

Literatura

Zienkiewicz O. C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.

Dąbrowski O., Teoria dźwigarów powierzchniowych, Wyd. Polit. Wrocławskiej, 1987.

Konderla P., Kasprzak T., Metody komputerowe w teorii sprężystości. Część I. Metoda elementów skończonych. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1997.

Rakowski G., Kacprzyk Z., Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Polit. Warszawskiej, Warszawa 1993.

Plan wykładu

Wykład 1

1. Wprowadzenie
 - 1.1. Miejsce metod numerycznych w analizie zagadnień mechaniki
 - 1.2. Sformułowania zagadnień brzegowych i związane z nimi metody numeryczne
 - 1.3. Twierdzenie Lagrange'a

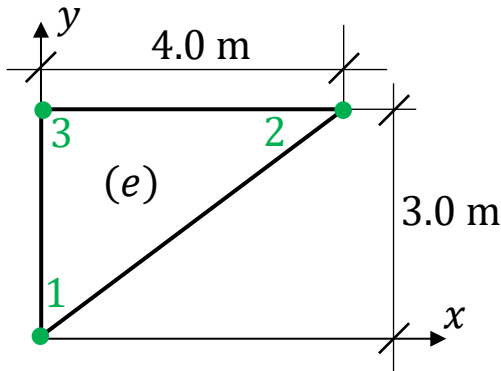
Wykład 2

2. Algorytm *MES* dla PSN
 - 2.1. Wybrane operacje macierzowe
 - 2.2. Równania modelu fizycznego tarczy w zapisie macierzowym
 - 2.3. Trójkątny liniowy element skończony
 - 2.4. Równania równowagi elementu
 - 2.5. Agregacja modelu. Globalne równania równowagi

Wykład 3

- 2.6. Kinematyczne (przemieszczeniowe) warunki brzegowe
 - 2.7. Rozwiązanie
3. Przykłady liczbowe rozwiązania tarczy *MES*

3.1. Macierz sztywności elementu



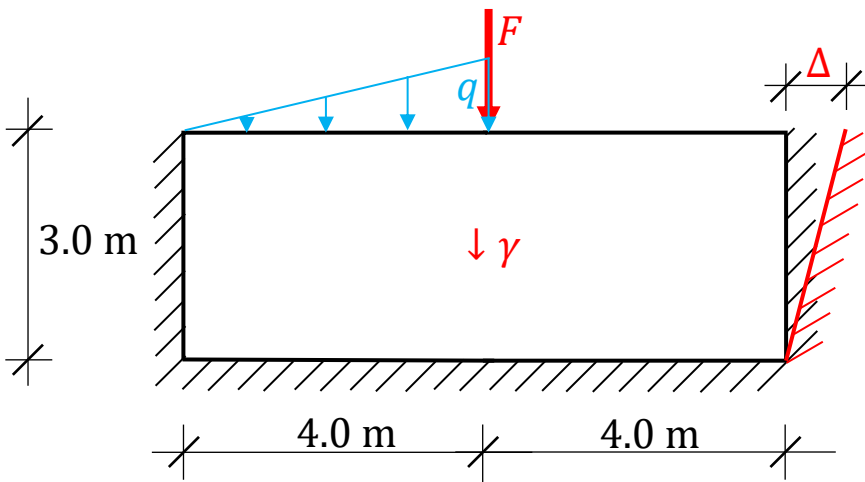
$$E = 30 \times 10^6 \text{ kPa} \quad \nu = 0.2$$

$$\text{grubość } h = 0.2304 \text{ m}$$

$$[k^e] = \begin{matrix} & \beta = 1 & \beta = 2 & \beta = 3 \\ \alpha = 1 & \begin{bmatrix} 1.92 & 0 \\ 0 & 4.8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1.44 \\ -0.72 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.92 & 1.44 \\ 0.72 & -4.8 \end{bmatrix} \\ \alpha = 2 & \begin{bmatrix} 0 & -0.72 \\ -1.44 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.7 & 0 \\ 0 & 1.08 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2.7 & 0.72 \\ 1.44 & -1.08 \end{bmatrix} \\ \alpha = 3 & \begin{bmatrix} -1.92 & 0.72 \\ 1.44 & -4.8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2.7 & 1.44 \\ 0.72 & -1.08 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.62 & -2.16 \\ -2.16 & 5.88 \end{bmatrix} \end{matrix} \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

3.2. Transformacja do układu lokalnego

3.3. Przykład 1



$$E = 30 \times 10^6 \text{ kPa}$$

$$\nu = 0.2$$

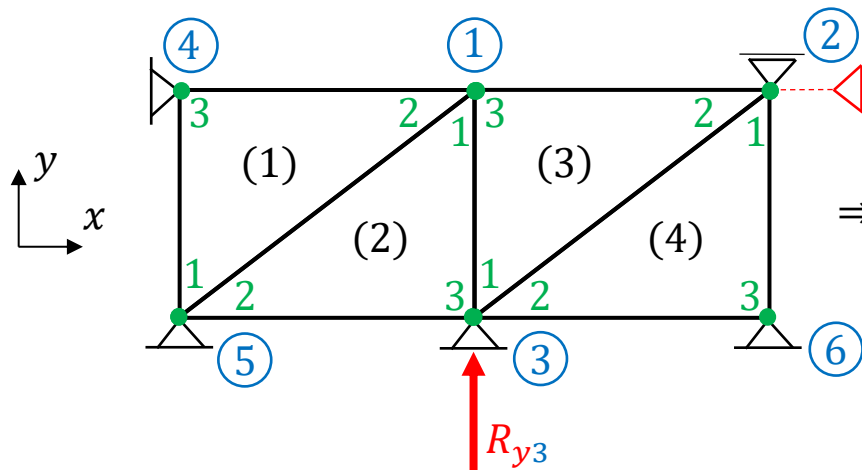
$$h = 0.2304 \text{ m}$$

$$q = 30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$F = 50 \text{ kN}$$

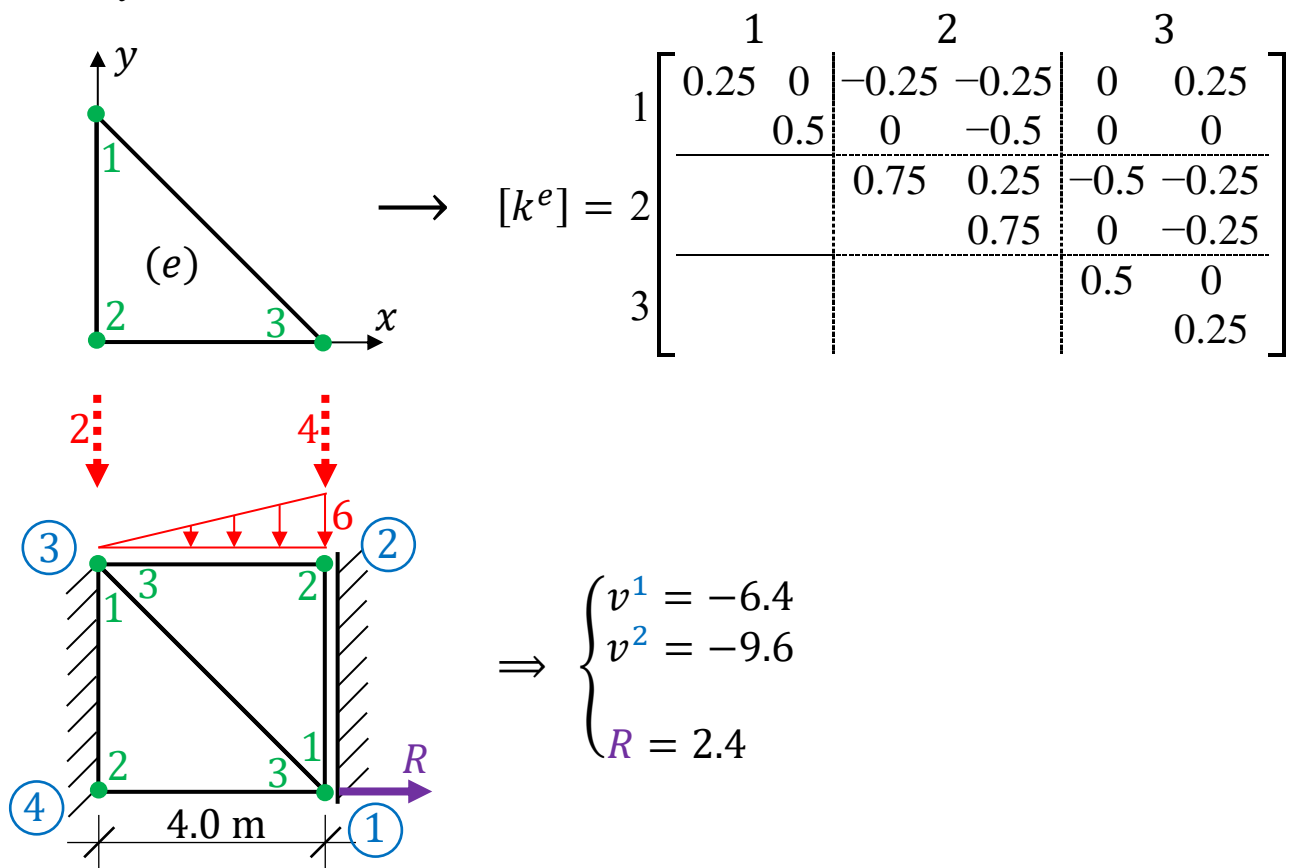
$$\gamma = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$$



$$\begin{cases} u^1 = 0.3165 \times 10^{-6} \text{ m} \\ v^1 = -11.1459 \times 10^{-6} \text{ m} \\ R_{y3} = 120.64 \text{ kN} \end{cases} \Rightarrow \{\tilde{\sigma}_2\} = \begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -23 \\ -116 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ kPa}$$

3.4. Przykład 2



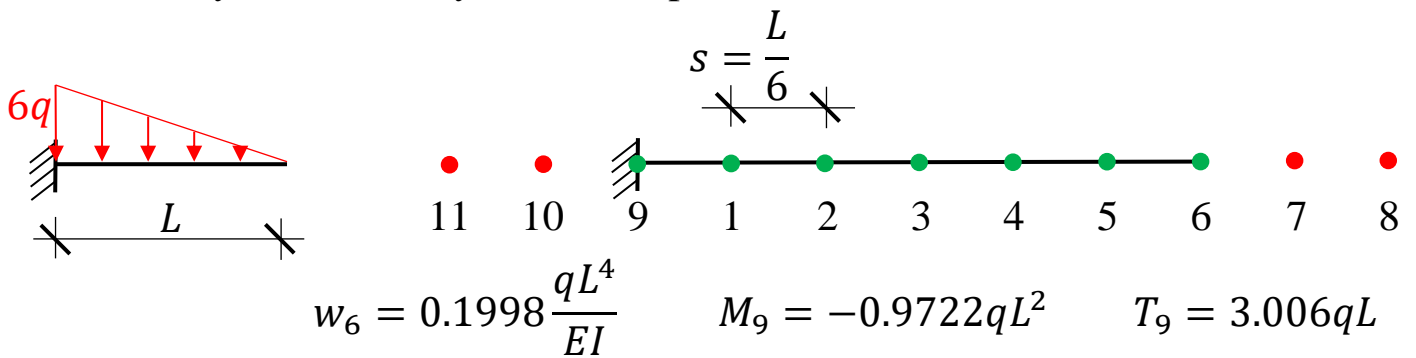
Wykład 4

4. Algorytm *MES* dla płaskiego układu prętowego. Statyka liniowa, teoria II rzędu i stateczność początkowa (zlinearyzowana)
 - 4.1. Układy lokalne, przemieszczenia osi pręta i obciążenia
 - 4.2. Liniowy (osiowo) i hermitowski (zginanie) element skończony
 - 4.3. Równania modelu fizycznego dla elementu skończonego w zapisie macierzowym
 - 4.4. Równowaga elementu $\rightarrow \delta \Pi^e = 0$
 - 4.5. Współrzędne liniowej macierzy sztywności i macierzy sztywności geometrycznej
 - 4.6. Transformacja do układu globalnego. Agregacja modelu
 - 4.7. Rozwiązanie zadania statyki liniowej
 - 4.8. Rozwiązanie wg teorii II rzędu
 - 4.9. Rozwiązanie zagadnienia stateczności początkowej

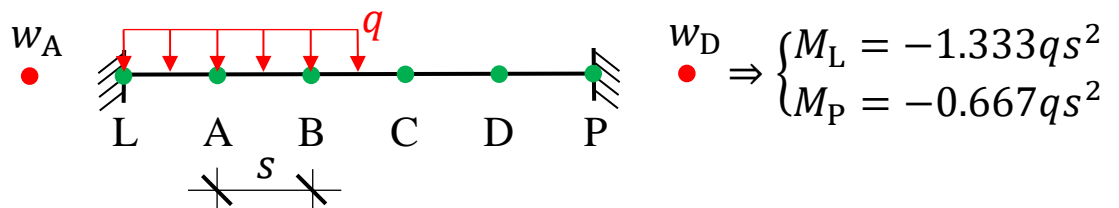
Wykład 5

5. Algorytm *MRS* dla zagadnienia zginania pręta prostego
 - 5.1. Aproksymacja funkcji. Operatory różnicowe
 - 5.2. Warunki brzegowe

5.3. Przykład liczbowy – belka wspornikowa



5.4. Przykład – uwzględnienie symetrii/antysymetrii



Wykład 6

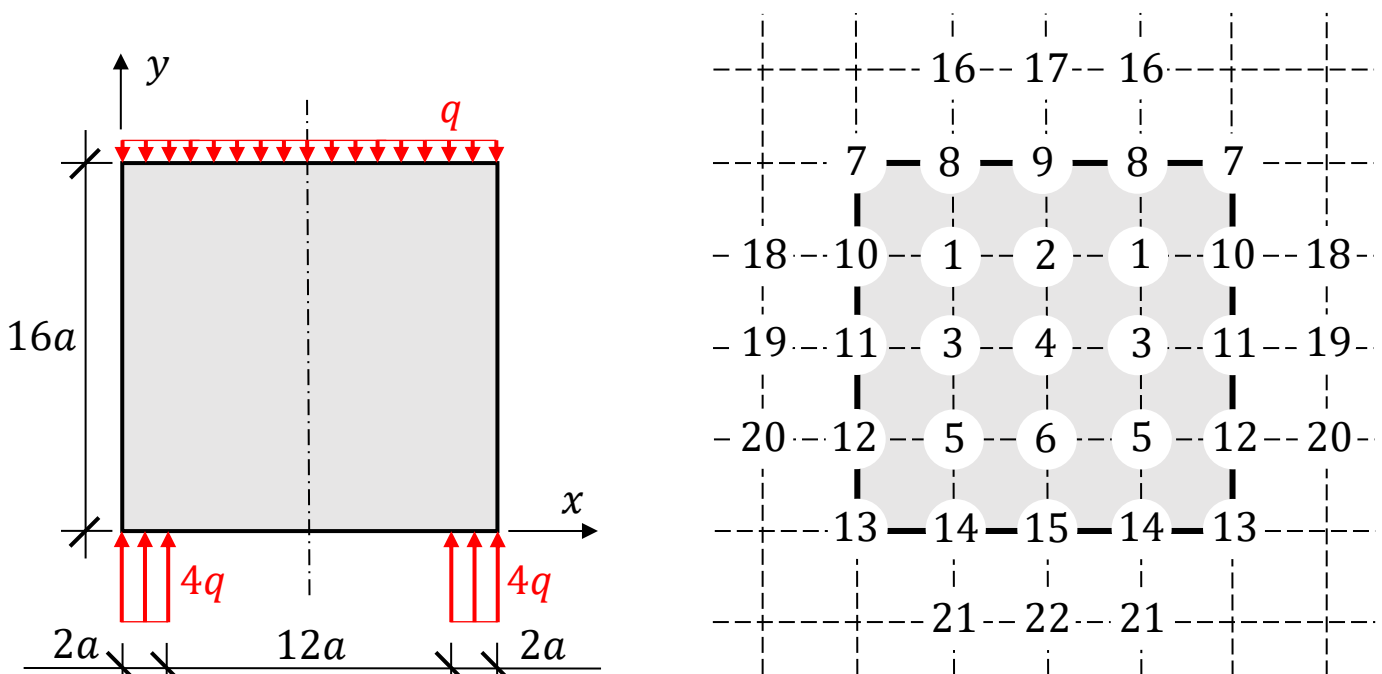
6. *MRS* dla płaskiego stanu naprężenia

6.1. Równania modelu fizycznego

6.2. Alternatywne warunki brzegowe

6.3. Operatory różnicowe dla pochodnych występujących w równaniach modelu fizycznego

6.4 Przykład liczbowy rozwiązania tarczy *MRS*



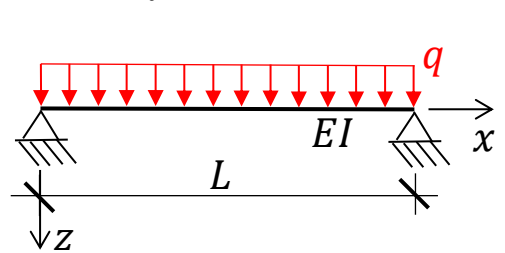
Naprężenia (punkt 1) $\Rightarrow \sigma_x = -0.119q, \quad \sigma_y = -0.986q, \quad \tau_{xy} = -0.103q$

Wykład 7

7. Metoda Ritza

7.1. Metoda Ritza na przykładzie belki

7.2. Przykład. Rozwiązanie belki w bazie trygonometrycznej


$$\Rightarrow \begin{cases} w\left(\frac{L}{2}\right) \cong 0.01302 \frac{qL^4}{EI} \\ M\left(\frac{L}{2}\right) \cong 0.1242qL^2 \end{cases}$$

Sprawdzian

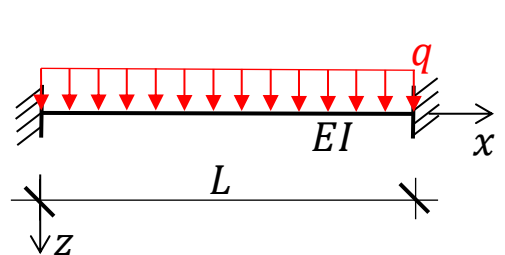
Wykład 8

8. Metoda residuów ważonych (Galerkina) na przykładzie belki

8.1. Pojęcie residuum. Ortogonalizacja błędu

8.2. Funkcje bazowe i testowe. Układ równań metody

8.3. Przykład. Belka w bazie wielomianowej


$$\Rightarrow \begin{cases} w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^4}{384EI} \\ M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{24} \end{cases}$$

Poprawa sprawdzianu (dla studentów niezadowolonych z oceny uzyskanej na pierwszym sprawdzianie).