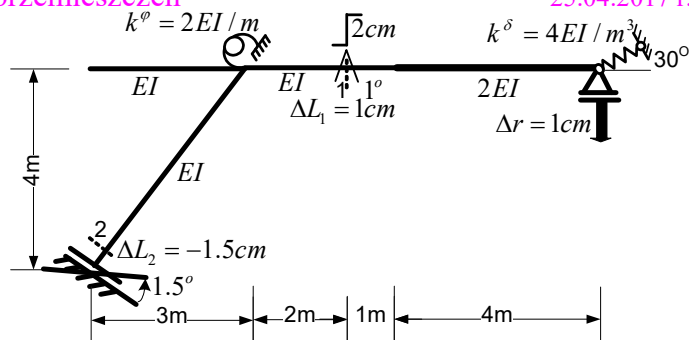


ROZWIĄZANIE RAMY METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Ramę pokazaną na rysunku rozwiązać metodą przemieszczeń i dokonać kontroli rozwiązania.



1. WYZNACZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

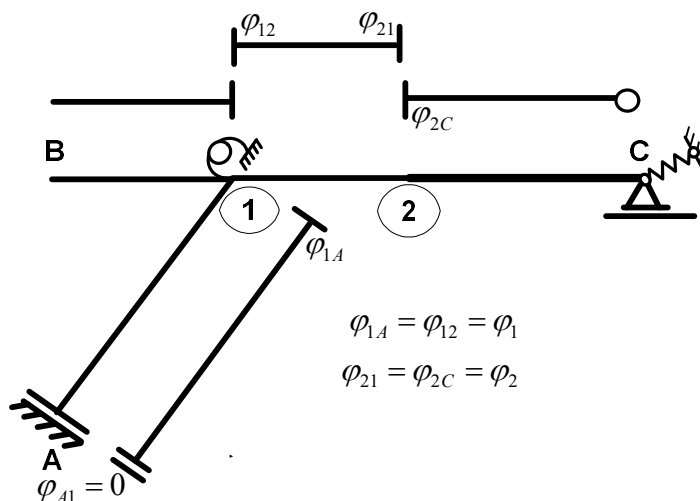
1.1 PODZIAŁ NA ELEMENTY I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW n_ϕ

Na rys. obok przedstawiono podział układu na elementy, dla których dane są wzory transformacyjne.

Zaznaczono 5 kątów

$(\phi_{A1}, \phi_{1A}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{2C})$, które wystąpiły by w tych wzorach gdyby zostały one wypisane. Jak widać wszystkie te kąty określone są przez 2 kąty obrotu węzłów (ϕ_1, ϕ_2) , co

oznacza, że $n_\phi = 2$.



1.2 WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW n_δ

a) Model przegubowy przedstawiono na rysunku obok. Więzy oznaczone liniami przerywanymi odbierają stopnie swobody przesuwu, które zostają uwzględnione we współczynnikach wzorów transformacyjnych (dotyczy to elementu wspornikowego 1B i elementu „s-ł” 1A).

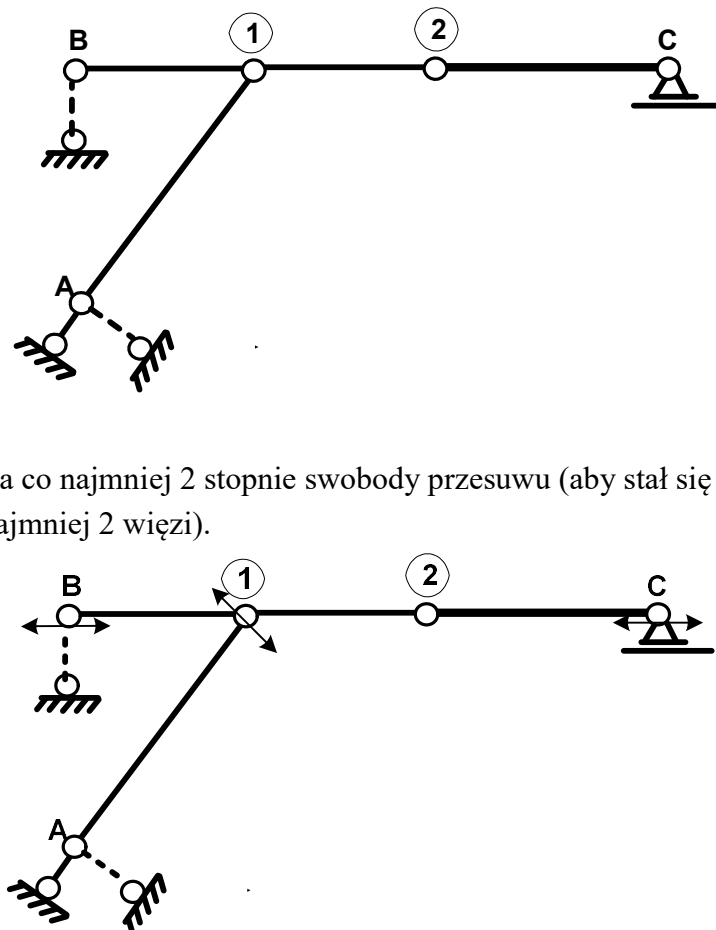
b) Oszacowanie

$$n_\delta \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 8 - 7 - 7 = 2,$$

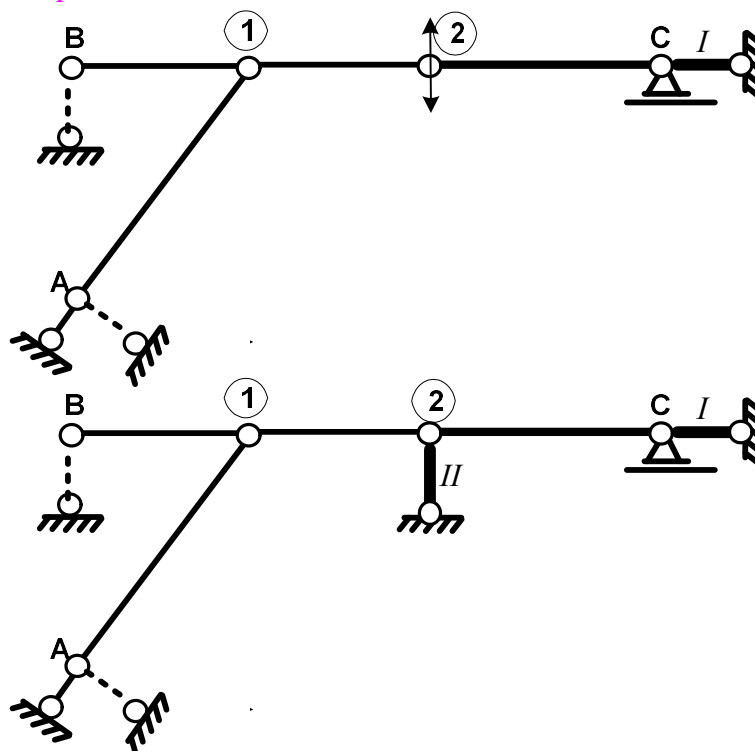
$n_\delta \geq 2$. Wynika stąd, że model przegubowy ma co najmniej 2 stopnie swobody przesuwu (aby stał się geometrycznie niezmienny należy dodać, co najmniej 2 więzy).

c) Analiza kinematyczna

Na rys. obok pokazano model przegubowy z zaznaczonymi, strzałkami, możliwymi kierunkami przesunięć węzłów. Węzeł 2 także ma możliwość przesuwania się, ale kierunek możliwości przesuwu tego węzła nie jest jeszcze określony.



Na rys. obok pokazano model przegubowy z dodaną więzią I, która wyeliminowała zaznaczone powyżej możliwe przesunięcia oraz zaznaczono możliwy jeszcze kierunek przesunięcia węzła 2.



Na rys. obok pokazano model przegubowy z dodanymi 2 więziami I, II, których dodanie sprawiło, że model przegubowy stał się geometrycznie niezmienny, co oznacza, że $n_\delta = 2$.

2. UKŁAD PODSTAWOWY

Uwzględniając wprowadzone oznaczenia, dane przemieszczenia podpór i błędy montażu wynoszą:

$$\varphi_A = -1.5^\circ = -1.5 \cdot \pi / 180 = -0.02618,$$

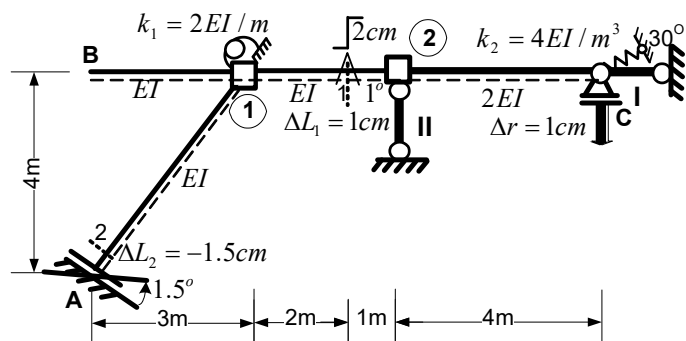
$$\Delta\varphi_1 = +1 = 1 \cdot \pi / 180 = 0.0174533,$$

$$\Delta h_1 = -2\text{cm} = -0.02\text{m},$$

$$v_C = +1\text{cm} = 0.01\text{m},$$

$$\Delta L_{A1} = \Delta L_2 = -1.5\text{cm} = -0.015\text{m},$$

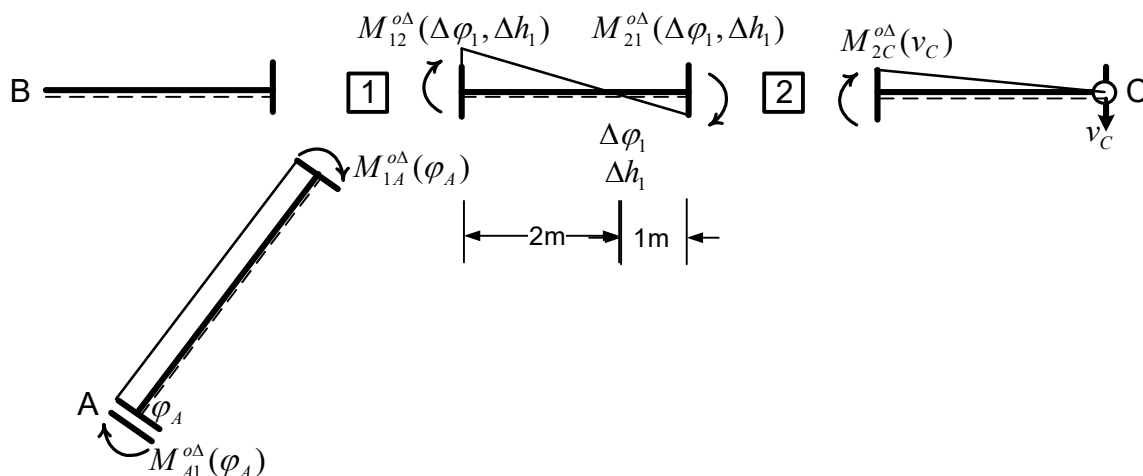
$$\Delta L_{12} = \Delta L_1 = +1\text{cm} = 0.01\text{m}.$$



3. ROZWIĄZANIA UKŁADU PODSTAWOWEGO

3.1 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA DANEGO

a) Wpływy lokalne ($\varphi_A, \Delta\varphi_1, \Delta h_1, v_C$)



Pręt A1 - kąt obrotu końca pręta $\varphi_A = -0.02618$

$$M_{A1}^{oA}(\varphi_A) = a_{A1} \cdot \left(\frac{EI}{L} \right)_{A1} \cdot \varphi_A = 1 \cdot \frac{EI}{5\text{m}} \cdot (-0.02618) = -0.005236 \cdot \frac{EI}{\text{m}}$$

$$M_{1A}^{o\Delta}(\varphi_A) = b_{1A} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{A1} \cdot \varphi_A = -1 \cdot \frac{EI}{5m} \cdot (-0.02618) = 0.005236 \cdot \frac{EI}{m},$$

Pręt 12 – błędy montażu $\Delta\varphi_1 = 0.01745$, $\Delta h_1 = -0.02m$,

$$\xi \cdot L = \xi \cdot 3m = 2m \Rightarrow \xi = 2/3$$

$$M_{12}^{o\Delta}(\Delta\varphi_1) = 2 \cdot (3 \cdot \xi - 2) \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{12} \cdot \Delta\varphi_1 = 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} - 2\right) \cdot \frac{EI}{3m} \cdot 0.01745 = 0,$$

$$M_{21}^{o\Delta}(\Delta\varphi_1) = 2 \cdot (3 \cdot \xi - 1) \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{12} \cdot \Delta\varphi_1 = 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} - 1\right) \cdot \frac{EI}{3m} \cdot 0.01745 = 0.0116333 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{12}^{o\Delta}(\Delta h_1) = M_{21}^{o\Delta}(\Delta h_1) = 6 \cdot \left(\frac{EI}{L^2}\right)_{12} \cdot \Delta h_1 = 6 \cdot \frac{EI}{(3m)^2} \cdot (-0.02m) = -0.0133333 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{12}^{o\Delta}(\Delta\varphi_1, \Delta h_1) = 0 - 0.0133333 \cdot \frac{EI}{m} = -0.0133333 \cdot \frac{EI}{m},$$

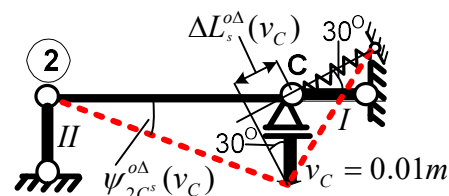
$$M_{21}^{o\Delta}(\Delta\varphi_1, \Delta h_1) = 0.0116333 - 0.0133333 \cdot \frac{EI}{m} = -0.0017 \cdot \frac{EI}{m},$$

Pręt 2C – przesunięcie poprzeczne końca pręta $v_C = 0.01m$

$$\psi_{2C}^{o\Delta}(v_C) = v_C / L_{2C} = 0.01m / 4m = 0.0025,$$

$$M_{2C}^{o\Delta}(v_C) = -c_{2C} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{2C} \cdot \psi_{2C}^{o\Delta} = -3 \cdot \frac{2EI}{4m} \cdot 0.0025 = -0.00375 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{C2}^{o\Delta}(v_C) = 0$$



Wpływ ten wywołuje też zmianę długości więzi sprężystej

$$\Delta L_s^{o\Delta}(v_C) = v_C \cdot \sin 30^\circ = 0.01m / 2 = 0.005m.$$

b) Wpływy globalne ($\Delta L_{A1}, \Delta L_{12}$)

Momenty brzegowe od zmian długości prętów ΔL wyznacza się dla wszystkich prętów ze wzorów transformacyjnych $M_{ij}^{o\Delta}(\Delta L) = -c_{ij} \cdot (EI/L)_{ij} \cdot \psi_{ij}^{o\Delta}$, ($\psi_{ij}^{o\Delta} = \Delta L_{ij} / L_{ij}$) po uprzednim wyznaczeniu wzajemnych przesunięć końców prętów i kątów obrotów cięciw prętów.

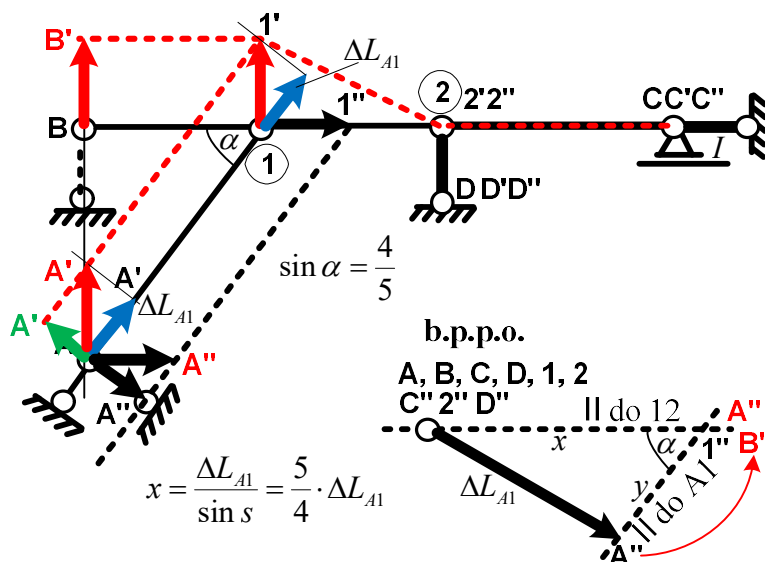
W rozwiązywanym przykładzie $M_{A1}^{o\Delta}(\Delta L) = M_{1A}^{o\Delta}(\Delta L) = M_{B1}^{o\Delta}(\Delta L) = M_{1B}^{o\Delta}(\Delta L) = 0$, gdyż dla pręta wspornikowego i sztywno łożwowego $\psi_{A1} = \psi_{B1} = 0$. Różne od zera mogą być tylko $M_{ij}^{o\Delta}(\Delta L)$ dla prętów 12 i 2C. Wyznaczyć, więc trzeba ψ_{12} i ψ_{2C} oraz zmiany długości więzi sprężystych. Cel ten zrealizujemy zadając przemieszczenia węzłów wywołujące przemieszczenia odpowiadające poszczególnym zmianom długości prętów. Przemieszczenia zadamy tak by odpowiadały wydłużeniom prętów dzięki czemu obliczone dane zmiany długości będziemy uwzględniać wstawiając je z danymi znakami.

Zmianę długości pręta A1

ΔL_{A1} zrealizujemy zadając przemieszczenie węzła A wzdłuż osi pręta A1 o ΔL_{A1} jak na rys obok (w b.p.p.o. zadano obrót w prawo).

Jak wynika z rys:

$\Delta_{2C}(\Delta L_{A1}) = 2''C'' = 0 \Rightarrow$
 $\psi_{2C}(\Delta L_{A1}) = 0,$



$$\Delta_{12}(\Delta L_{A1}) = +1''2'' = x = \frac{5}{4} \cdot \Delta L_{A1} \Rightarrow \psi_{12}(\Delta L_{A1}) = \frac{\Delta_{12}(\Delta L_{A1})}{L_{12}} = \frac{5}{4 \cdot 3m} \cdot (-0.015m) = -0.00625$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_s^{o\Delta}(\Delta L_{A1}) = 0.$

Zmianę długości pręta 12

ΔL_{12} zrealizujemy zadając przemieszczenie węzła C wzdłuż osi pręta 12 i 2C o ΔL_{12} , jak na rys obok (w b.p.p.o. zadano obrót w prawo).
Jak wynika z rys:

$$\Delta_{12}(\Delta L_{12}) = +1''2'' = y = \frac{3}{4} \cdot \Delta L_{12} \Rightarrow$$

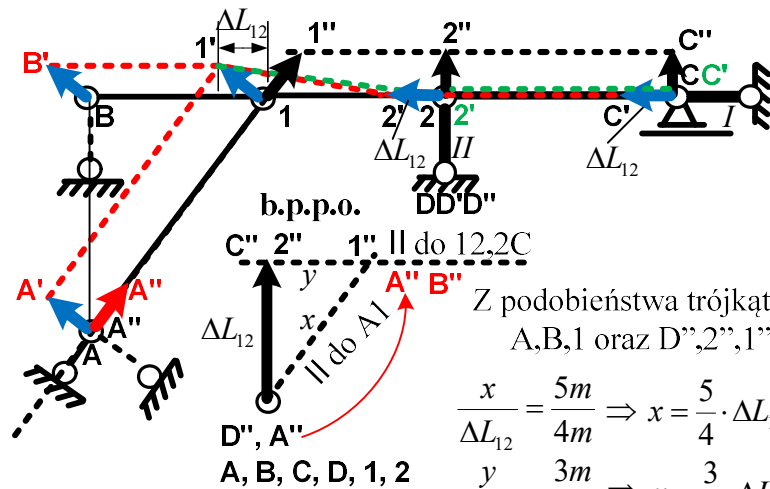
$$\psi_{12}(\Delta L_{12}) = \frac{\Delta_{12}(\Delta L_{12})}{L_{12}} =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 3m} \cdot 0.01m = 0.0025$$

$$\Delta_{2C}(\Delta L_{12}) = 2''C'' = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{2C}(\Delta L_{12}) = 0.,$$

$$\Delta L_s^{o\Delta}(\Delta L_{12}) = 0$$



Kąty obrotu cięciw prętów od ΔL łącznie wynoszą

$$\psi_{ij}^{o\Delta}(\Delta L) = \psi_{ij}^{o\Delta}(\Delta L_{A1}) + \psi_{ij}^{o\Delta}(\Delta L_{12})$$

$$\psi_{12}^{o\Delta}(\Delta L) = -0.00625 + 0.0025 = -0.00375,$$

$$\psi_{2C}^{o\Delta}(\Delta L) = 0$$

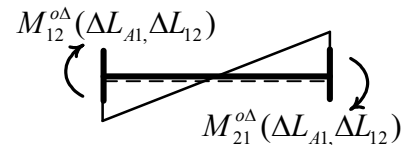
Zmiany długości więzi sprężystych od ΔL łącznie wynoszą

$$\Delta L_s^{o\Delta}(\Delta L) = \Delta L_s^{o\Delta}(\Delta L_{A1}) + \Delta L_s^{o\Delta}(\Delta L_{12}) = 0.$$

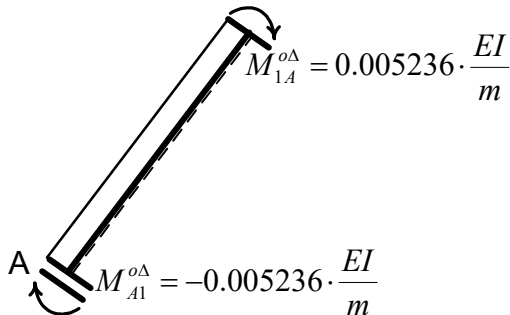
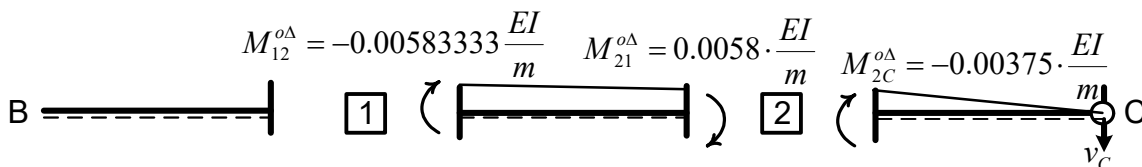
Momenty brzegowe od zmian długości prętów ΔL

$$M_{12}^{o\Delta}(\Delta L) = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot (-0.00375) = 0.0075 \cdot \frac{EI}{m} = M_{21}^{o\Delta}(\Delta L),$$

$$M_{2C}^{o\Delta}(\Delta L) = M_{C2}^{o\Delta}(\Delta L) = 0.$$



c) Łącznie momenty brzegowe od przemieszczeń podpór i błędów montażu



$$M_{A1}^{o\Delta} = -0.005236 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{1A}^{o\Delta} = 0.005236 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{B1}^{o\Delta} = M_{1B}^{o\Delta} = 0,$$

$$M_{12}^{o\Delta} = (-0.013333 + 0.0075) \cdot \frac{EI}{m} = -0.00583333 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{21}^{o\Delta} = (-0.0017 + 0.0075) \cdot \frac{EI}{m} = 0.0058 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{2C}^{o\Delta} = -0.00375 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{C2}^{o\Delta} = 0.$$

Wzajemne przesunięcia końców prętów od zmian długości prętów ΔL i przesunięć podpór Δr mogą być też określone analitycznie z wykorzystaniem związków kinematycznych, na które składają się:

- związki między przemieszczeniami końców prętów a zmianami ich długości

$$u_p \cdot (-\cos \alpha_{pk}) + v_p \cdot (-\sin \alpha_{pk}) + u_k \cdot \cos \alpha_{pk} + v_k \cdot \sin \alpha_{pk} = \Delta L_{pk},$$

- warunki uwzględniające, że kąty obrotu cięciw a więc i wzajemne poprzeczne przesunięcia ich końców dla prętów: wspornikowego i sztywno łożwa są równe zero

$$\Delta_{pk} = u_p \cdot \sin \alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos \alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin \alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos \alpha_{pk} = 0,$$

które można przyjąć w postaci $-u_p + u_k = \Delta L_{pk} \cdot \cos \alpha_{pk}$, $-v_p + v_k = \Delta L_{pk} \cdot \sin \alpha_{pk}$,

- oraz warunki brzegowe: $-0.6 \cdot u_A + 0.8 \cdot v_A = 0$ (stąd $v_A = 0.75 \cdot u_A$), $u_C = \delta_I = 0$, $v_C = 0$, $v_2 = \delta_{II} = 0$.

Układ warunków oraz zestawienie wyników ich rozwiązania przedstawiono w poniższej tabeli (zaznaczono też kolejność wyznaczania zmiennych i z których równań zostały obliczone)

CHARAKTERYSTYKI PRĘTÓW					
Pręt	Lx	Ly	L	cos a	sin a
				Lx/L	Ly/L
A-1	3	-4	5	0.6	-0.8
B-1	3	0	3	1	0
1-2	3	0	3	1	0
2-C	4	0	4	1	0
Mnoż.	m	m	m		

BŁĘDY MONTAŻU I PRZEMIESZCZENIA PODPÓR				
$\Delta\varphi_1$	Δh_1	ΔL	φ_A	v_C
		-0.015	-0.02618	
0.01745	-0.02	0.01		0.01
	m	m		m

UKŁAD RÓWNAŃ

		A		B		1		2		C			
	Pręt	u_A	v_A	u_B	v_B	u_1	v_1	u_2	v_2	u_C	v_C		
			$0.75u_A$						0	0	0.01		War. wyjściowe
1	A-1	-0.6	0.8			0.6	-0.8					=	ΔL_{A1}
2	B-1			-1	0	1	0					=	ΔL_{B1}
3	1-2					-1	0	1	0			=	ΔL_{12}
4	2-C							-1	0	1	0	=	ΔL_{2C}
5	A-1	-1				1						=	$0.6\Delta L_{A1}$
6	A-1		-1				1					=	$-0.8\Delta L_{A1}$
7	B-1				-1		1					=	0
		-0.001	-0.00075	-0.01	0.001125	-0.01	0.001125	0	0	0	0.01		Zest. wyników
		4	5	3	7	2	6	1					Kolejność obliczania zmiennych
		z r.5	w.b.	z r.2	z r.7	z r.3	z r.6	z r.4					Z równania

Rozwiązanie powyższego układu równań rozpisano poniżej:

1) z równania 4 $-u_2 + u_C = \Delta L_{2C}$ po uwzględnieniu $u_C = 0$ otrzymujemy $u_2 = -\Delta L_{2C} = 0$,

2) z równania 3 $-u_1 + u_2 = \Delta L_{12}$ po uwzględnieniu powyższej wartości u_2

$$u_1 = u_2 - \Delta L_{12} = (0 - 0.01) \cdot m = -0.01m,$$

3) z równania 2 $-u_B + u_1 = \Delta L_{B1}$ po uwzględnieniu powyższej wartości u_1

$$u_B = u_1 - \Delta L_{B1} = (-0.01 - 0)m = -0.01m,$$

4) z równania 5 $-u_A + u_1 = 0.6 \cdot \Delta L_{A1}$ po uwzględnieniu powyższej wartości u_1

$$u_A = u_1 - 0.6 \cdot \Delta L_{A1} = (-0.01 - 0.6 \cdot (-0.015)) \cdot m = -0.001m,$$

5) z warunku brzegowego

$$v_A = 0.75 \cdot u_A = 0.75 \cdot (-0.001)m = -0.00075m,$$

6) z równania 6 $-v_A + v_1 = -0.8 \cdot \Delta L_{A1}$ po uwzględnieniu powyższej wartości v_A

$$v_1 = v_A - 0.8 \cdot \Delta L_{A1} = (-0.00075 - 0.8 \cdot (-0.015)) \cdot m = 0.001125m,$$

7) z równania 7 $-v_B + v_1 = 0$

$$v_B = v_1 = 0.001127m,$$

Pozostało równanie 1 $-0.6 \cdot u_A + 0.8 \cdot v_A + 0.6 \cdot u_1 - 0.8 \cdot v_1 = -25^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m$, które jest spełnione tożsamościowo, gdyż dla pręta A1 wykorzystano 2 równania w postaci 5 i 6.

Wykorzystując powyższe wartości obliczamy wzajemne poprzeczne przesunięcia końców prętów

$$\Delta_{pk} = u_p \cdot \sin \alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos \alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin \alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos \alpha_{pk}$$

i kąty obrotu cięciw $\psi_{pk} = \Delta_{pk} / L_{pk}$.

Obliczenia wykonano w tabeli poniżej

WYZNACZENIE Δ_{ij} oraz ψ_{ij} OD PRZEMIESZCZEŃ

	A		B		1		2		C				
Pręt	u_A	v_A	u_B	v_B	u_1	v_1	u_2	v_2	u_C	v_C		Δ_{ij}	ψ_{ij}
	-0.001	-0.00075	-0.01	0.01125	-0.01	0.01125	0	0	0	0.01			
Mnoz.	m											m	
A-1	-0.8	-0.6			0.8	0.6					=	0.00000	0.00000
B-1			0	-1	0	1					=	0	0
1-2					0	-1	0	1			=	-0.01125	-0.00375
2-C							0	-1	0	1	=	0.01	0.0025

Jak widać ψ_{12} ma wartość taką jak wyznaczona powyżej od ΔL (v_c nie ma wpływu na ψ_{12}), a ψ_{2C} ma wartość taką jak wyznaczona powyżej od v_c (ΔL nie mają wpływu na ψ_{2C}).

3.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $\delta_I = 1$

Na rys. poniżej przedstawiono odkształcony układ przegubowy (przerywane linie żółte) i b.p.p.o. (obrót zadano w prawo).

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów i kątów obrotów cięciw.

$$\Delta_{1A}^I = +|1'' A''| = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = 0,$$

$$\Delta_{1B}^I = +|1'' B''| = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{1B}^I = \frac{\Delta_{1B}^I}{L_{1B}} = 0,$$

$$\Delta_{12}^I = -|1'' 2''| = -3/4 \Rightarrow$$

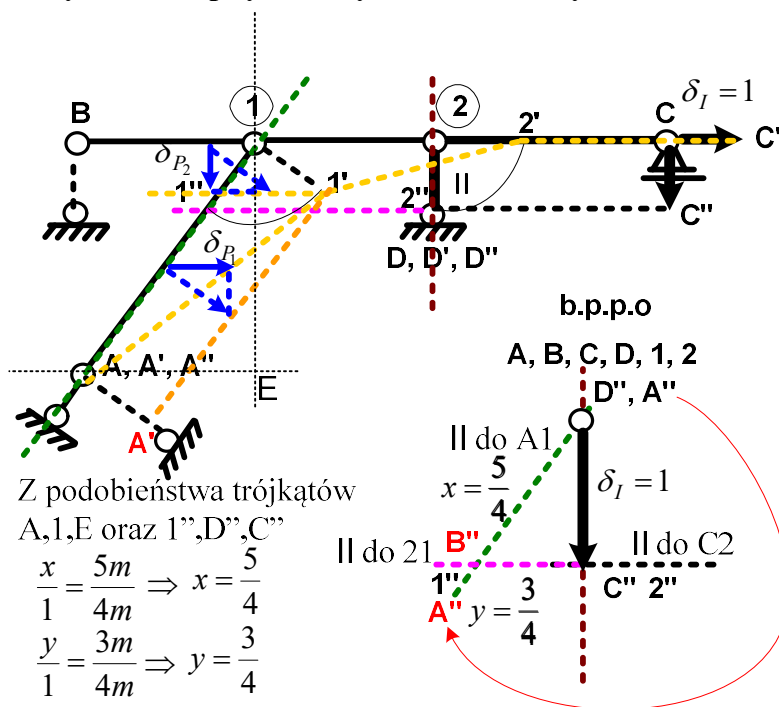
$$\psi_{12}^I = -\frac{3}{4 \cdot 3m} = -\frac{1}{4m},$$

$$\Delta_{2C}^I = |2'' C''| = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{2C}^I = \frac{\Delta_{2C}^I}{L_{2C}} = 0.$$

Wydłużenie sprężystej więzi translacyjnej

$$\Delta L_s^I = -1 \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$



3.3 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $\delta_{II} = 1$

Na rys. poniżej przedstawiono odkształcony model przegubowy i b.p.p.o. (tu dokonano obrotu w lewo).

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów i kątów obrotów cięwi prętów

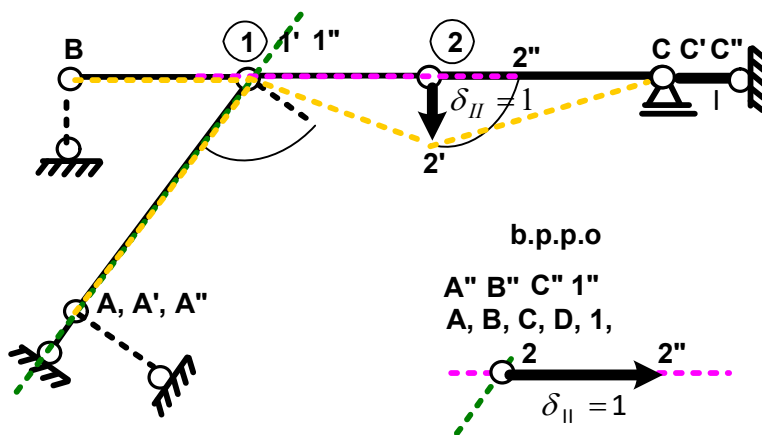
$$\Delta_{1A}'' = +|1''A''| = 0 \Rightarrow \psi_{1A}'' = \frac{\Delta_{1A}''}{L_{1A}} = 0,$$

$$\Delta_{1B}'' = +|1''B''| = 0 \Rightarrow \psi_{1B}'' = \frac{\Delta_{1B}''}{L_{1B}} = 0,$$

$$\Delta_{12}'' = |1''2''| = 1 \Rightarrow \psi_{12}'' = \frac{\Delta_{12}''}{L_{12}} = \frac{1}{3m},$$

$$\Delta_{2C}'' = -|2''C''| = -1 \Rightarrow \psi_{2C}'' = \frac{\Delta_{2C}''}{L_{2C}} = -\frac{1}{4m}$$

Wydłużenie sprężystej więzi translacyjnej $\delta_s'' = 0$.



4. UKŁAD RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

4.1 POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1\Delta} &= 0, \\ k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2\Delta} &= 0, \\ k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I,I} \cdot \delta_I + k_{I,II} \cdot \delta_{II} + k_{I,\Delta} &= 0, \\ k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II,I} \cdot \delta_I + k_{II,II} \cdot \delta_{II} + k_{II,\Delta} &= 0. \end{aligned}$$

4.2 OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} = \sum_{j=A,B,2} a_{1j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{1j} + k_1^\varphi = 1 \cdot \frac{EI}{5m} + 0 + 4 \cdot \frac{EI}{3m} + k_1^\varphi = \frac{53}{15} \cdot \frac{EI}{m} = 3.5333333 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{12} = k_{21} = b_{12} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{12} = 2 \cdot \frac{EI}{3m} = 0.666667 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = k_{I1} = - \sum_{j=A,B,2} c_{1j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{1j} \cdot \psi_{1j}^I = 0 - 6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) - 0 = 0.5 \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1II} = k_{II1} = - \sum_{j=A,B,2} c_{1j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{1j} \cdot \psi_{1j}^{II} = 0 + 0 - 6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{2}{2} \cdot \frac{EI}{m^2} = -0.666667 \cdot \frac{EI}{m^2}$$

$$k_{1\Delta} = \sum_{j=A,B,2} M_{1j}^{\Delta} = (0.005236 + 0 - 0.005833) \cdot \frac{EI}{m} = -0.0005966 \frac{EI}{m},$$

$$k_{22} = \sum_{j=1,C} a_{2j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{2j} + k_2^\varphi = 4 \cdot \frac{EI}{3m} + 3 \cdot \frac{2EI}{4m} + 0 = \frac{17}{6} \cdot \frac{EI}{m} = 2.8333333 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{2I} = k_{I2} = - \sum_{j=1,C} c_{2j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{2j} \cdot \psi_{2j}^I = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) + 0 = 0.5 \cdot \frac{EI}{m^2}$$

$$k_{2II} = k_{II2} = - \sum_{j=1,C} c_{2j} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{2j} \cdot \psi_{2j}^{II} = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \frac{1}{3m} - 3 \cdot \frac{2EI}{4m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) = -\frac{7}{24} \cdot \frac{EI}{m^2} = -0.291667 \cdot \frac{EI}{m^2}$$

$$k_{2\Delta} = \sum_{j=1,C} M_{2j}^{\Delta} = (0.005800 - 0.00375) \cdot \frac{EI}{m} = 0.00205 \frac{EI}{m},$$

$$\begin{aligned} k_{I,I} &= \sum_{ij=A1,B1,12,2C} d_{ij} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{ij} \cdot \psi_{ij}^I \cdot \psi_{ij}^I + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^I = \\ &= 0 + 0 + 12 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) + 0 + 4 \cdot \frac{EI}{m^3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.25 \cdot \frac{EI}{m^3}, \end{aligned}$$

$$k_{I,II} = k_{II,I} = \sum_{ij=A1,B1,12,2C} d_{ij} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{ij} \cdot \psi_{ij}^I \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^{II} =$$

$$= 0 + 0 + 12 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) \cdot \frac{1}{3m} + 0 + 0 = -0.33333333 \cdot \frac{EI}{m^3},$$

$$k_{I,\Delta} = - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^{o\Delta} + M_{ji}^{o\Delta}) \cdot \psi_{ij}^I + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^{o\Delta} = 0.017321$$

$$= -0 - 0 - (-0.000033) \frac{EI}{m} \cdot \frac{1}{4m} - 0 + 4 \frac{EI}{m^3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0.005 m = -0.017313 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{II,II} = \sum_{ij=A1,B1,12,2C} d_{ij} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{ij} \cdot \psi_{ij}^{II} \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^{II} \cdot \Delta L_s^{II} =$$

$$= 0 + 0 + 12 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \frac{1}{3m} \cdot \frac{1}{3m} + 3 \cdot \frac{2EI}{4m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) + 0 = \frac{155}{288} \cdot \frac{EI}{m^3} = 0.53819444 \cdot \frac{EI}{m^3}$$

$$k_{II,\Delta} = - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^{o\Delta} + M_{ji}^{o\Delta}) \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^{o\Delta} = -0 - 0 - (-0.0000333) \frac{EI}{m} \cdot \frac{1}{3m} +$$

$$- (-0.00375) \frac{EI}{m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) + 0 = -0.0009264 \frac{EI}{m^2}$$

4.3 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$3.533333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0.666667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 0.666667 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 0.0005966 \frac{EI}{m} = 0,$$

$$0.666667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2.833333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 0.291667 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 0.00205 \frac{EI}{m} = 0,$$

$$0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 3.25 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I - 0.333333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0.017321 \frac{EI}{m^2} = 0,$$

$$-0.666667 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 - 0.291667 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 - 0.333333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0.538194 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0.0009264 \frac{EI}{m^2} = 0.$$

$$\varphi_1 = 0.00060495, \quad \varphi_2 = -0.0013642, \quad \delta_I = 0.00600277 m, \quad \delta_{II} = 0.00544916 m.$$

5. RZECZYWISTE SIŁY PRZEKROJOWE

5.1 OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Przed obliczeniem momentów obliczymy rzeczywiste kąty obrotu cięćw prętów z pominięciem składników $\psi_{ij}^{o\Delta}$, których wpływ na momenty został uwzględniony w składnikach $M_{ij}^{o\Delta}$

Wzór: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^I \cdot \delta_I + \psi_{ij}^{II} \cdot \delta_{II}.$

Obliczenia: $\psi_{A1} = 0, \quad \psi_{B1} = 0,$

$$\psi_{12} = -\frac{1}{4m} \cdot 0.0060028m + \frac{1}{3m} \cdot 0.0054492m = 0.000315694,$$

$$\psi_{2C} = 0 - \frac{1}{4m} \cdot 0.0054492m = -0.00136229.$$

Momenty brzegowe obliczamy z wzorów transformacyjnych

$$M_{A1}^\Delta = \left(\frac{EI}{L}\right)_{1A} \cdot (\varphi_{A1} - \varphi_{1A}) + M_{1A}^{o\Delta} = \frac{EI}{5m} \cdot (0 - (-0.0013642)) - 0.005236 \cdot \frac{EI}{m} = -0.005357 \cdot \frac{EI}{m},$$

(tu wpływ φ_{A1} na moment został uwzględniony w $M_{A1}^{o\Delta}$),

$$M_{1A}^\Delta = \left(\frac{EI}{L}\right)_{1A} \cdot (\varphi_{1A} - \varphi_{A1}) + M_{1A}^{o\Delta} = \frac{EI}{5m} \cdot (-0.0013642 - 0) + 0.005236 \cdot \frac{EI}{m} = 0.005357 \cdot \frac{EI}{m},$$

(tu wpływ φ_{A1} na moment został uwzględniony w $M_{1A}^{o\Delta}$),

$$M_{1B}^{\Delta} = M_{1B}^{\Delta\alpha} = 0, \quad M_{B1}^{\Delta} = 0,$$

$$M_{12}^{\Delta} = (EI/L)_{12} \cdot (4\varphi_{12} + 2\varphi_{21} - 6\psi_{12}) + M_{12}^{\Delta\alpha} =$$

$$= \frac{EI}{3m} \cdot (4 \cdot 0.00060495 + 2 \cdot (-0.0013642) - 6 \cdot 0.000315694) - 0.00583333 \frac{EI}{m} = -0.006567 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{21}^{\Delta} = (EI/L)_{12} \cdot (4\varphi_{21} + 2\varphi_{12} - 6\psi_{12}) + M_{21}^{\Delta\alpha} =$$

$$= \frac{EI}{3m} \cdot (4 \cdot (-0.0013642) + 2 \cdot 0.00060495 - 6 \cdot 0.000315694) + 0.0058 \cdot \frac{EI}{m} = 0.003753 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{2C}^{\Delta} = (EI/L)_{2C} \cdot 3 \cdot (\varphi_{2C} - \psi_{2C}) + M_{2C}^{\Delta\alpha} =$$

$$= \frac{2EI}{4m} \cdot 3 \cdot (-0.0013642 - (-0.00136229)) - 0.00375 \cdot \frac{EI}{m} = -0.003753 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{C2}^{\Delta} = 0.$$

Moment w więzi rotacyjnej: $S_1^{\varphi\Delta} = k_1^{\varphi\Delta} \cdot \varphi_1 = 2 \cdot \frac{EI}{L} \cdot 0.00060495 = 0.00121 \cdot \frac{EI}{m}.$

Zmiana długości więzi translacyjnej

$$\Delta L_s^{\Delta} = \Delta L_s^I \cdot \delta_I + \Delta L_s^{II} \cdot \delta_{II} + \Delta L_s^{\Delta\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.00600277m + 0 + 0.005m = -0.00019855m.$$

Siła osiowa w więzi translacyjnej: $S_s^{\Delta\alpha} = k_s^{\Delta\alpha} \cdot \Delta L_s = 4 \cdot EI / m^3 \cdot (-0.00019855)m = -0.0007942 \cdot \frac{EI}{m^2}.$

Powyższe obliczenia można też wykonać tabelarycznie.

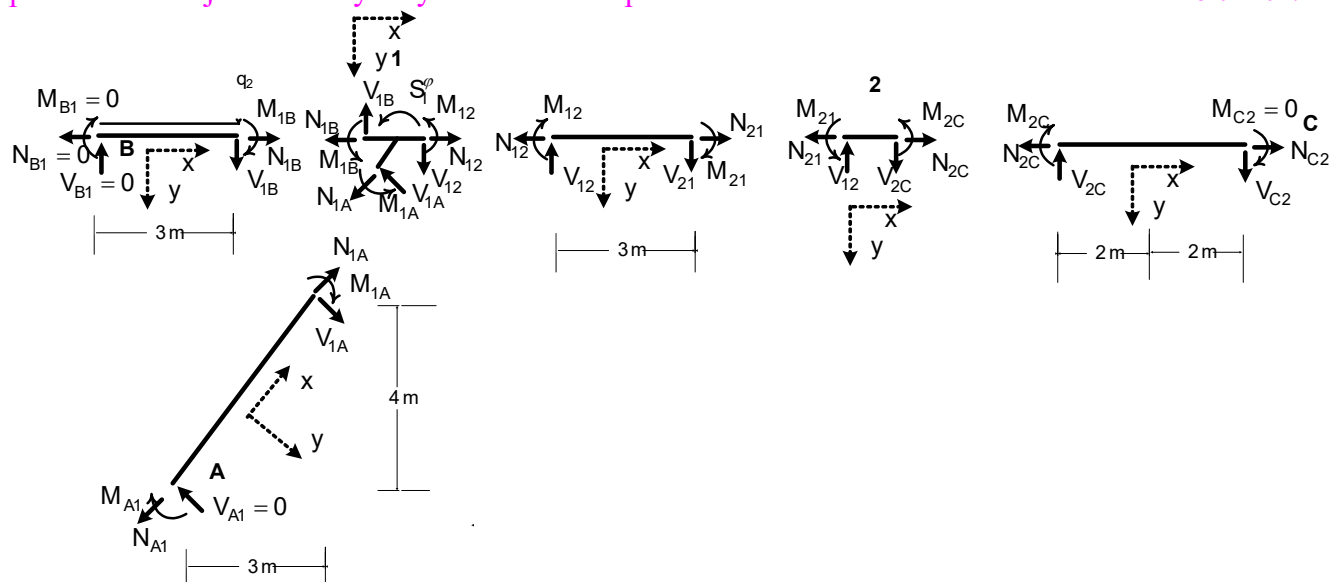
W kolumnie ostatniej obliczono siły tnące na podstawie wzoru: $V_{ij} = -(M_{ij} + M_{ji}) / L_{ij}$

	δ_I	δ_{II}		φ_1	φ_2					
	0.0060028	0.0054492		0.000605	-0.0013642		7035.75		11726.25	
	m									
	ψ^I	ψ^{II}	ψ	M^I	M^{II}	$M(\psi=1)$	$M^{\Delta\alpha}$		M^{Δ}	V^{Δ}
M_{A1}	0	0	0	-0.2	0	0	-0.005236	=	-0.005357	0
M_{1A}				0.2	0	0	0.005236	=	0.005357	0
M_{B1}	0	0	0	0	0	0	0	=	0.000000	0
M_{1B}				0	0	0	0	=	0.000000	0
M_{12}	-0.25	0.333333	0.0003157	1.333333	0.666667	-2	-0.005833	=	-0.006567	0.0009380
M_{21}			0.0003157	0.666667	1.333333	-2	0.0058	=	0.003753	0.0009380
M_{2C}	0	-0.25	-0.001362	0	1.5	-1.5	-0.00375	=	-0.003753	0.0009382
M_{C2}			-0.001362	0	0	0	0	=	0.000000	0.0009382
S^{φ_1}				2	0	0	0	=	0.0012099	
Mnożnik	1/m			EI/m			EI/m ²			EI/m ²
S^{δ_1}	ΔL^I	ΔL^{II}	$\Delta L^{\Delta\alpha}$	ΔL					S^{Δ}	
	-0.86603	0	0.005	-0.000199					-0.00079421	

Brzegowe siły tnące mogą też być obliczone bezpośrednio z wykorzystaniem wzorów transformacyjnych (patrz przykład 1b).

5.2 OBLICZENIE SIŁ TNĄCYCH I SIŁ OSIOWYCH ORAZ KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Brzegowe siły tnące wyznaczymy z równań równowagi prętów a siły osiowe z równań równowagi prętów i węzłów. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły oraz obciążamy wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi (określonymi już momentami i szukanymi siłami osiowymi i tnącymi) z uwzględnieniem znanych wartości wynikających z warunków podparcia ($N_{B1} = V_{B1} = V_{A1} = 0$)



PRĘT A-1 $\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 5m = 0 \Rightarrow -0.005357 + 0.005357 + V_{1A} \cdot 5m = 0 \Rightarrow V_{1A} = 0,$
 $\sum Y = V_{1A} - V_{A1} = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$ (spełnione tożsamościowo),
 $\sum X = -N_{A1} + N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{1A} = N_{A1}.$

PRĘT B-1 $\sum M_B = M_{B1} + M_{1B} + V_{1B} \cdot 3m = 0 \Rightarrow 0 + 0 + V_{1B} \cdot 3m = 0 \Rightarrow V_{1B} = 0,$
 $\sum Y = V_{1B} - V_{B1} = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$ (spełnione tożsamościowo),
 $\sum X = -N_{B1} + N_{1B} = 0 \Rightarrow N_{1B} = N_{B1} = 0.$

PRĘT 1-2 $\sum M_1 = M_{12} + M_{21} + V_{21} \cdot 3m = 0 \Rightarrow (-0.006567 + 0.003753)EI/m + V_{21} \cdot 3m = 0 \Rightarrow$
 $V_{21} = 0.0009380EI/m^2,$
 $\sum Y = V_{21} - V_{12} = 0 \Rightarrow V_{12} = V_{21} = 0.0009380EI/m^2,$
 $\sum X = -N_{12} + N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$

PRĘT 2-C $\sum M_2 = M_{2C} + M_{C2} + V_{C2} \cdot 4m = 0 \Rightarrow (-0.003753 + 0)EI/m + V_{C2} \cdot 4m = 0 \Rightarrow$
 $V_{C2} = 0.0009382EI/m^2,$
 $\sum Y = V_{C2} - V_{2C} = 0 \Rightarrow V_{2C} = V_{C2} = 0.0009382EI/m^2,$
 $\sum X = -N_{2C} + N_{C2} = 0 \Rightarrow N_{2C} = N_{C2}.$

WĘZEL 1

$\sum M_1 = -M_{1A} - M_{1B} - M_{12} - S_1^p = -0.005357 + 0 - (-0.006567) - 0.001210 = 0,$
 (spełnione tożsamościowo),

$\sum Y = V_{12} - V_{1B} - V_{1A} \cdot 0.6 + N_{1A} \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow$
 $0.0009381 - 0 - 0 \cdot 0.6 + N_{1A} \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow N_{1A} = -0.0011726EI/m^2$

$\sum X = N_{12} - N_{1B} - N_{1A} \cdot 0.6 - V_{1A} \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow$
 $N_{12} - 0 - (-0.0011726)EI/m^2 \cdot 0.6 - 0 \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow N_{12} = -0.00070358EI/m^2$

Z trzeciego równania dla pręta A-1 $N_{A1} = N_{1A} = -0.0011726EI/m^2.$

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{21} = N_{12} = -0.00070358EI/m^2.$

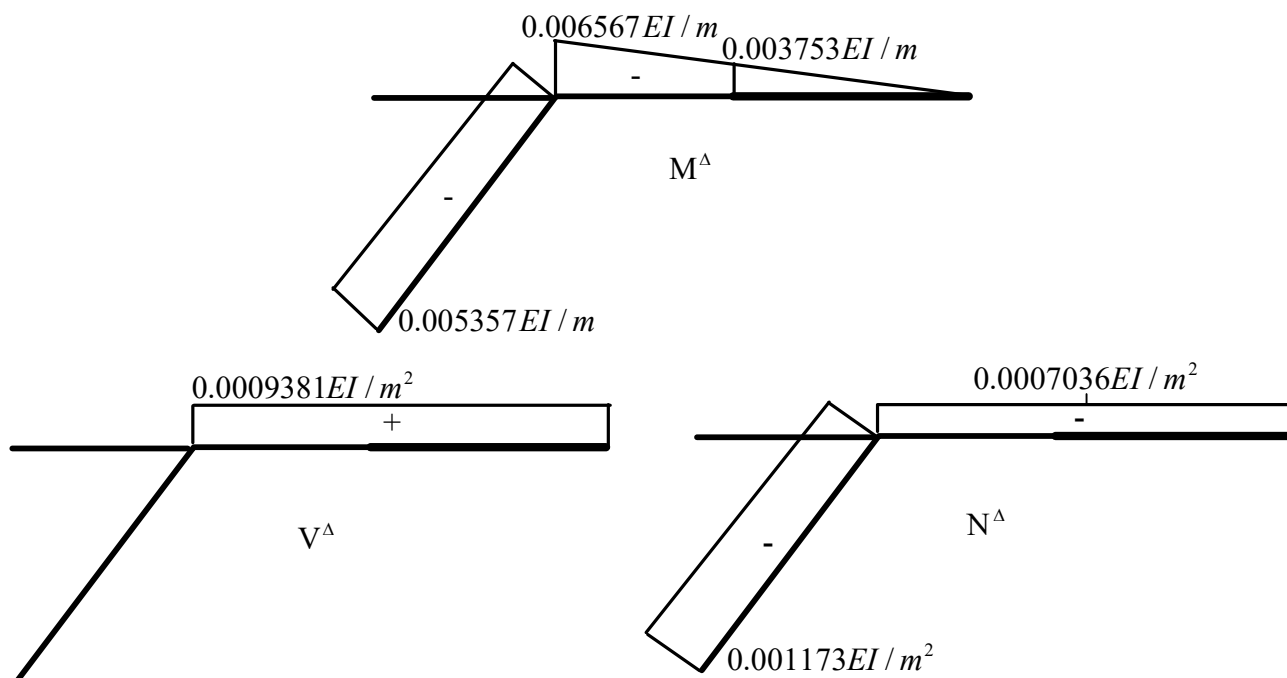
WĘZEL 2 $\sum M_2 = -M_{21} - M_{2C} = -0.003753 - (-0.003753) = 0$ (spełnione tożsamościowo),

$\sum Y = V_{2C} - V_{21} = 0.0009382 - 0.0009380 = 0.0000002$ (spełnione tożsamościowo),

$\sum X = N_{2C} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{2C} = N_{21} = -0.00070358EI/m^2,$

Z trzeciego równania dla pręta 2-C wyznaczamy $N_{C2} = N_{2C} = -0.00070358EI/m^2.$

5.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH



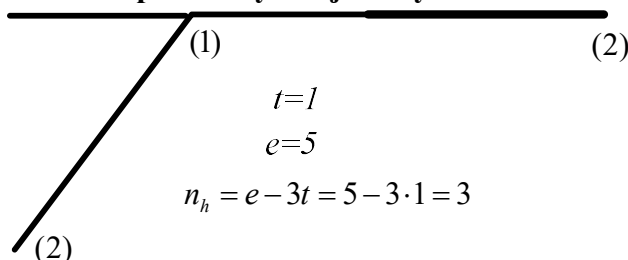
6. KONTROLA ROZWIĄZANIA

6.1 KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Kontrola ta została wykonana w trakcie wyznaczania sił tnących i osiowych.

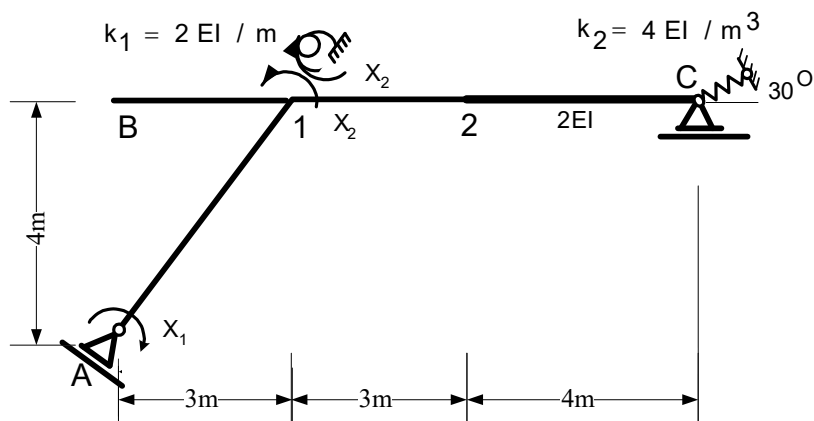
6.2 KONTROLA KINEMATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

1) Wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu



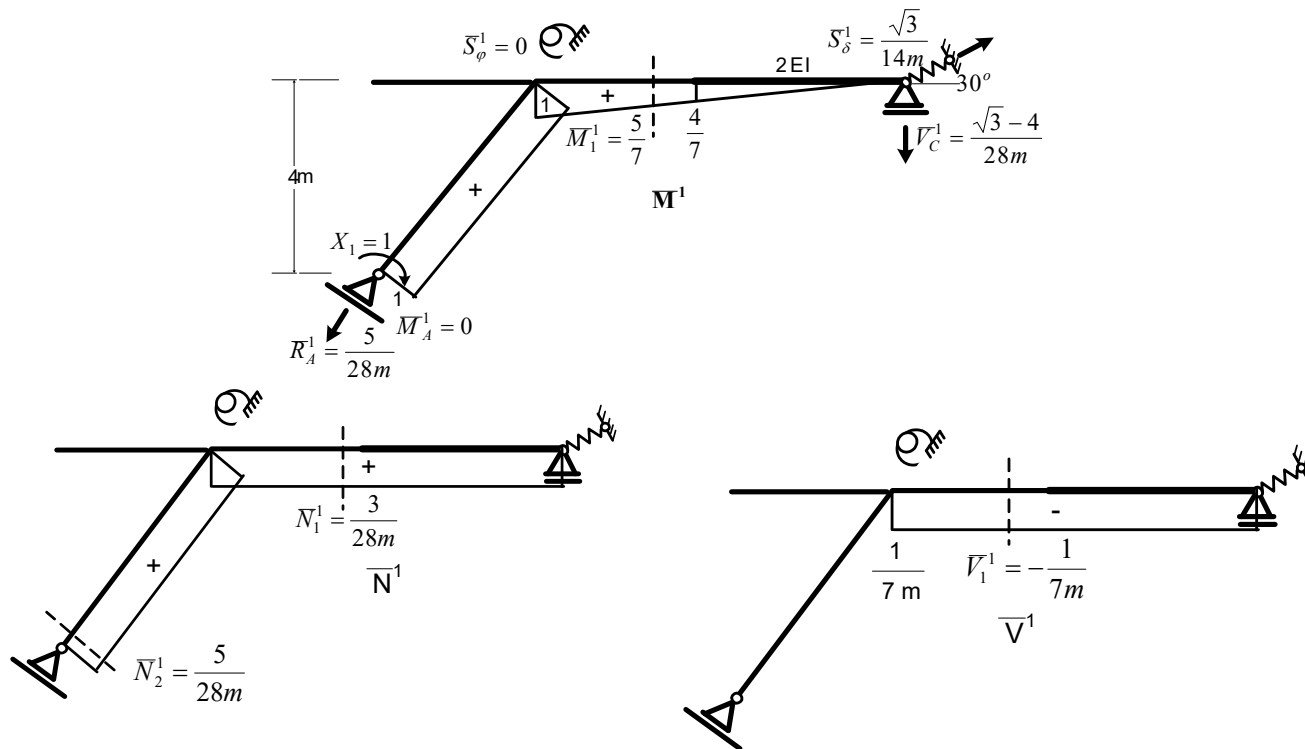
2) Układ podstawowy metody sił bez obciążeń danych

Sily X_1 i X_2 muszą tu być przyjęte z takimi zwrotami jak w rozwiązaniu metodą przemieszczeń.

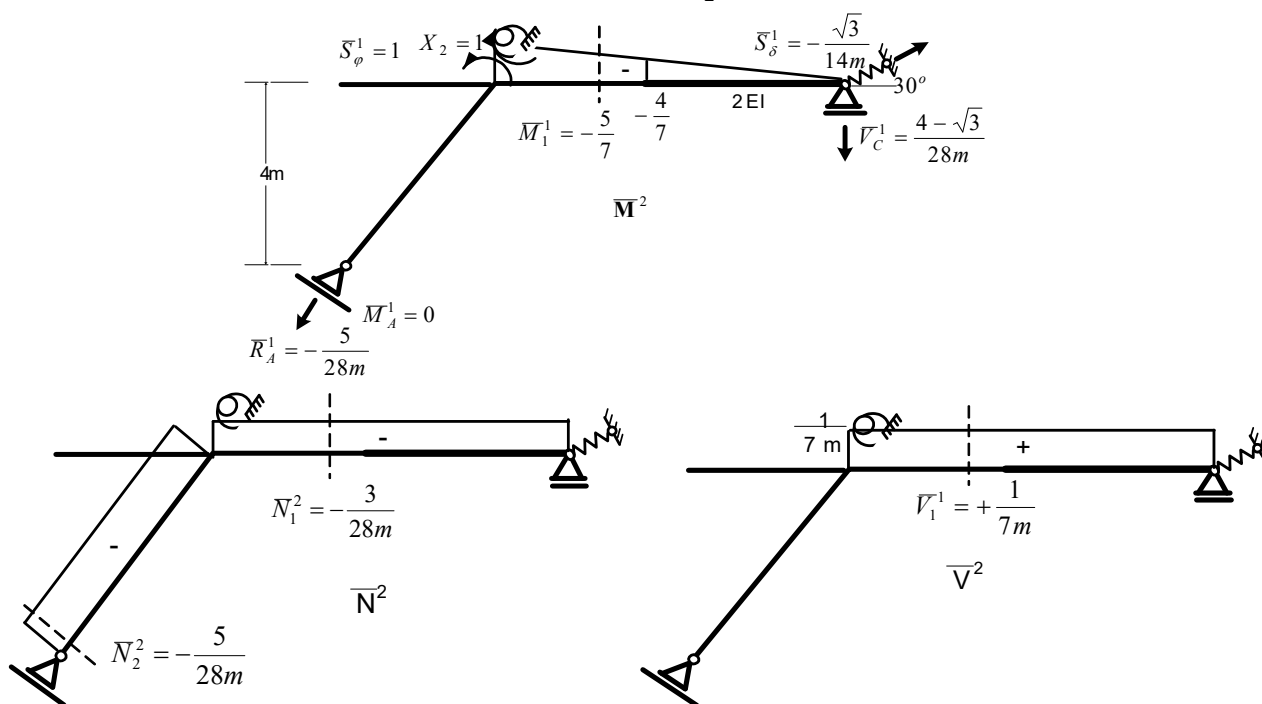


3) Rozwiązania układu podstawowego metody sił od jednostkowych sił hiperstatycznych

Wartości reakcji, wykresy sił przekrojowych oraz wartości tych sił i reakcji w miejscach błędów montażu i przemieszczeń podpór od obciążenia $X_1 = 1$ pokazano na rysunkach poniżej.



Wartości reakcji, wykresy sił przekrojowych oraz wartości tych sił i reakcji w miejscach błędów montażu i przemieszczeń podpór od obciążenia $X_2 = 1$ pokazano na rysunkach poniżej.



4) Sprawdzenie zgodności przemieszczeń

Przemieszczenia w miejscach usuniętych więzi obliczamy korzystając ze wzoru

$$\begin{aligned} \text{Wzór: } \Delta_{i\Delta} &= \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} \cdot dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \sum_m \bar{M}_m^i \cdot \Delta\varphi_m + \sum_n \bar{N}_n^i \cdot \Delta L_n + \sum_v \bar{V}_v^i \cdot \Delta h_v - \sum_r \bar{R}_r^i \cdot \Delta_r = \\ &= \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} \cdot dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \bar{M}_1^i \cdot \Delta\varphi_1 + \bar{N}_1^i \cdot \Delta L_1 + \bar{N}_2^i \cdot \Delta L_2 + \bar{V}_1^i \cdot \Delta h_1 - \bar{M}_A^i \cdot \varphi_A - \bar{V}_C^i \cdot v_C, \end{aligned}$$

Obliczenia:

$$\begin{aligned} \Delta_{1\Delta} &= 0 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 5m \cdot (-0.0053570) \frac{EI}{m} + \frac{3m}{6EI} \cdot \left(1 \cdot (-0.0065670) \frac{EI}{m} + 4 \cdot \frac{11}{14} \cdot (-0.005160) \frac{EI}{m} + \frac{4}{7} \cdot (-0.0037530) \frac{EI}{m} \right) + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 2} \cdot \left(\frac{4}{7} \cdot (-0.0037530) + 4 \cdot \frac{2}{7} \cdot (-0.0018765) + 0 \cdot 0 \right) + 0 + \frac{\sqrt{3} \cdot (-0.0007942)}{14 \cdot 4} + \\ &+ \frac{5}{7} \cdot 0.01745 + \frac{3}{28m} \cdot 0.01m + \frac{5}{28m} \cdot (-0.015m) - \frac{1}{7m} \cdot (-0.02m) - 0 \cdot (-0.02618) - \frac{\sqrt{3}-4}{28m} \cdot 0.01m = -0.02614. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że przemieszczenie to powinno być równe obrotowi podpory A

$$\Delta_{1rzecz} = \varphi_A = -0.02618,$$

błąd wynosi

$$\Delta_{1\Delta} - \varphi_A = -0.02614 - (-0.02618) = 0.00004 \approx 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2\Delta} &= 0 + 0 + \frac{3m}{6EI} \cdot \left(-1 \cdot (-0.006567) \frac{EI}{m} + 4 \cdot \left(-\frac{11}{14} \right) \cdot (-0.005160) \frac{EI}{m} - \frac{4}{7} \cdot (-0.003753) \frac{EI}{m} \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{(-0.003753) \cdot 4m}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) + 0 + \frac{-\sqrt{3} \cdot (-0.0007942)}{14 \cdot 4} - \frac{5}{7} \cdot 0.01745 + \\ &- \frac{3}{28m} \cdot 0.01m - \frac{5}{28m} \cdot (-0.015m) + \frac{1}{7m} \cdot (-0.02m) - 0 \cdot (-0.02618) - \frac{4-\sqrt{3}}{28m} \cdot 0.01m = 0.00004 \approx \Delta_{2rz} = 0. \end{aligned}$$

Otrzymane rozwiązanie jest, więc kinematycznie dopuszczalne.