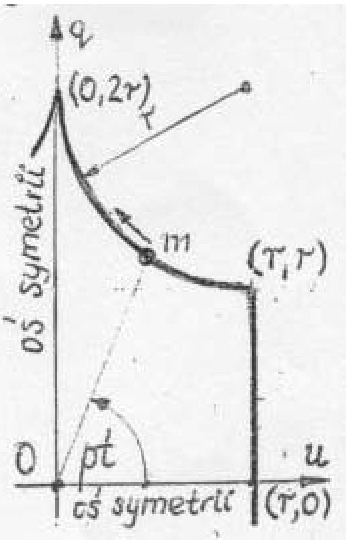
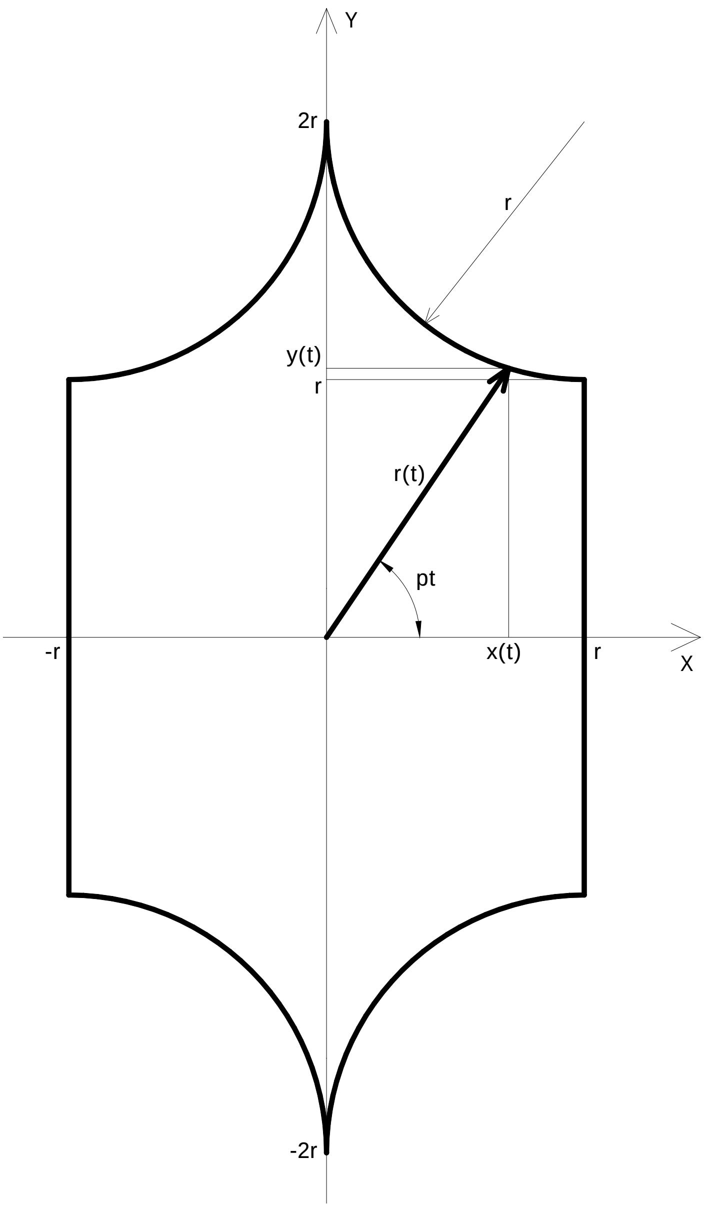
ZADANIE 1.

1.2 Trajektoria ruchu (obraz fazowy) punktu masowego ma postać jak na rysunku. Podać rozwinięcie czasowe dla pełnego okresu przyjmując p=constans.



1.1. Zadany obraz fazowy



Jeżeli krzywa obrazu fazowego jest krzywą zamkniętą, to ruch jest periodyczny (okresowy). W analizowanym przykładzie krzywa fazowa ruchu jest zamknięta, zatem rozwinięcie czasowe reprezentować będzie funkcja spełniająca warunek okresowości. Ponadto ze względu na pewne podobieństwo do ruchu punktu materialnego po okręgu, można wywnioskować że funkcją rozwinięcia czasowego w analizowanym ruchu będzie miała postać

$$q(t) = r(t) * \sin(p\,t)$$

podczas gdy dla ruchu po okręgu mamy funkcję: $q(t) = r * \sin(p\,t)$.

Aby wyznaczyć promień krzywizny zmienny w czasie, załóżmy że ruch odbywa się po krzywej ze stałą prędkością kątową *p*. Wówczas prawdziwe są relacje:

$$y(t) = r(t) * \sin(p * t)$$
$$x(t) = r(t) * \cos(p * t)$$

współrzędne te muszą spełniać równanie odciętej $x = r$ oraz równanie okręgu o środku w punkcie (x,y), stąd:

- dla $0 \le pt \le \frac{\pi}{4}$

$$\frac{r}{r(t)} = \cos(pt)$$

$$r(t) = \frac{r}{\cos(pt)}$$

- dla $\frac{\pi}{4} \le pt \le \frac{\pi}{2}$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$(r(t) * \cos(p * t) - r)^2 + (r(t) * \sin(p * t) - 2r)^2 = r^2$$

jest to równanie kwadratowe którego rozwiązaniem są pierwiastki

$$\mathrm{r}_1(t) = 2r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) - a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \cos^2(pt)}$$
$$\mathrm{r}_2(t) = 2r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) + a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \cos^2(pt)}$$

przy czym musi być spełniony warunek

$$r \le \mathrm{r}(t) \le 2r$$

stąd

$$\mathrm{r}(t) = 2r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) - a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \cos^2(pt)}$$

Rozwinięcie czasowe w pierwszej ćwiartce ma zatem postać:

$$q^{I}(t)=\begin{cases} \dfrac{r}{\cos(pt)}*\sin(p*t) & 0\le pt\le \dfrac{\pi}{4p} \\ \left[2r*\sin(p*t)+r*\cos(p*t)-a*\sqrt{4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\cos^2(pt)}\right]*\sin(p*t) & \\ & \dfrac{\pi}{4p}\le pt\le \dfrac{\pi}{2p} \end{cases}$$

W kolejnych ćwiartkach rozwiązanie uzyskuje się formułując następujące warunki:

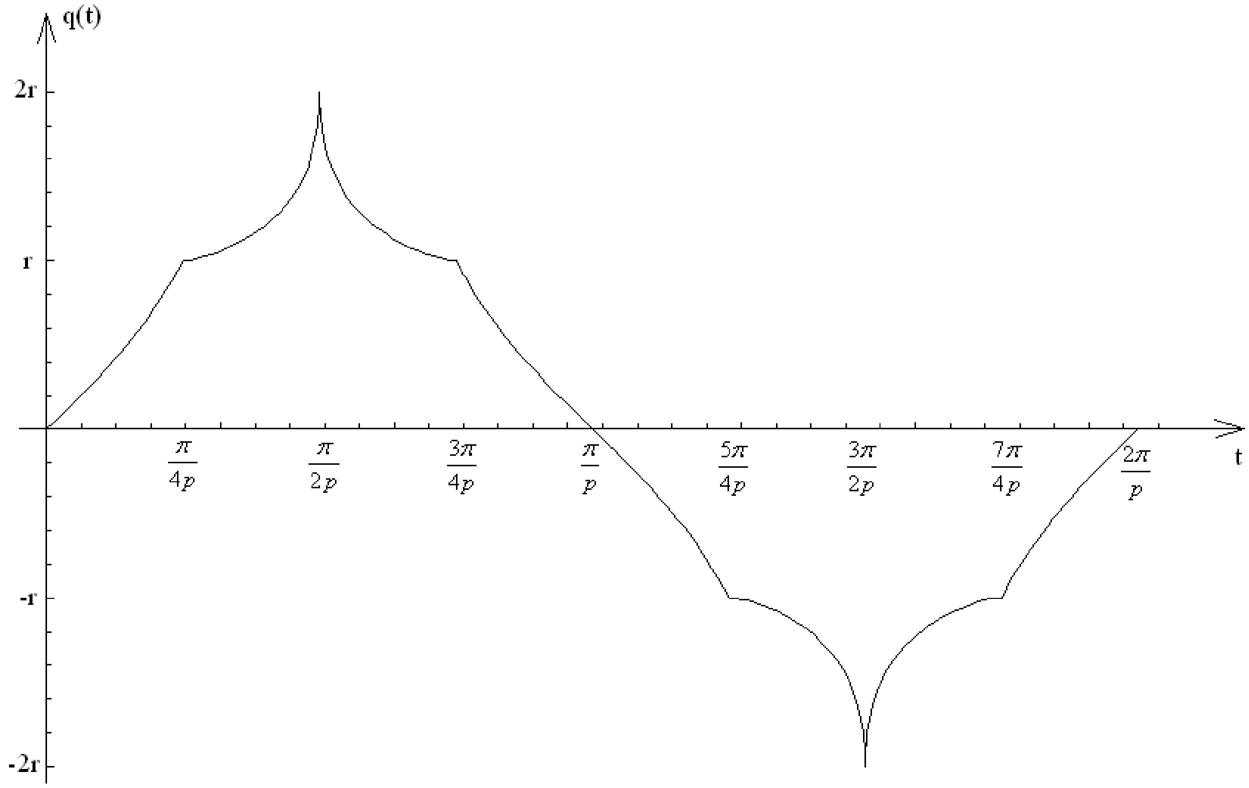
* w drugiej ćwiartce $(x+r)^2+(y-2r)^2=r^2$
* w trzeciej ćwiartce $(x+r)^2+(y+2r)^2=r^2$
* w czwartej ćwiartce $(x-r)^2+(y+2r)^2=r^2$

$$q^{II}(t)=\begin{cases} \left[2r*\sin(p*t)-r*\cos(p*t)-a*\sqrt{-4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\cos^2(pt)}\right]*\sin(p*t) & \\ & \dfrac{\pi}{2p}\le pt\le \dfrac{3\pi}{4p} \\ -\dfrac{r}{\cos(pt)}*\sin(p*t) & \dfrac{3\pi}{4p}\le pt\le \dfrac{\pi}{p} \end{cases}$$

$$q^{III}(t)=\begin{cases} -\dfrac{r}{\cos(pt)}*\sin(p*t) & \dfrac{\pi}{p}\le pt\le \dfrac{5\pi}{4p} \\ \left[-2r*\sin(p*t)-r*\cos(p*t)-a*\sqrt{4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\cos^2(pt)}\right]*\sin(p*t) & \\ & \dfrac{5\pi}{4p}\le pt\le \dfrac{3\pi}{2p} \end{cases}$$

$$q^{III}(t)=\begin{cases} \left[-2r*\sin(p*t)+r*\cos(p*t)-a*\sqrt{-4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\cos^2(pt)}\right]*\sin(p*t) & \\ & \dfrac{3\pi}{2p}\le pt\le \dfrac{7\pi}{4p} \\ \dfrac{r}{\cos(pt)}*\sin(p*t) & \dfrac{7\pi}{4p}\le pt\le \dfrac{2\pi}{p} \end{cases}$$

Wykres rozwinięcia czasowego

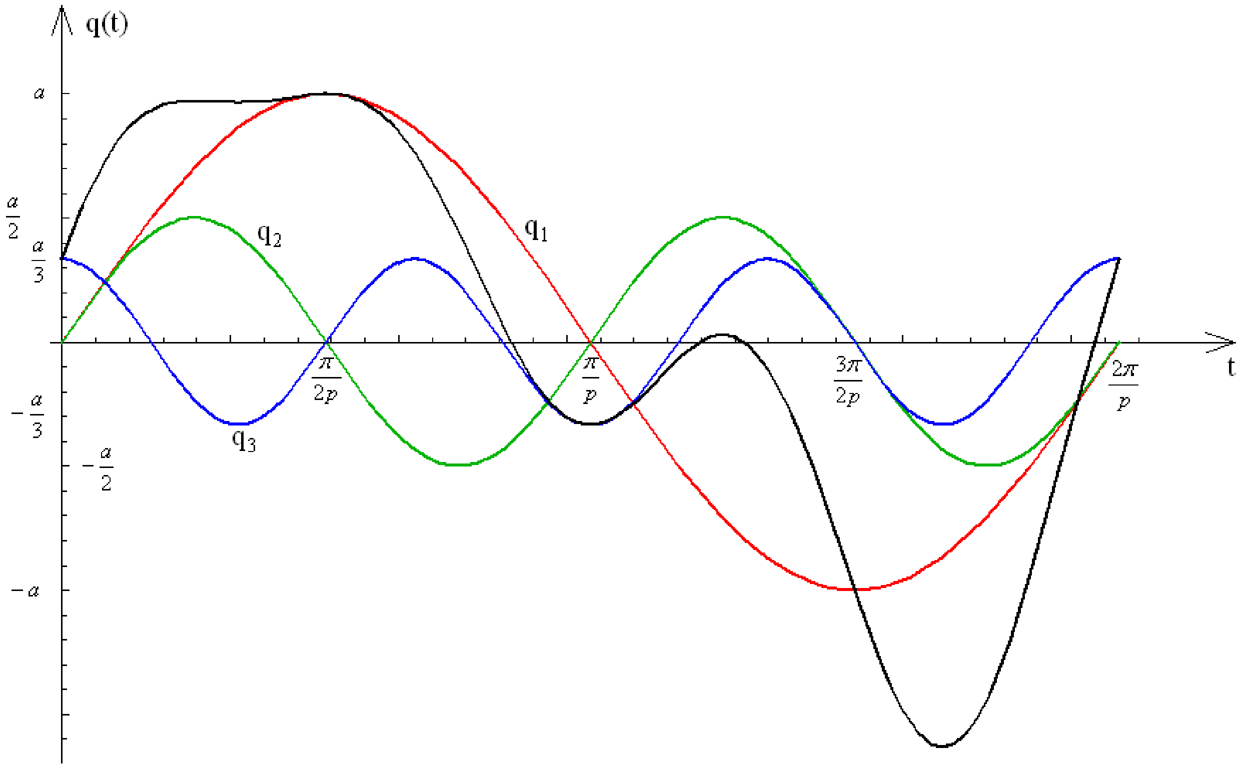


ZADANIE 2.

2.2 Analiza harmoniczna wibrogramu wykazała, że oscylacja jest sumą trzech ruchów kolinearnych. Narysować ruchy składowe oraz ruch wypadkowy. Wyznaczyć położenie węzłów ruchu, ekstremów i ich wartość (minimum dla dwóch składowych).

$q_1 = a \sin pt$, $q_2 = \frac{1}{2} a \sin 2pt$, $q_3 = \frac{a}{3} \cos 3pt$.

2.1. Wykresy ruchów składowych oraz wypadkowego



Kolor czarny – ruch wypadkowy: $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$

2.2. Węzły ruchu dla dwóch ruchów wypadkowych

Dla dwóch wybranych ruchów q_1 oraz q_2 mamy:

$$\sin(2\alpha) = 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha)$$

$$q(t) = a * \sin(pt) + \frac{a}{2} * \sin(2pt) = a * \sin(pt) + a * \sin(pt) * \cos(pt)$$
$$q(t) = a * \sin(pt) * (1 + \cos(pt))$$

Warunek na wyznaczenie węzłów ruchu: $q(t)=0$

$$q(t)=a*\sin(pt)*(\cos(pt)+1)=0$$

$a*\sin(pt)=0$ lub $1+\cos(pt)=0$

$$\cos(pt)=-1$$

$\sin(pt)=0$ $\qquad$ $\cos(pt)=\cos(\pi+2*n*\pi)$

$t=\dfrac{n*\pi}{p}$ $\qquad$ $p*t=\pi+2*n*\pi$

$$t=\frac{\pi}{p}+\frac{2*n*\pi}{p}$$

Stąd węzły ruchu zlokalizowane są w punktach $t=\dfrac{n*\pi}{p}$, $t=\dfrac{\pi}{p}+\dfrac{2*n*\pi}{p}$, co sprowadza się do wartości $t=\dfrac{n*\pi}{p}$ przy czym $n\in$ C (całkowitych).

2.3. Okres ruchu wypadkowego

Analizowaną funkcję można przedstawić w postaci dwóch ruchów składowych:

$$q_1(t)=a*\sin(pt)$$

$$q_2(t)=\frac{1}{2}*a*\sin(2pt)$$

Stąd

$\omega_1=p$ $\qquad$ $\omega_2=2p$

$n_1=1$ $\qquad$ $n_2=2$

$T_1=\dfrac{2\pi}{p}$ $\qquad$ $T_2=\dfrac{\pi}{p}$

Następnie poszukiwany okres drgań ruchu wypadkowego ma postać

$$T=\frac{2\pi*n_1}{\omega_1}=\frac{2\pi*n_2}{\omega_2}=\frac{2\pi*1}{p}=\frac{2\pi*2}{2p}=\frac{2\pi}{p}$$

2.4. Ekstrema wychylenia

$$q(t)=a*\sin(pt)+\frac{1}{2}*a*\sin(2pt)$$

Pierwsza pochodna podług czasu ma postać:

$$\dot{q}(t)=a*p*\cos(pt)+\frac{1}{2}*a*2*p*\cos(2pt)=a*p*\cos(2pt)+a*p*\cos(pt)$$

Stąd przyrównując pierwszą pochodną do zera wyznaczyć można ekstrema lokalne funkcji q(t), przy czym rozważania dotyczą tylko przedziału t∈[0 ; 2π/p]
Przydatny będzie wzór trygonometryczny: $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$

Stąd

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= a*p*\cos(2pt)+a*p*\cos(pt)= \\
&= a*p*\left(\cos^2(pt)-\sin^2(pt)\right)+a*p*\cos(pt)= \\
&= a*p*\left(\cos^2(pt)-1+\cos^2(pt)\right)+a*p*\cos(pt)= \\
&= 2*a*p*\cos^2(pt)+a*p*\cos(pt)-a*p
\end{aligned}$$

$$2*a*p*\cos^2(pt)+a*p*\cos(pt)-a*p=0$$

Jest to równanie kwadratowe, jeżeli podstawimy

$$\cos(pt)=x, \qquad x\in[-1;1]$$

$$2*a*p*x^2+a*p*x-a*p=0$$

Stąd: x = -1 $\cup$ x = 0,5

1^0 $\cos(pt)=-1$

$$\cos(pt)=\cos(\pi)$$
$$p*t=\pi$$
$$t=\frac{\pi}{p}$$

2^0 $\cos(pt)=0,5$

$$\cos(pt)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad\qquad \cos(pt)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$
$$p*t=\frac{\pi}{3} \qquad \text{lub} \qquad p*t=\frac{5\pi}{3}$$
$$t=\frac{\pi}{3p} \qquad\qquad t=\frac{5\pi}{3p}$$

Zatem ekstrema lokalne występują w punktach:

$$t=\frac{\pi}{p},\quad t=\frac{\pi}{3p},\quad t=\frac{5\pi}{3p}$$

i wynoszą odpowiednio

$$q\left(\frac{\pi}{p}\right) = a * \sin\left(p \cdot \frac{\pi}{p}\right) + \frac{a}{2} * \sin\left(2p \cdot \frac{\pi}{p}\right) = 0$$
$$q\left(\frac{\pi}{3p}\right) = a * \sin\left(p \cdot \frac{\pi}{3p}\right) + \frac{a}{2} * \sin\left(2p \cdot \frac{\pi}{3p}\right) = 1{,}3a$$
$$q\left(\frac{5\pi}{3p}\right) = a * \sin\left(p \cdot \frac{5\pi}{3p}\right) + \frac{a}{2} * \sin\left(2p \cdot \frac{5\pi}{3p}\right) = -1{,}3a$$

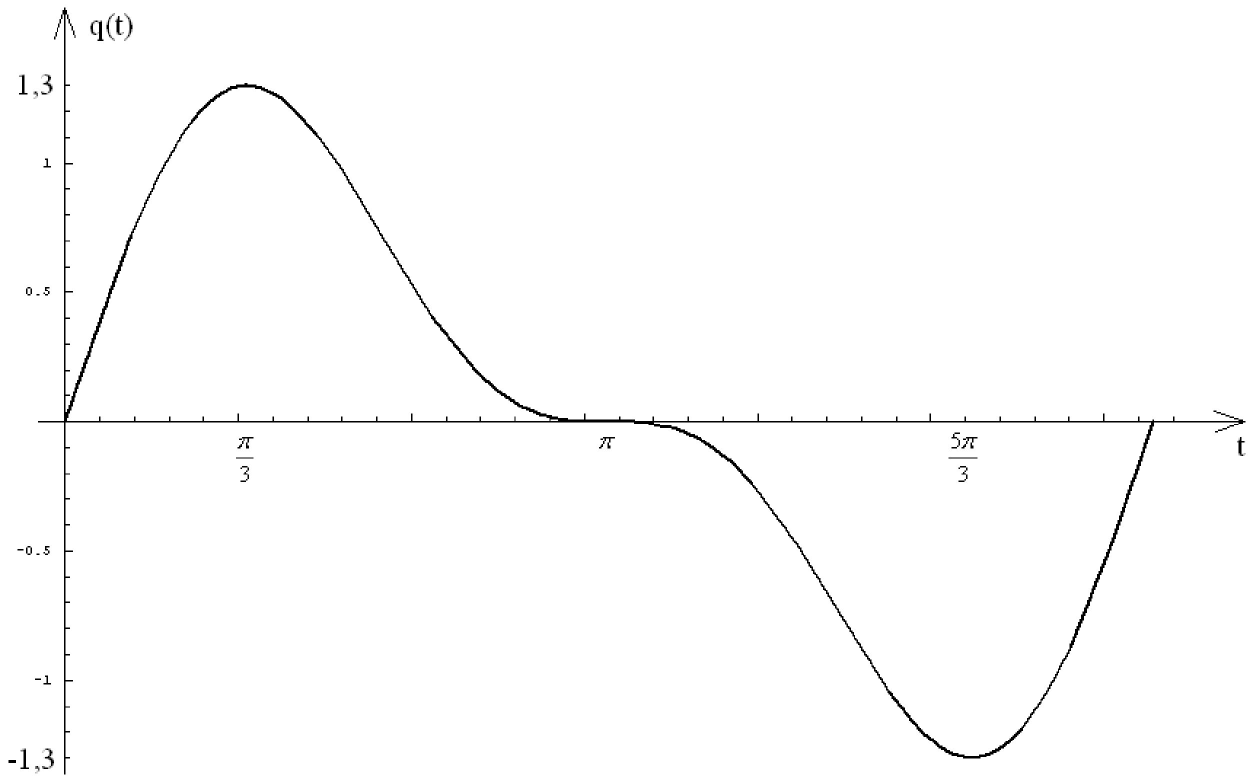
2.5. Rysunek na przedziale t∈[0;T]

Dla $p = 1$ oraz $a = 1$ otrzymujemy

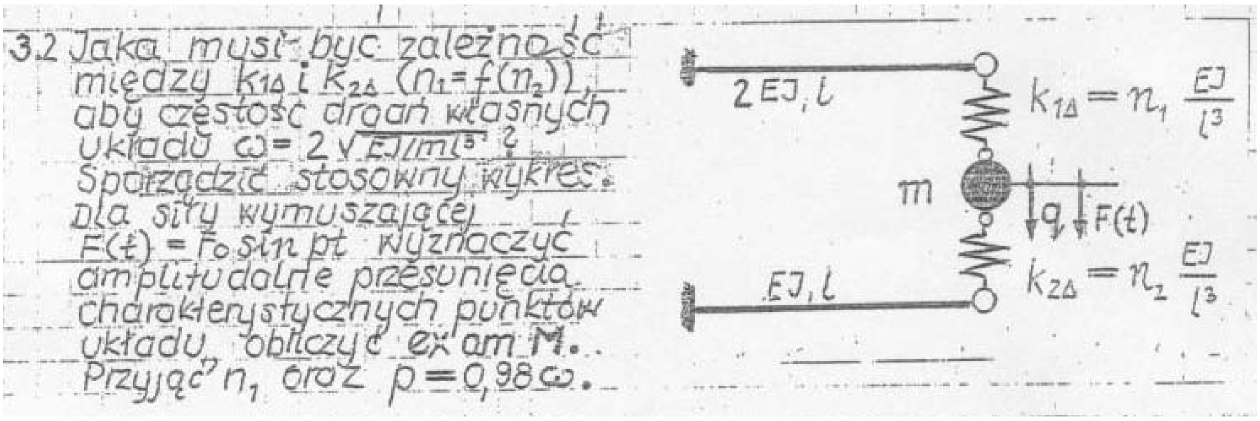
$$q(t) = \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$$
$$T = 2\pi$$

oraz punkty ekstremalnych wychyleń

$t = 1{,}3,\quad t = 0,\quad t = -1{,}3,$

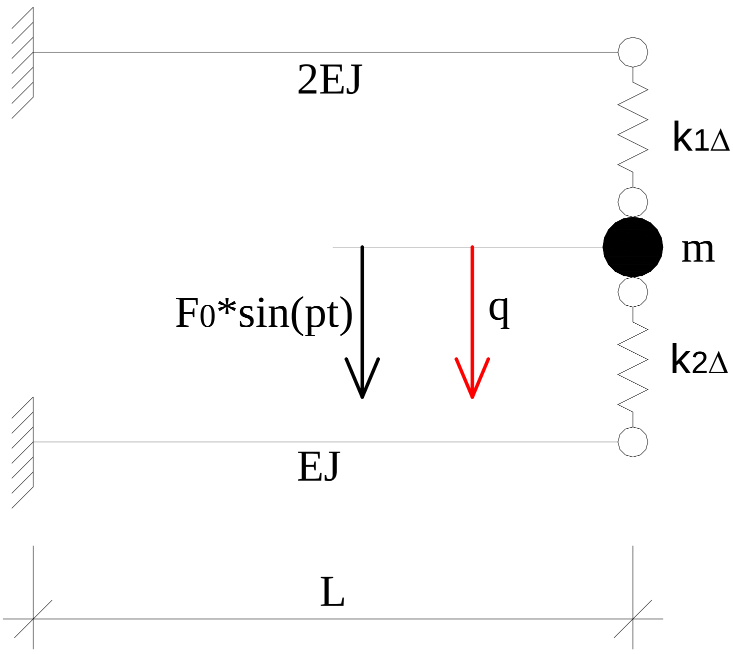


ZADANIE 3.


3.2 Jaka musi być zależność między $k_{1\Delta}$ i $k_{2\Delta}$ $(n_1=f(n_2))$, aby częstość drgań własnych układu $\omega = 2\sqrt{EJ/ml^3}$? Sporządzić stosowny wykres. Dla siły wymuszającej $F(t) = F_0 \sin pt$ wyznaczyć amplitudę przesunięcia charakterystycznych punktów układu, obliczyć ex am M.. Przyjąć n_1 oraz $p=0{,}98\omega$.

3.1. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

Analizowany układ można potraktować jako zestaw izolowanych więzi w połączeniu kombinowanym i na tej podstawie, można wyliczyć parametr zastępczej więzi sprężystej.



$$k_z = k_1 + k_2$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_{1\Delta}} + \frac{L^3}{6EJ}$$

$$k_1 = \frac{6 * EJ * n_1}{L^3(n_1 + 6)}$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_{2\Delta}} + \frac{L^3}{3EJ}$$

$$k_2 = \frac{3 * EJ * n_2}{L^3(n_2 + 3)}$$

<u>Sztywność zastępcza układu</u>

$$k_z = \frac{6 * EJ * n_1}{L^3(n_1 + 6)} + \frac{3 * EJ * n_2}{L^3(n_2 + 3)}$$

3.3. Częstość własna układu oraz zależność między $k_{1\Delta}$ i $k_{2\Delta}$

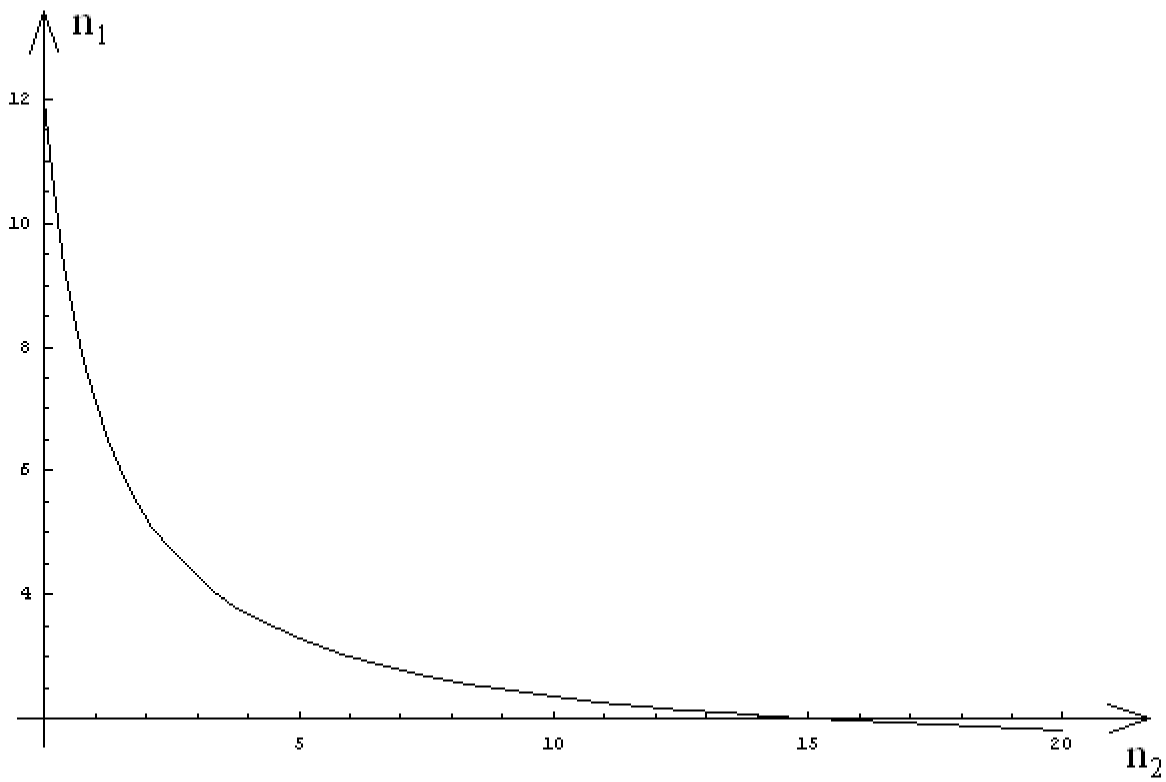
$$\omega = \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \sqrt{\frac{6 * EJ * n_1}{mL^3(n_1 + 6)} + \frac{3 * EJ * n_2}{mL^3(n_2 + 3)}}$$

$$\sqrt{\frac{6 * EJ * n_1}{mL^3(n_1 + 6)} + \frac{3 * EJ * n_2}{mL^3(n_2 + 3)}} = 2\sqrt{\frac{EJ}{m * L^3}}$$

Stąd wynika relacja

$$n_1 = \frac{6 * (12 + n_2)}{5n_2 + 6}$$

Wykres n_1 w funkcji n_2



3.4. Amplitudalne przemieszczenia

Obliczenia przeprowadzono dla $\omega = 2\sqrt{\frac{EJ}{m * L^3}}$

Drgania ustalone mają postać (na podstawie *Dynamika Budowli, J. Langer*)

$$q(t) = \frac{\nu}{k} F_S \sin(pt - \varphi) + \frac{\nu}{k} F_C \cos(pt - \varphi)$$

Dane: $\gamma = 0$, $p = 0{,}98\omega$, n_1, $F_S = F_0$

$$\eta = \frac{p}{\omega} = 0{,}98$$

$$\nu = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|} = \frac{1}{\left|1-0{,}98^2\right|} = 25{,}2525$$

$$n_2 = \frac{6*(12-n_1)}{5n_1 - 6}$$

Stąd

$$q(t) = \frac{25{,}2525}{4EJ/L^3} F_0 \sin(0{,}98\omega t) = 6{,}3131\frac{F_0 L^3}{EJ}\sin(0{,}98\omega t)$$

Amplituda przemieszczenia w miejscu masy skupionej wynosi

$$amq = 6{,}3131\frac{F_0 L^3}{EJ}$$

Z rozdziału obciążenia w połączeniu więzi sprężystych wynika, że na wspornik o sztywności 2EJ przypada sił obliczona ze wzoru

$$r_1 = \frac{k_1}{k_z} = \frac{2n_1 * (3 + n_2)}{6n_2 + 3n_1 * (n_2 + 2)}$$

lub po uwzględnieniu $n_2 = \frac{6*(12-n_1)}{5n_1 - 6}$

$$r_1 = \frac{3n_1}{12 + 2n_1}$$

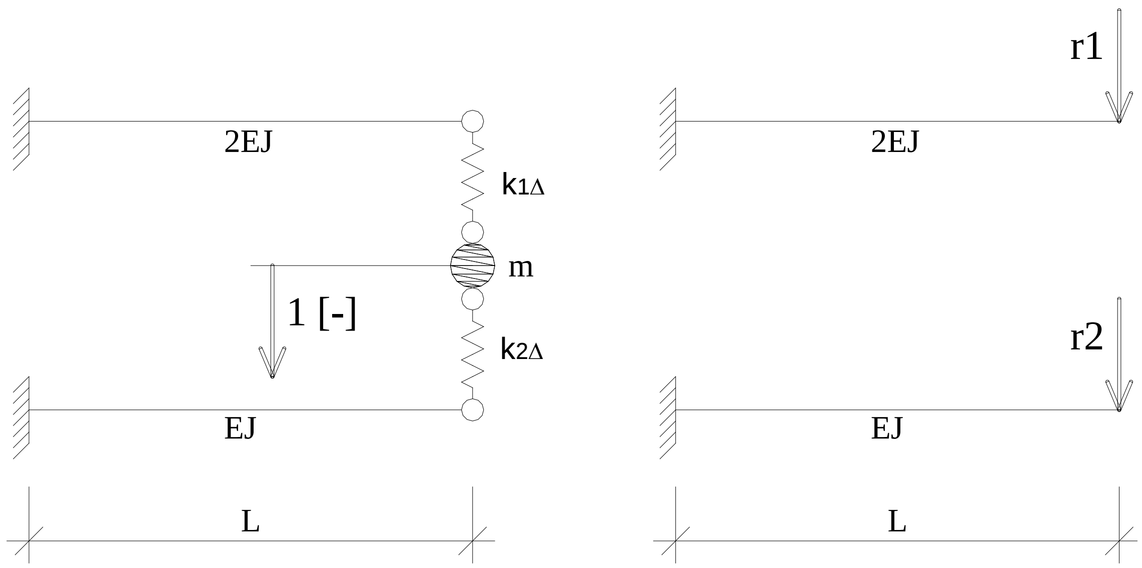
Natomiast na wspornik o sztywności EJ przypada sił obliczona ze wzoru

$$r_2 = \frac{k_2}{k_z} = \frac{n_2 * (6 + n_1)}{6n_2 + 3n_1 * (n_2 + 2)}$$

lub po uwzględnieniu $n_2 = \dfrac{6*(12 - n_1)}{5n_1 - 6}$

$$r_2 = \frac{12 - n_1}{12 + 2n_1}$$

Przy czym $r_1 + r_2 = \dfrac{3n_1}{12 + 2n_1} + \dfrac{12 - n_1}{12 + 2n_1} = 1$ - warunek rozdziału



<u>Przemieszczenie końca wspornika o sztywności 2EJ</u>

$$amu_1 = \frac{6{,}3131F_0 * r_1}{6EJ / L^3} = \frac{6{,}3131F_0 L^3}{6EJ} * \frac{3n_1}{12 + 2n_1} = 1{,}5783 \frac{F_0 L^3 n_1}{EJ(6 + n_1)}$$

<u>Przemieszczenie końca wspornika o sztywności EJ</u>

$$amu_2 = \frac{6{,}3131F_0 * r_2}{3EJ / L^3} = \frac{6{,}3131F_0 L^3}{3EJ} * \frac{12 - n_1}{12 + 2n_1} = 1{,}0522 \frac{F_0 L^3 (12 - n_1)}{EJ(6 + n_1)}$$

3.5. Amplitudalne momenty

Siła kinetyczna

$$Q(t) = \nu \; F_0 \sin(p\, t)$$

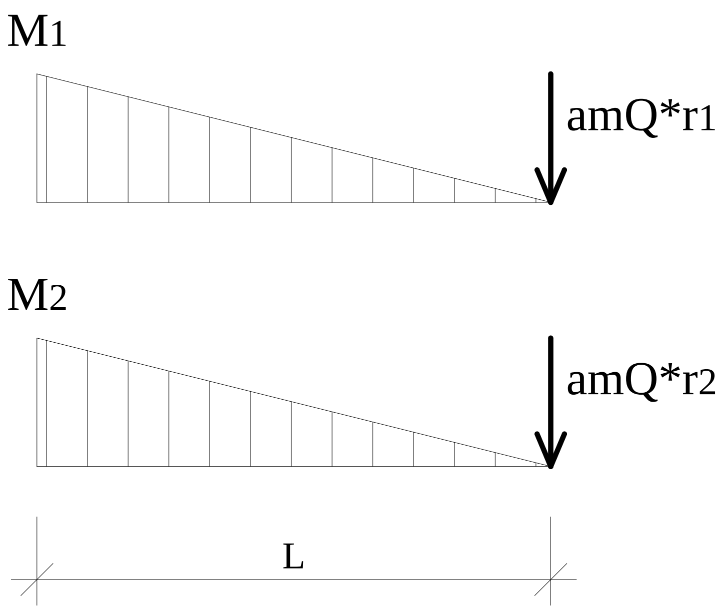
Amplituda siły kinetycznej dla ν = 25,2525

$$amQ(t) = \nu \; F_0 \; = 25{,}2525 F_0$$

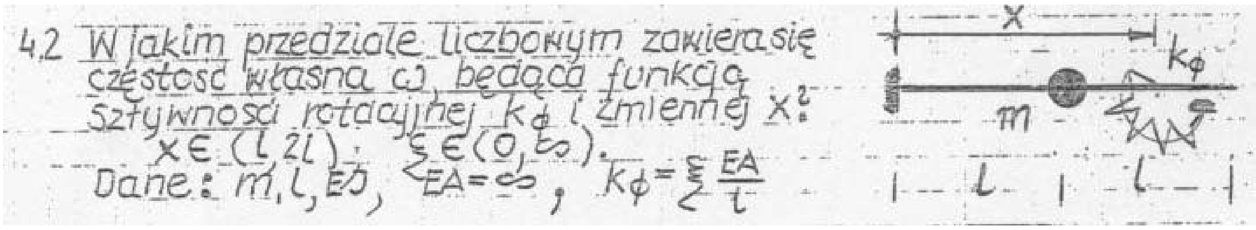
Stąd wykresy momentów dynamicznych mają postać

$$M_1^{extr} = \nu * r_1 * F_0 * L = 25{,}2525 * \frac{3n_1}{12 + 2n_1} * F_0 * L = 37{,}8786 * \frac{n_1}{6 + n_1} * F_0 * L$$

$$M_2^{extr} = \nu * r_2 * F_0 * L = 25{,}2525 * \frac{12 - n_1}{12 + 2n_1} * F_0 * L = 12{,}6262 * \frac{12 - n_1}{6 + n_1} * F_0 * L$$

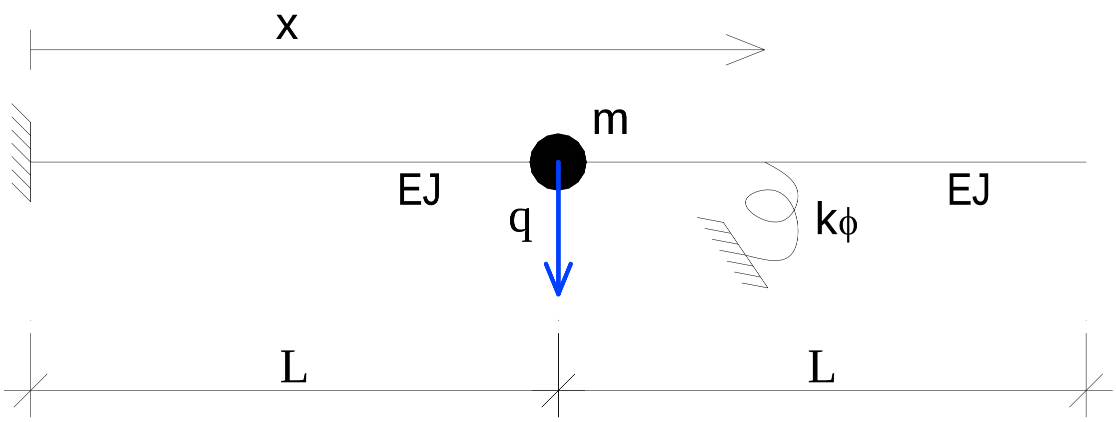


ZADANIE 4.


4.2 W jakim przedziale liczbowym zawiera się częstość własna ω, będąca funkcją sztywności rotacyjnej k_ϕ i zmiennej x?
$x \in (l, 2l)$, $\xi \in (0, \infty)$.
Dane: m, l, EJ, $EA = \infty$, $k_\phi = \xi \frac{EA}{l}$

Do wyznaczenia sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej posłużono się metodą sił.

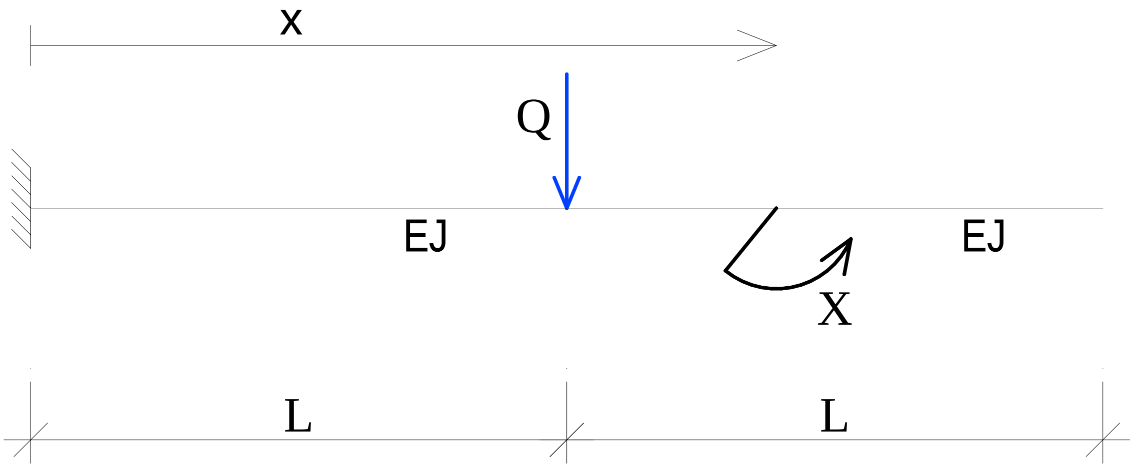
Przyjęcie współrzędnej uogólnionej



4.1. Stopień statycznej niewyznaczalności

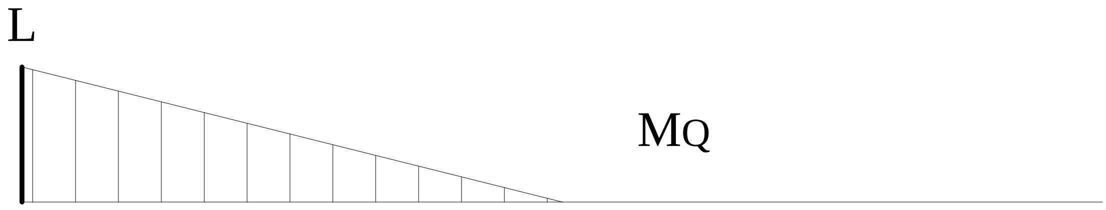
$n_h = e - 3t = 4 - 3*1 = 1$ - układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny

Układ podstawowy metody sił

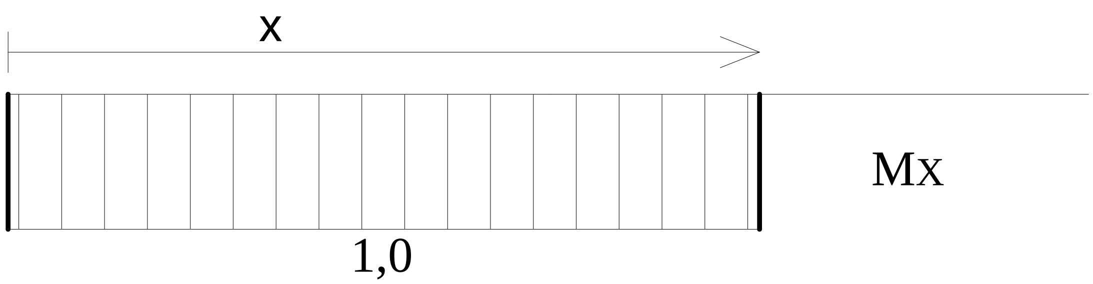


4.2. Wyznaczenie podatności na kierunku współrzędnej uogólnionej

Stan jednostkowy Q = 1 [-]



Stan jednostkowy□ X = 1 [-]



Macierz podatności w bazie poszerzonej

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} * L * L * \frac{2}{3} * L\right) = \frac{L^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} * L * (-L) * 1{,}0\right) = -\frac{L^2}{2EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}(x * 1{,}0 * 1{,}0) + \frac{1}{k_\varphi} = \frac{x}{EJ} + \frac{L}{\xi\, EJ}$$

$$\breve{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EJ} & -\frac{L^2}{2EJ} \\ -\frac{L^2}{2EJ} & \frac{x}{EJ} + \frac{L}{\xi\, EJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{qq} & \mathrm{D}_{qx} \\ \mathrm{D}_{xq} & \mathrm{D}_{xx} \end{bmatrix}$$

Redukcja macierzy podatności do bazy minimalnej

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}_{qq} - \mathrm{D}_{qx} \cdot \mathrm{D}_{xx}^{-1} \cdot \mathrm{D}_{xq}$$

$$\delta = \frac{L^3}{3EJ} - \left(-\frac{L^2}{2EJ}\right) \cdot \left(\frac{x}{EJ} + \frac{L}{\xi\, EJ}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{L^2}{2EJ}\right) = \frac{L^3(4L - 3L\xi + 4x\xi)}{12EJ(L + x\xi)}$$

Sztywność na kierunku współrzędnej uogólnionej wynosi

$$k = \delta^{-1} = \frac{12EJ(L + x\xi)}{L^3(4L - 3L\xi + 4x\xi)}$$

4.3. Częstość własna układu

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12EJ(L + x\xi)}{mL^3(4L - 3L\xi + 4x\xi)}}$$

Dla skrajnych wartości ξ tj. $\xi \in (0;\infty)$ uzyskuje się

$$\lim_{\xi\to 0} \omega = \lim_{\xi\to 0} \sqrt{\frac{12EJ(L + x\xi)}{mL^3(4L - 3L\xi + 4x\xi)}} = \sqrt{\frac{3\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}} = 1{,}732\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}$$

$$\lim_{\xi\to \infty} \omega = \lim_{\xi\to \infty} \sqrt{\frac{12EJ(L + x\xi)}{mL^3(4L - 3L\xi + 4x\xi)}} = \sqrt{\frac{12EJ\,x}{4mL^3 x - 3mL^4}}$$

Następnie szukamy ekstremalnych wartości funkcji ω(*x*) w przedziale $x \in (L\,;\,2L)$ dla $\xi \to \infty$

$$\max\left(\sqrt{\frac{12EJ\,x}{4mL^3 x - 3mL^4}}\right) = 3{,}4641\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}, \qquad x = L$$

$$\min\left(\sqrt{\frac{12EJ\,x}{4mL^3 x - 3mL^4}}\right) = 2{,}1909\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}, \qquad x = 2L$$

Stąd częstość własna układu zależna od sztywności więzi k_ϕ oraz współrzędnej *x* zawiera się w przedziale liczbowym

$$\omega \in \left(1{,}732\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}\;;\;3{,}4641\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}\right)$$

ZADANIE 5.

52 Równanie ruchu punktu materialnego układu dynamicznego ma postać $m\ddot{q}+c\dot{q}+kq=F_0(2\sin pt-\cos pt)$. Dla drgań ustalonych podać opóźnienie fazowe odpowiedzi $q(t)$. Podać relacje na siłę oporów tłumienia $(c\dot{q})$, jeśli $p=\sqrt{10/9}\,\omega$, $\gamma=1/8$. Ile wynosi am $c\dot{q}$?

Według skryptu prof. Langera *Dynamika Budowli*, dla równania ruchu drgań wymuszonych harmonicznie postaci

$$m\ddot{q}+c\dot{q}+k\,q=F_S\sin(pt)+F_C\cos(pt)$$

drgania ustalone (rozwiązanie powyższego równania) można opisać wzorem

$$q(t)=\frac{\nu}{k}F_S\sin(pt-\phi)+\frac{\nu}{k}F_C\cos(pt-\phi)$$

oraz amplitudę przemieszczenia

$$amq(t)=\frac{\nu}{k}\sqrt{F_S^2+F_C^2}$$

gdzie:

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+\gamma^2\eta^2}}$$ jest współczynnikiem dynamicznym

$$\varphi=arctg\left(\frac{\gamma\eta}{1-\eta^2}\right)$$ jest opóźnieniem fazowym

4.1. Opóźnienie fazowe

Dla danych w zadaniu mamy

$$\eta=\frac{p}{\omega}=\frac{\sqrt{\frac{10}{9}}\,\omega}{\omega}=\sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2\right)^2+0{,}125^2*\left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2}}=5{,}80193$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{0{,}125*\sqrt{\frac{10}{9}}}{1-\left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2}\right) = -0{,}87022$$

Opóźnienie fazowe odpowiedzi q(t) wynosi $\varphi = -0{,}87022 rad$

4.2. Siła oporów ruchu

Siła oporów ruchu reprezentowana jest przez składnik równania „$c\,\dot{q}(t)$", stąd

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\nu}{k}F_S\sin(pt-\phi)+\frac{\nu}{k}F_C\cos(pt-\phi)\right) = \frac{\nu}{k}pF_S\cos(pt-\phi)-\frac{\nu}{k}pF_C\sin(pt-\phi)$$

Siła oporów ruchu ma dla danych zadania postać

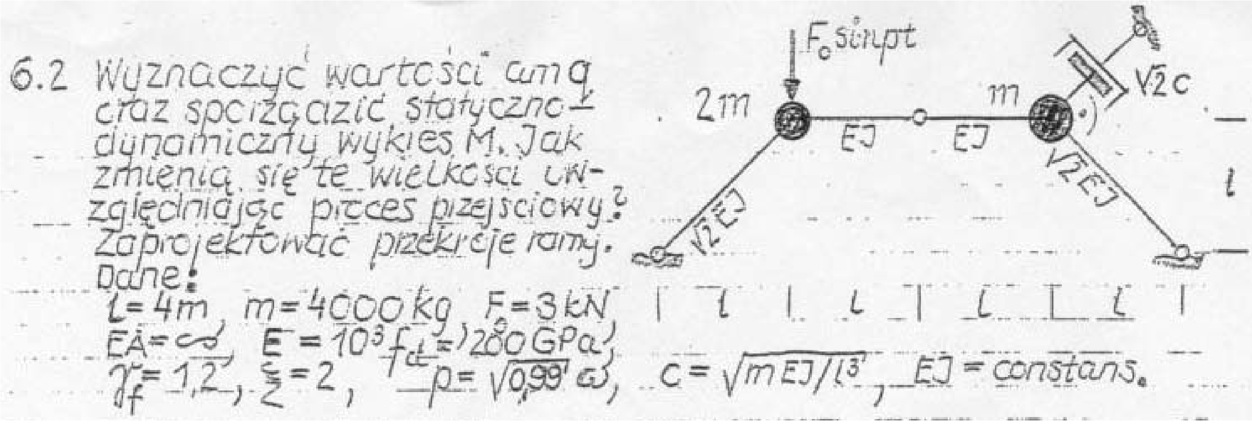
$$F_S = 2F_0$$
$$F_C = -F_0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{k\,m}} \qquad \Rightarrow \qquad c = \gamma\sqrt{k\,m}$$

$$c\,\dot{q}(t) = \frac{5{,}80193}{k}*\sqrt{\frac{10}{9}}*\sqrt{\frac{k}{m}}*0{,}125*\sqrt{k*m}*2*F_0*\cos(pt+0{,}87022)+$$
$$+\frac{5{,}80193}{k}*\sqrt{\frac{10}{9}}*\sqrt{\frac{k}{m}}*0{,}125*\sqrt{k*m}*F_0*\sin(pt+0{,}87022)=$$
$$=1{,}52894F_0\cos(pt+0{,}87022)+0{,}764471F_0\sin(pt+0{,}87022)$$

Wartość amplitudalna siły oporów ruchu

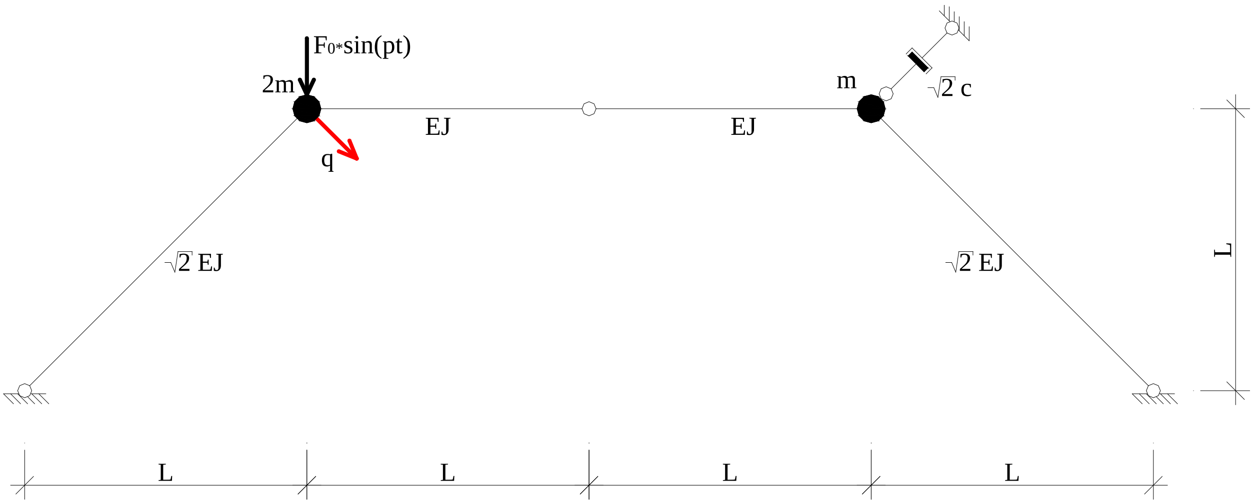
$$am(c\,\dot{q}(t)) = p\frac{\nu}{k}\sqrt{F_S^2+F_C^2} = \sqrt{(1{,}52894F_0)^2+(0{,}764471F_0)^2} = 1{,}70941F_0$$

ZADANIE 6.



6.1. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

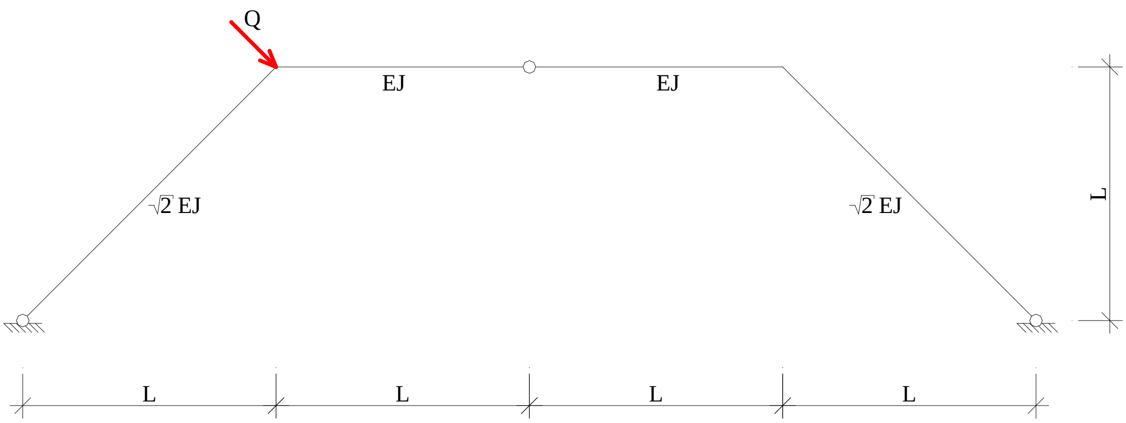
Analizowany układ ma jeden dynamiczny stopień swobody. Współrzędną uogólnioną przyjęto jako ruch masy skupionej „2m” prostopadły do osi pręta.



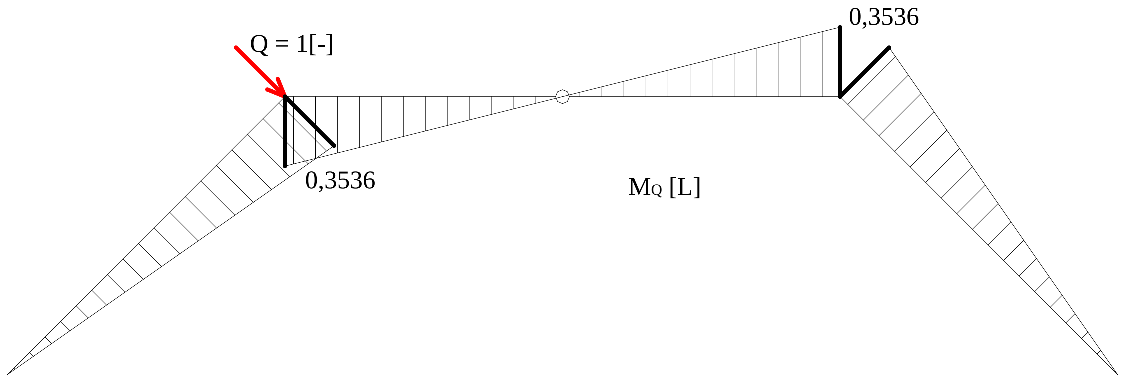
Sztywność układu wyznaczono za pomocą metody sił obliczając najpierw podatność układu a następnie sztywność według relacji

$$k = \delta^{-1}$$

<u>Układ podstawowy metody sił</u>



Stan jednostkowy Q = 1[-]



Podatność układu

$$\delta_{QQ} = \frac{1}{\sqrt{2}EJ}\left[\frac{1}{2}*\sqrt{2}L*0{,}3536L*\frac{2}{3}*0{,}3536L\right]*2+$$

$$+\frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}*L*0{,}3536L*\frac{2}{3}*0{,}3536L\right]*2 = 0{,}1667\frac{L^3}{EJ}$$

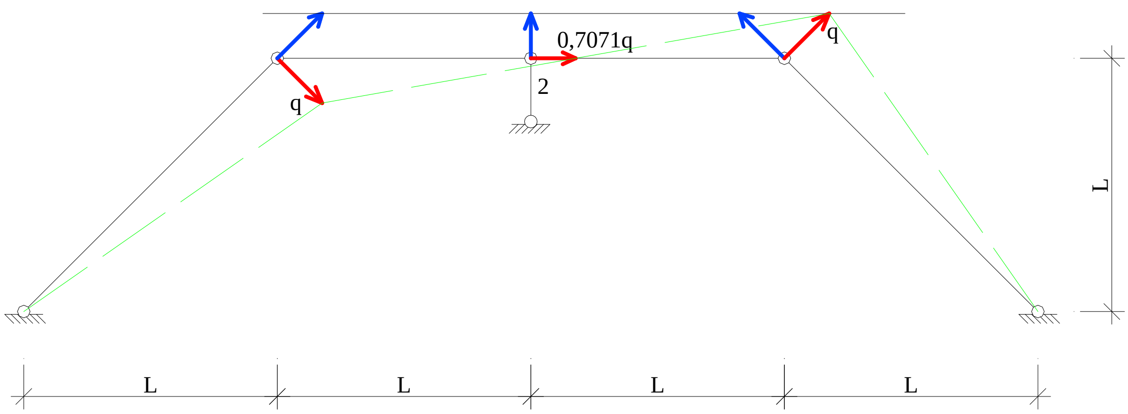
Sztywność układu

$$k = \delta_{QQ}^{-1} = \left(0{,}1667\frac{L^3}{EJ}\right)^{-1} = 6\frac{EJ}{L^3}$$

6.2. Wyznaczenie masy na kierunku współrzędnej uogólnionej

Masę układu wyznaczono na podstawie sformułowania energii kinetycznej E_k.

Plan przemieszczeń – na podstawie schematu kinematycznego



$$E_k = \frac{1}{2} * m * \dot{q}^2 + \frac{1}{2} * 2m * \dot{q}^2 = \frac{1}{2} * 3m * \dot{q}^2$$
$$\tilde{m} = 3m$$

6.3. Wyznaczenie tłumienia na kierunku współrzędnej uogólnionej

$$\Phi = \frac{1}{2} * c * \dot{q}^2$$
$$\Phi = \frac{1}{2} * \sqrt{2}c * \dot{q}^2 = \frac{1}{2} * \sqrt{2}c * \dot{q}^2$$
$$\tilde{c} = \sqrt{2}c$$

6.4. Wyznaczenie siły wzbudzającej

$$L = F(t) * q$$
$$L = F_0 \sin(pt) * \frac{\sqrt{2}}{2} q = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \sin(pt) q$$
$$F(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \sin(pt)$$

6.5. Równanie ruchu układu

Równanie dla danych w zadaniu ma postać

$$3m\, \ddot{q}(t) + \sqrt{\frac{2mEJ}{L^3}}\, \dot{q}(t) + 6\frac{EJ}{L^3}\, q(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \sin(pt)$$

Częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6EJ}{3mL^3}} = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} = 1{,}4142\sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$$

6.6. Wyznaczenie amplitudy siły kinetycznej oraz amplitudy przemieszczenia dynamicznego w stanie drgań ustalonych

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{k * m}} = \frac{\sqrt{\frac{2 * m * EJ}{L^3}}}{\sqrt{\frac{6EJ}{L^3} * 3m}} = 0{,}33333$$

$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{\sqrt{0{,}99}\,\omega}{\omega} = \sqrt{0{,}99} = 0{,}994987$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{(1-0{,}99)^2 + 0{,}333333^2 * 0{,}99}} = 3{,}01374$$

Amplituda siły kinetycznej

$$amQ = \nu\sqrt{1+\gamma^2\eta^2} * amF$$

dla $\eta = \sqrt{0{,}99}$, stąd

$$amQ = 3{,}01374 * \sqrt{1+0{,}33333^2 * 0{,}99} * \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 = 2{,}24519 F_0$$

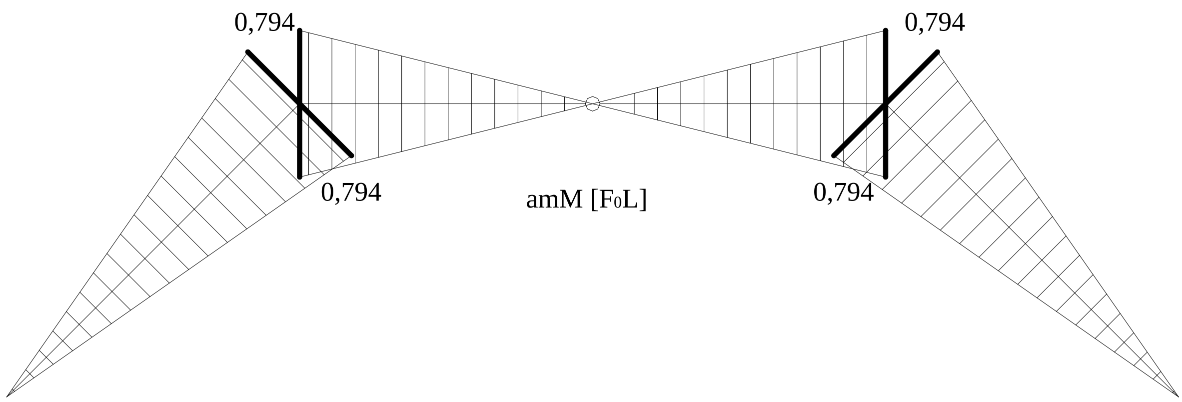
Amplituda przemieszczenia dynamicznego

$$am\,q = \frac{\nu}{k} amF = \frac{3{,}01374}{6EJ/L^3} * \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 = 0{,}355173 * \frac{F_0 L^3}{EJ}$$

Amplitudalne momenty dynamiczne

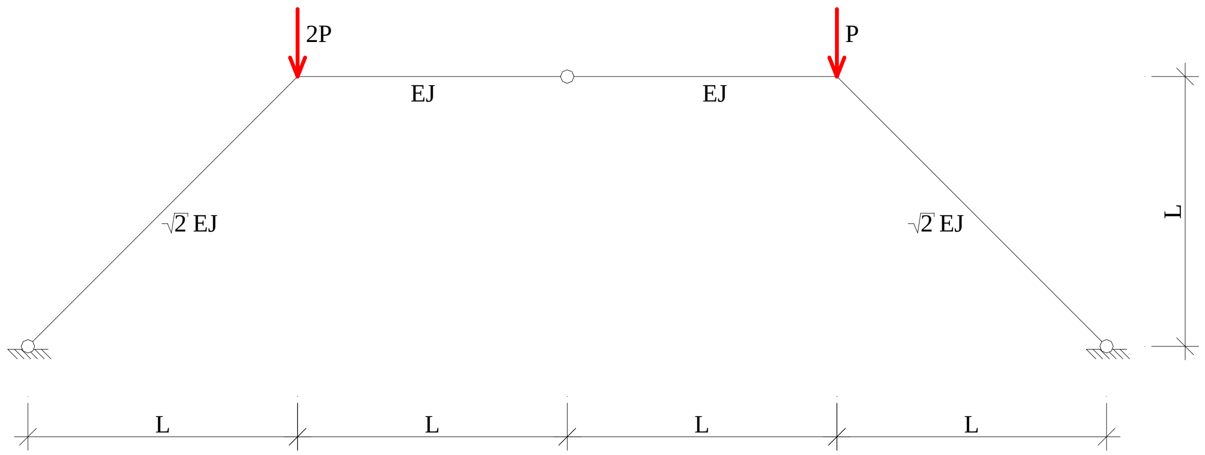
Amplitudalne momenty dynamiczne wyznaczono na podstawie wykresu momentów zginających w stanie Q = 1[-]

$$amM = amQ * M_Q = 2{,}24519 F_0 * 0{,}3536L = 0{,}794 F_0 L$$

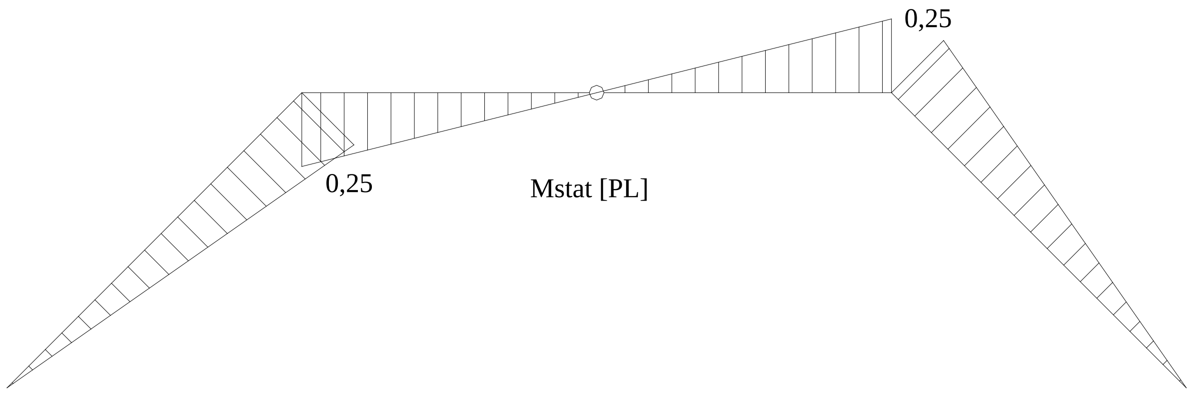


6.7. Rozwiązanie statyczne

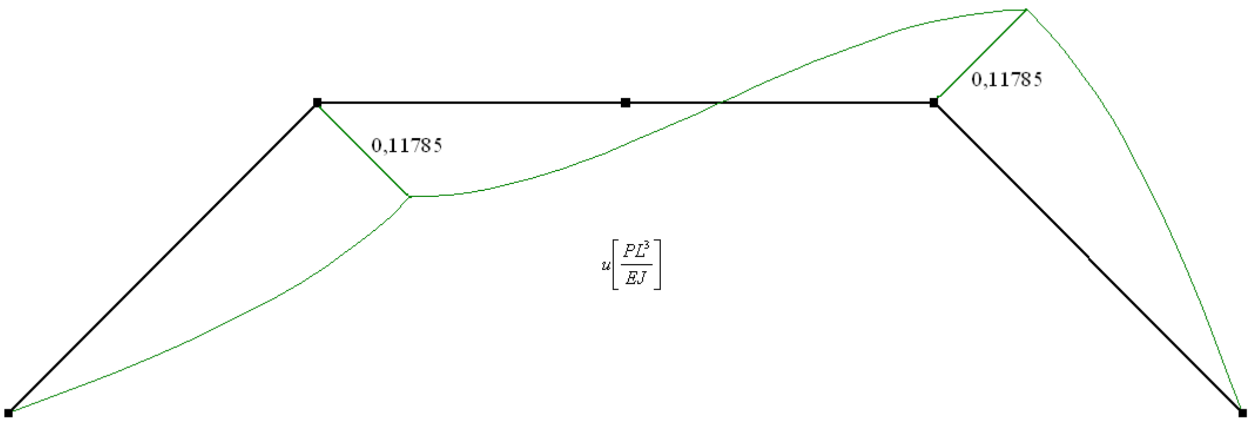
Statyczne działanie masy: $P = m\,g$



Wykres momentów statycznych



Wykres przemieszczeń statycznych



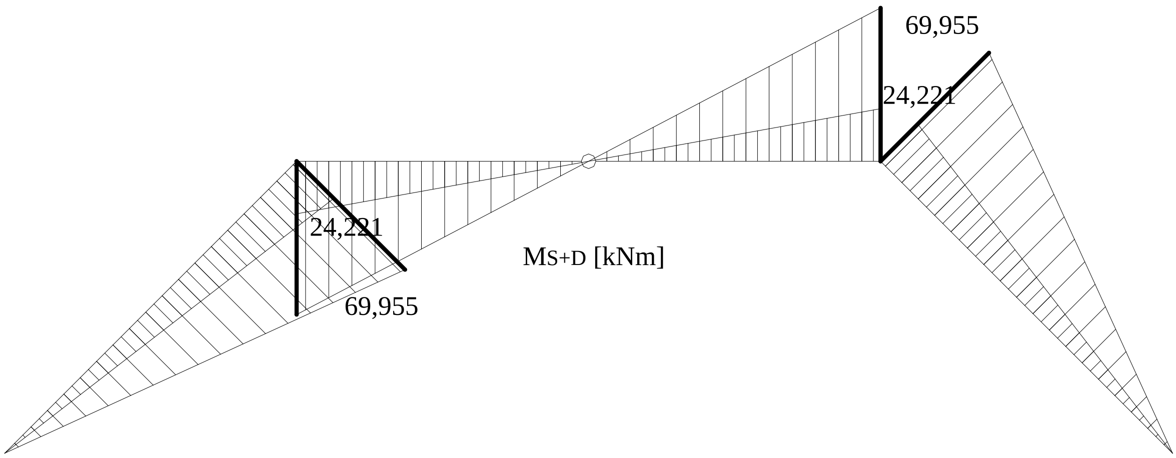
6.8. Obwiednia momentów statyczno-dynamicznych. Projektowanie przekrojów ramy

Momenty statyczno dynamiczne

$$M^{S+D} = \gamma_f * M^{stat} \pm \gamma_f * \xi * amM$$

$$M^{S+D} = 1{,}2 * 0{,}25 * 4000 * 9{,}81 * 4{,}0 + 1{,}2 * 2 * 0{,}794 * 3000 * 4{,}0 = 69955{,}2\mathrm{Nm} = 69{,}955\mathrm{kNm}$$
$$M^{S+D} = 1{,}2 * 0{,}25 * 4000 * 9{,}81 * 4{,}0 - 1{,}2 * 2 * 0{,}794 * 3000 * 4{,}0 = 24220{,}8\mathrm{Nm} = 24{,}221\mathrm{kNm}$$

Wykres obwiedni momentów statyczno-dynamicznych



Dobór przekroju poprzecznego ze względu na SGN

$$\mathrm{W} > \frac{\mathrm{M_d^{extr}}}{\mathrm{f_d}}$$

$$\mathrm{W} > \frac{69{,}955\mathrm{kNm}}{200000\mathrm{kPa}} = 349{,}8cm^3$$

Dobór przekroju poprzecznego ze względu na SGU

$$\mathrm{y_{dop}} = \frac{l_p}{450} = \frac{4m}{450} = 0{,}0889\mathrm{m}$$

Dla dowolnego przekroju ugięcie wynosi

$$\mathrm{q_i} = \mathrm{q_{i,stat}} + \mathrm{amq_i}$$

$$q_{S+D} = 0{,}11785\frac{PL^3}{EJ} + 0{,}355173\frac{F_0L^3}{EJ} = 0{,}11785\frac{4000 * 9{,}81 * 4^3}{200 * 10^9 * J} + 0{,}355173\frac{3000 * 4^3}{200 * 10^9 * J} =$$
$$= \frac{0{,}000001821\mathrm{m}^5}{J}$$

Warunek SGU

$$q_{S+D} < y_{dop}$$

$$\frac{0{,}000001821\mathrm{m}^5}{J} < 0{,}0889m$$

$$J > \frac{0{,}000001821\mathrm{m}^5}{0{,}0889m} = 0{,}000020484\mathrm{m}^4 = 2048{,}4\mathrm{cm}^4$$

Przyjęto przekrój

2 C200: $W_x = 382\ \mathrm{cm}^3$, $J_x = 3820\ \mathrm{cm}^4$

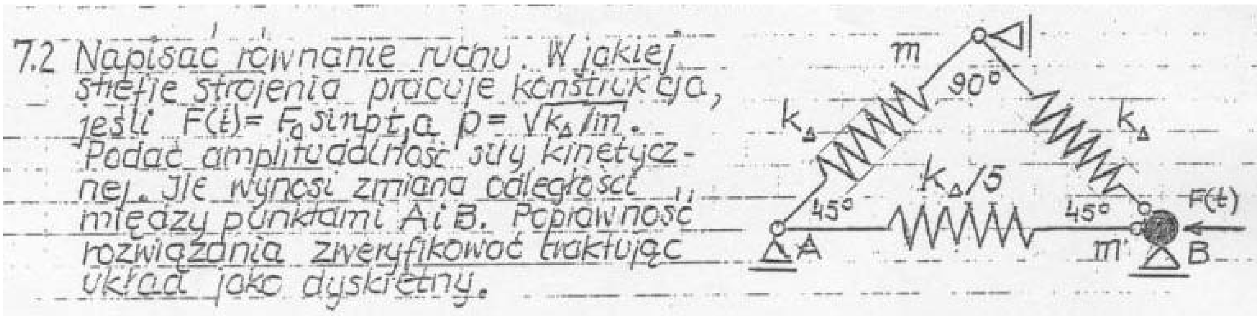
Przekrojowa sztywność giętna

$EJ = 200 \cdot 10^9 \cdot 3820 \cdot 10^{-8} = 7640000\ \mathrm{Nm}^2$

6.9. Wyznaczenie amplitudy siły kinetycznej oraz amplitudy przemieszczenia dynamicznego w procesie przejściowym

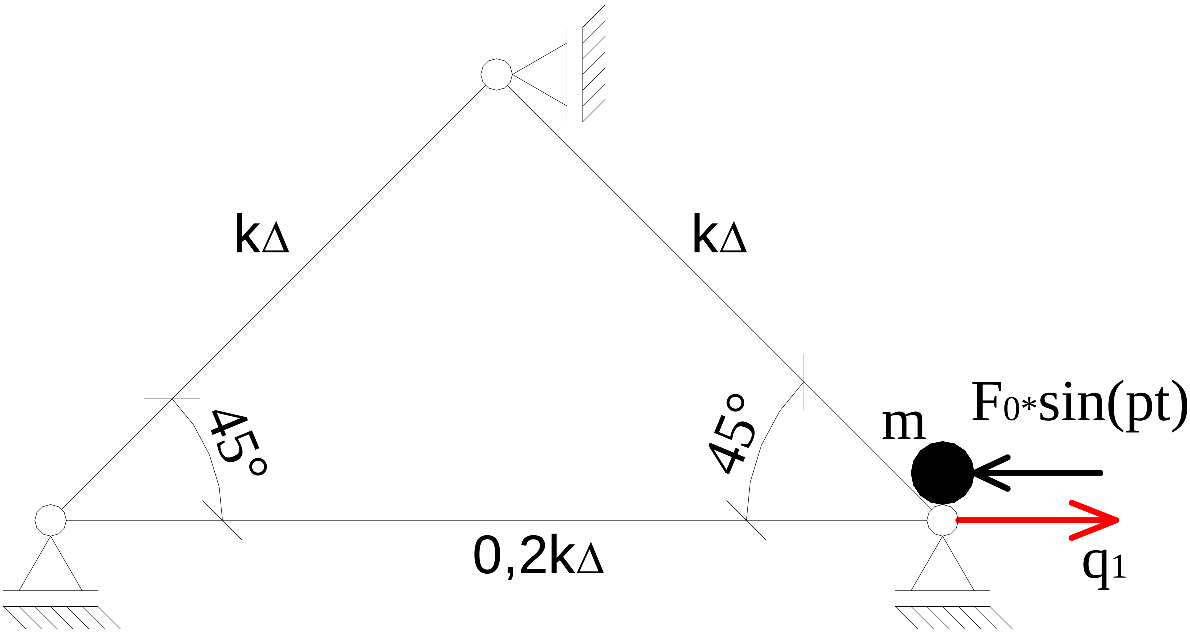
Do procesu przejściowego nie dochodzi, ponieważ $p = \sqrt{0{,}99}\omega$, a więc $p < \omega$.

ZADANIE 7.


7.2 Napisać równanie ruchu. W jakiej strefie strojenia pracuje konstrukcja, jeśli $F(t)= F_0 \sin pt$, a $p= \sqrt{k_\Delta/m}$. Podać amplitudę siły kinetycznej. Jle wynosi zmiana odległości między punktami A i B. Poprawność rozwiązania zweryfikować traktując układ jako dyskretny.

7.1. Przyjęcie współrzędnej uogólnionej

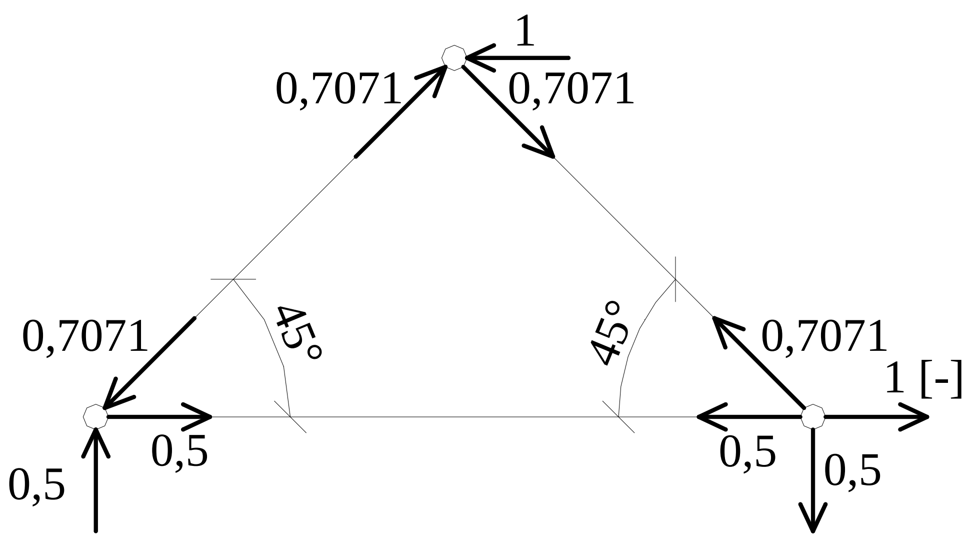
Analizowany układ ma jeden dynamiczny stopień swobody. Współrzędną uogólnioną przyjęto jako poziome przemieszczenie masy skupionej (rys. poniżej).



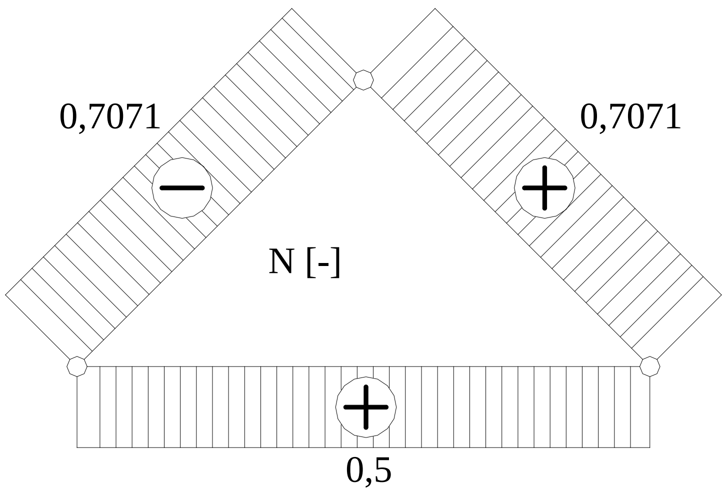
7.2. Wyznaczenie sztywności układu

Sztywność układu można wyznaczyć na podstawie podatności rozwiązując ten układ jak kratownicę elementarną.

Rozkład sił od obciążenia jednostkowego



Wykres sił osiowych



Podatność układu

$$\delta = \frac{1}{k_\Delta}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{k_\Delta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{0{,}2k_\Delta}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4k_\Delta}$$

Sztywność układu

$$k = \delta^{-1} = \left(\frac{9}{4k_\Delta}\right)^{-1} = \frac{4k_\Delta}{9}$$

7.3. Równanie ruchu oraz częstość własna układu

Postać ogólna równania ruchu dla układu o jednym stopniu swobody

$$m\,\ddot{q}(t)+c\,\dot{q}(t)+k\,q(t)=F(t)$$

Dla danych z zadania mamy

$$m\,\ddot{q}(t)+\frac{4k_\Delta}{9}q(t)=F_0\sin(pt)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4k_\Delta}{9m}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_\Delta}{m}}=0{,}667\sqrt{\frac{k_\Delta}{m}}$$

7.4. Ustalenie strefy strojenia

$$\eta=\frac{p}{\omega}$$

$$\eta=\frac{\sqrt{\frac{k_\Delta}{m}}}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_\Delta}{m}}}=1{,}5$$

$\eta=1{,}5>1$ konstrukcja pracuje w strefie niskiego strojenia !

7.5. Amplitudalna wartość siły kinetycznej

Dla układu, w którym tłumienie jest pomijalnie małe współczynnik dynamiczny wyznacza się ze wzoru

$$\nu=\frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$$

$$\nu=\frac{1}{\left|1-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right|}=0{,}8$$

$$amQ=\nu\cdot amF=0{,}8F_0$$

7.6. Zmiana odległości między punktami A, B

Pręt poziomy można potraktować jako izolowaną więź sprężystą, która rozciągana jest siłą 0,5 [-]. Zatem zmianę odległości między punktami A i B wyznaczyć można z definicji więzi sprężystej

$$|AB|=\frac{P}{k}=\frac{0{,}5}{0{,}2k_\Delta}=\frac{2{,}5}{k_\Delta}$$