RÓWNANIA KANONICZNE METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{ij}\cdot\varphi_j + \sum_{\beta=1}^{n_\delta} k_{i\beta}\cdot\delta_\beta + k_{io} = 0, \qquad \text{dla } i = 1, 2, ..., n_\varphi$$

$$\sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{\alpha j}\cdot\varphi_j + \sum_{\beta=1}^{n_\delta} k_{\alpha\beta}\cdot\delta_\beta + k_{\alpha o} = 0, \qquad \text{dla } \alpha = 1, 2, ..., n_\delta$$

gdzie

iloczyny $k_{ij}\cdot\varphi_j$ oraz $k_{i\beta}\cdot\delta_\beta$ są momentami w rotacyjnej więzi *"i"* wywołanymi odpowiednio:
– obrotem rotacyjnej więzi *"j"* o kąt φ_j,
– przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi *"β"* o δ_β,

k_{ij}, $k_{i\beta}$, k_{io} są momentami w rotacyjnej więzi *"i"* wywołanymi odpowiednio:
– obrotem rotacyjnej więzi *"j"* o kąt $\varphi_j = 1$,
– przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi *"β"* o $\delta_\beta = 1$,
– obciążeniem zewnętrznym,

iloczyny $k_{\alpha j}\cdot\varphi_j$ oraz $k_{\alpha\beta}\cdot\delta_\beta$ są siłami w translacyjnej więzi *"α"* wywołanymi odpowiednio:
– obrotem rotacyjnej więzi *"j"* o kąt $\cdot\varphi_j$,
– przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi *"β"* o δ_β,

$k_{\alpha j}$, $k_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha o}$ są siłami w translacyjnej więzi *"α"* wywołanymi odpowiednio:
– obrotem rotacyjnej więzi *"j"* o kąt $\varphi_j = 1$,
– przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi *"β"* o $\delta_\beta = 1$,
– obciążeniem zewnętrznym.

Z powyższych określeń wynika, że współczynniki *"k"* mogą być podzielone na 6 grup to jest:
– momenty w dodanych więziach rotacyjnych wywołane:
  – obrotami ($\mathbf{K}_{\varphi\varphi}=[k_{ij}]$),
  – przesunięciami ($\mathbf{K}_{\varphi\delta}=[k_{i\beta}]$),
  – obciążeniem zewnętrznym ($\mathbf{K}_{\varphi o}=[k_{io}]$)
– reakcje w dodanych więziach translacyjnych wywołane:
  – obrotami ($\mathbf{K}_{\delta\varphi}=\mathbf{K}^T_{\varphi\delta}=[k_{\alpha j}]$),
  – przesunięciami ($\mathbf{K}_{\delta\delta}=[k_{\alpha\beta}]$),
  – obciążeniem zewnętrznym ($\mathbf{K}_{\delta o}=[k_{\alpha o}]$).

W zapisie macierzowym układ równań może być przedstawiony w postaciach

$$\begin{bmatrix} k_{11}, & \cdots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \cdots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \cdots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \cdots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \cdots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \cdots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \cdots & k_{n_\delta n\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \cdots & k_{n_\delta n_\delta}, \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n_\varphi} \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_{n_\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} \\ \vdots \\ k_{n_\varphi o} \\ k_{I0} \\ \vdots \\ k_{n_\delta o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}, \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi}, \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi o} \\ \mathbf{K}_{\delta o} \end{bmatrix} = \mathbf{K}\cdot\vec{z} + \mathbf{K}_o = 0$$

WZORY OKREŚLAJĄCE WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ - teoria rzędu 1-go

Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane jednostkowymi obrotami dodanych więzi rotacyjnych

$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$; $k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_i^{\varphi} = \sum_j a_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} + k_i^{\varphi}$, $k_{ij} = M_{ij}^j = b_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij}$, dla $j \neq i,$

gdzie $M_{ij}^i = M_{ij}(\varphi_i = 1) = a_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij}$, $M_{ij}^j = M_{ij}(\varphi_j = 1) = b_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij}$,

j – numery węzłów połączonych prętami z węzłem i.

Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane jednostkowymi przesunięciami w miejscach i kierunkach dodanych więzi translacyjnych

$\mathbf{K}_{\varphi\delta}$; $k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^{\beta} = -\sum_j c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\beta}$, gdzie $M_{ij}^{\beta} = M_{ij}(\delta_\beta = 1) = -c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\beta}$,

$\psi_{ij}^{\beta} = \psi_{ij}(\delta_\beta = 1) = \Delta_{ij}^{\beta} / L_{ij}$ – kąt obrotu cięciwy pręta ij,

$\Delta_{ij}^{\beta} = \Delta_{ij}(\delta_\beta = 1)$ – wzajemne poprzeczne przesunięcie końców pręta ij.

Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane obciążeniem danym

$$\mathbf{K}_{\varphi o}; \qquad k_{io} = \begin{cases} k_{iF} = \sum_j M_{ij}^{oF} - M_i^o \\ k_{i\Delta} = \sum_j M_{ij}^{o\Delta} \\ k_{i\Delta} = \sum_j M_{ij}^{oT} \end{cases}$$

gdzie $M_{ij}^{oF}, M_{ij}^{o\Delta}, M_{ij}^{oT}$ – momenty na końcu i pręta ij wywołane obciążeniem,

M_i^o – moment obciążający węzeł i.

Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane jednostkowymi obrotami więzi rotacyjnych

$\mathbf{K}_{\delta\varphi}$; $k_{\alpha j} = -\sum_i (M_{ij}^j + M_{ji}^j) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} = \sum_i V_{ij}^j \cdot \Delta_{ij}^{\alpha} = -\sum_i c_{ji} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\alpha}$,

gdzie $V_{ij}^j = V_{ij}(\varphi_j = 1) = -c_{ji} \cdot EJ_{ij} / (L_{ij})^2$.

Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane przesunięciami w miejscach i kierunkach dodanych więzi translacyjnych

$$\mathbf{K}_{\delta\delta}; \qquad k_{\alpha\beta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{\beta} + M_{ji}^{\beta}) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{\beta} =$$

$$= \sum_{ij} V_{ij}^{\beta} \cdot \Delta_{ij}^{\alpha} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{\beta} = \sum_{ij} d_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\alpha} \cdot \psi_{ij}^{\beta} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{\beta},$$

gdzie ΔL_s^{α} – wydłużenie więzi sprężystej translacyjnej wywołane przemieszczeniem $\delta_\alpha = 1$.

Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane obciążeniem danym

$$\mathbf{K}_{\delta o}; \qquad k_{\alpha o} = \begin{cases} k_{\alpha F} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oF} + M_{ji}^{oF}) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} - \sum_f F_f \cdot \delta_f^{\alpha} \\ k_{\alpha\Delta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{o\Delta} + M_{ji}^{o\Delta}) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{o\Delta} \\ k_{\alpha \mathrm{T}} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oT} + M_{ji}^{oT}) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{oT} \end{cases}$$

gdzie δ_f^{α} – przemieszczenie w miejscu i kierunku siły F_f wywołane przemieszczeniem $\delta_\alpha = 1$,

$\Delta L_s^{o\Delta}, \Delta L_s^{oT}$ – wydłużenia więzi sprężystej translacyjnej wywołane przemieszczeniem Δ lub zmiana temperatury.

MOMENTY WYJŚCIOWE OD OBCIĄŻEŃ

Ze względu na sposób wyznaczania momentów brzegowych w układzie podstawowym obciążenia dzielimy na:

- wywołujące w układzie podstawowym przesunięcia węzłów,
- i nie wywołujące w układzie podstawowym przesunięć węzłów.

Do grupy obciążeń **wywołujących,** w układzie podstawowym, **przesunięcia węzłów** należą:

- przesunięcia węzłów Δ_r lub ich składowe u_r (po ich rozłożeniu na u_r i v_r),
- zmiany długości prętów ΔL,
- zmiany temperatury w części reprezentowanej przez zmiany w osiach prętów ΔTo wywołujące zmiany długości prętów $\Delta L^{oT} = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta To$.

Dla tych obciążeń należy wyznaczyć kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij}^{o} na podstawie warunków kinematycznych i na ich podstawie momenty brzegowe ze wzoru $M_{ij}^{o} = -c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{o}$, które od każdego z tych obciążeń mogą być różne od zera dla wszystkich prętów.

Do grupy obciążeń **nie wywołujących,** w układzie podstawowym, **przesunięć węzłów** należą:

- obciążenia siłami (M, F, q),
- zmiany temperatury w części reprezentowanej przez różnice $\Delta T = \Delta Tw - \Delta Tp$,
- błędy montażu typu $\Delta\varphi$ i Δh
- przemieszczenia podpór φ_r (obroty)
  i v_r.(składowe przesynięć prostopadłe do osi prętów przyległych)

Dla tych obciążeń wyznacza się momenty brzegowe na podstawie stosownych wzorów zależnych od typu obciążenia i typu pręta tylko dla prętów, na które działają te obciążenia.

Zatem

w przypadku obciążeń siłami (M, F, q) **(nie wywołują one przesunięć węzłów w ukł. podst.),** momenty brzegowe w układzie podstawowym M^{oF} wyznacza się na podstawie stosownych wzorów tylko dla prętów, na które działają te obciążenia.

w przypadku obciążeń zmianami temperatury $(\Delta Tw, \Delta Tp)$

różnice $\Delta T = \Delta Tw - \Delta Tp)$ **nie wywołują przesunięć węzłów** a momenty brzegowe w układzie podstawowym $M_{ij}^{oT}(\Delta T_{ij}) = -c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{oT}$ wyznacza się od nich na podstawie stosownych wzorów tylko dla prętów, dla których różnice te są różne od zera,

zmiany temperatury w osiach prętów ΔTo **wywołują przesunięcia węzłów** a momenty brzegowe w układzie podstawowym $M^{\Delta To}$ wyznacza się od nich z wykorzystaniem wzoru $M_{ij}^{oT}(\Delta To) = -c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{oT}$ dla wszystkich prętów, co wymaga uprzedniego wyznaczenia kątów obrotów cięciw prętów ψ_{ij}^{oT} od $\Delta L^{oT} = \alpha_T \cdot L \cdot \Delta To$,

w przypadku obciążeń przemieszczeniami podpór i błędami montażu

$(\varphi_r, \Delta r = (u_r, v_r), \Delta\varphi, \Delta h, \Delta L)$

obroty podpór φ_r, składowe prostopadłe przesunieć v_r i błędy montażu $\Delta\varphi, \Delta h$ **nie wywołują przesunięć węzłów** a momenty brzegowe w układzie podstawowym $M_{ij}^{o\Delta}(\varphi_r, v_r, \Delta\varphi, \Delta h)$ wyznacza się od nich na podstawie stosownych wzorów tylko dla prętów, dla których te wielkości są różne od zera,

przesunięcia podpór Δ_r, u_r i błądy montażu ΔL **wywołują przesunięcia węzłów** a momenty brzegowe w układzie podstawowym $M_{ij}^{o\Delta}(\Delta_r, u_r, \Delta L)$ wyznacza się od nich z wykorzystaniem wzoru $M_{ij}^{o\Delta}(\Delta_r, u_r, \Delta L) = -c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{o\Delta}$ dla wszystkich prętów, co wymaga uprzedniego wyznaczenia kątów obrotów cięciw prętów $\psi_{ij}^{o\Delta}$ od tych wpływów.

WYZNACZANIE PRZESUNIĘĆ WĘZŁÓW I KĄTÓW OBROTU CIĘCIW PRĘTÓW

Przesunięcia węzłów, wzajemne poprzeczne przesunięcia końców prętów i kąty obrotu cięciw prętów mogą być wyznaczane z wykorzystaniem związków kinematycznych dla prętów.

W przypadku gdy zmiany długości prętów są zerowe $\Delta L = 0$ mogą być w tym celu wykorzystane również płany przesunięć lub związki analityczne dla zamkniętych ciągów prętów.

ZWIĄZKI KINEMATYCZNE DLA PRĘTÓW

Przesunięcia węzłów wywołane przesunięciami podpór i zmianami długości prętów mogą być wyznaczane na podstawie związków kinematycznych w postaci:

$$u_p \cdot (-\cos\alpha_{pk}) + v_p \cdot (-\sin\alpha_{pk}) + u_k \cdot \cos\alpha_{pk} + v_k \cdot \sin\alpha_{pk} = \Delta L_{pk},$$

$$u_p \cdot \sin\alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos\alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin\alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos\alpha_{pk} = \Delta_{pk}$$

gdzie u_p, v_p, u_k, v_k - składowe przesunięć końców prętów, odpowiednio, w kierunku osi x i y,

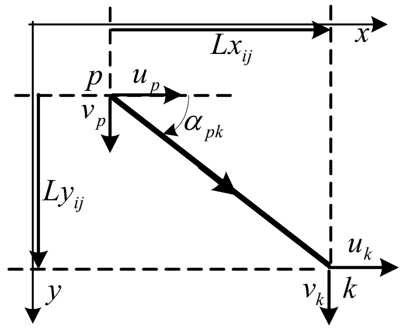
indeks p – numer węzła początku pręta,

indeks k – numer węzła końca pręta,

ΔL_{pk} - wydłużenie pręta pk,

Δ_{pk} - wzajemne poprzeczne przesunięcie końców pręta pk,

$\cos\alpha_{pk} = Lx_{pk} / L_{pk}$, $\sin\alpha_{pk} = Ly_{pk} / L_{pk}$.



Powyższe związki mogą też być przedstawione w postaci

$$-u_p + u_k = \Delta L_{pk} \cdot \cos\alpha_{pk} - \Delta_{pk} \cdot \sin\alpha_{pk},$$

$$-v_p + v_k = \Delta L_{pk} \cdot \sin\alpha_{pk} + \Delta_{pk} \cdot \cos\alpha_{pk}.$$

Związki kinematyczne wykorzystuje się w ten sposób, że buduje się układ równań, który tworzą:

– związki między przemieszczeniami końców prętów a zmianami ich długości dla każdego pręta (tyle równań ile prętów)

$$u_p \cdot (-\cos\alpha_{pk}) + v_p \cdot (-\sin\alpha_{pk}) + u_k \cdot \cos\alpha_{pk} + v_k \cdot \sin\alpha_{pk} = \Delta L_{pk},$$

– warunki uwzględniające, że kąty obrotu cięciw a więc i wzajemne poprzeczne przesunięcia ich końców dla prętów: wspornikowego i sztywno łyżwa są równe zero $\Delta_{pk} = 0$

(tyle równań ile prętów tego typu)

$$u_p \cdot \sin\alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos\alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin\alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos\alpha_{pk} = \Delta_{pk} = 0.$$

(wygodniej dla tego typu prętów wykorzystywać warunki:

$-u_p + u_k = \Delta L_{pk} \cdot \cos\alpha_{pk}$, $-v_p + v_k = \Delta L_{pk} \cdot \sin\alpha_{pk}$),

– oraz warunki brzegowe (dane przesunięcia – mogą oczywiście być zerowe).

Rozwiązanie tego układu równań określa przesunięcia wszystkich węzłów układu (dwie składowe dla każdego węzła).

Pozwala to na obliczenie

– wzajemnych poprzecznych przesunięć końców prętów

$$\Delta_{pk} = u_p \cdot \sin\alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos\alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin\alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos\alpha_{pk},$$

– kątów obrotu cięciw prętów $\psi_{pk} = \Delta_{pk} / L_{pk}$,

– momentów brzegowych dla prętów $M_{pk} = -c_{pk} \cdot EJ_{pk} / L_{pk} \cdot \psi_{pk}$

– oraz inne potrzebne przesunięcia jak zmiany długości więzi sprężystych i przemieszczenia punktów przyłożenia sił.

W szczególnym przypadku gdy $\Delta L_{pk} = 0$ postępowanie jest analogiczne jednak dla prętów: wspornikowego i sztywno łyżwa warunki, że $\Delta_{pk} = 0$ prowadzą do równości: $u_p = u_k$, $v_p = v_k$.