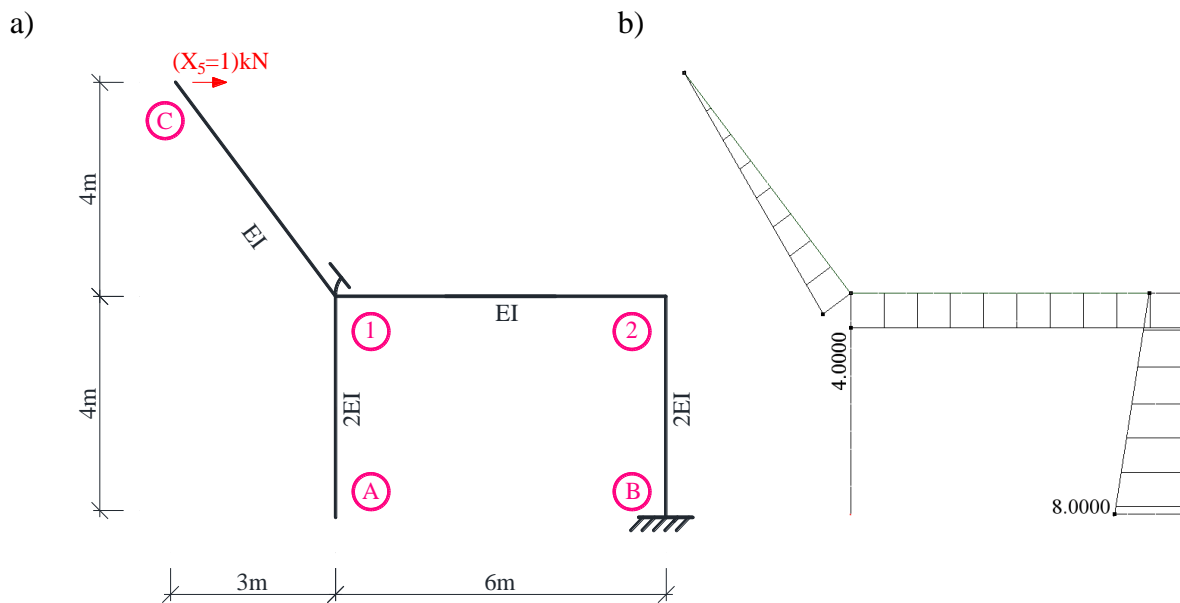


Rys. 8.5. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową ( $X_4 = 1$ )kN, b) wykres momentów zginających  $\bar{M}^4$  w kN·m



$$\Delta_{4F} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^4 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^4 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_4 = \left\{ \frac{5}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 1,9045 + 3 \cdot (-5,1908)] + \right. \\ \left. + \frac{6}{6} [3 \cdot (-2,2803) + 4 \cdot 6 \cdot 1,7159 + 9 \cdot 5,7121] + \frac{2}{6 \cdot 2} [9 \cdot (-14,2876) + 4 \cdot 9 \cdot (-11,4298) + 9 \cdot (-8,5720)] + \right. \\ \left. + \frac{2}{6 \cdot 2} [9 \cdot (-8,5720) + 4 \cdot 9 \cdot 2,2859 + 9 \cdot 13,1438] \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = [-3,4546 + 85,7484 + (-102,868) + \\ 20,5731] \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -0,0013 \frac{kN \cdot m^3}{EI} \approx \Delta_{5F}^{rzecz} = 0$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej ( $X_5 = 1$ )kN



Rys. 8.6 a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową ( $X_5 = 1$ )kN,  
b) wykres momentów zginających  $\bar{M}^5$  w kN·m

$$\Delta_{5F} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^5 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^5 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_5 = \left\{ \frac{5}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 1,9045 + 4 \cdot (-5,1908)] + \right. \\ \left. + \frac{6}{6} [4 \cdot (-2,2803) + 4 \cdot 4 \cdot 1,7159 + 4 \cdot 5,7121] + \frac{2}{6 \cdot 2} [4 \cdot (-14,2876) + 4 \cdot 5 \cdot (-11,4298) + 6 \cdot (-8,5720)] + \right. \\ \left. + \frac{2}{6 \cdot 2} [6 \cdot (-8,5720) + 4 \cdot 7 \cdot 2,2859 + 8 \cdot 13,1438] \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = [-4,6061 + 41,1808 + (-56,1964) + \\ + 19,6206] \frac{kN \cdot m^3}{EI} = 0,0011 \frac{kN \cdot m^3}{EI} \approx \Delta_{6F}^{rzecz} = 0$$