

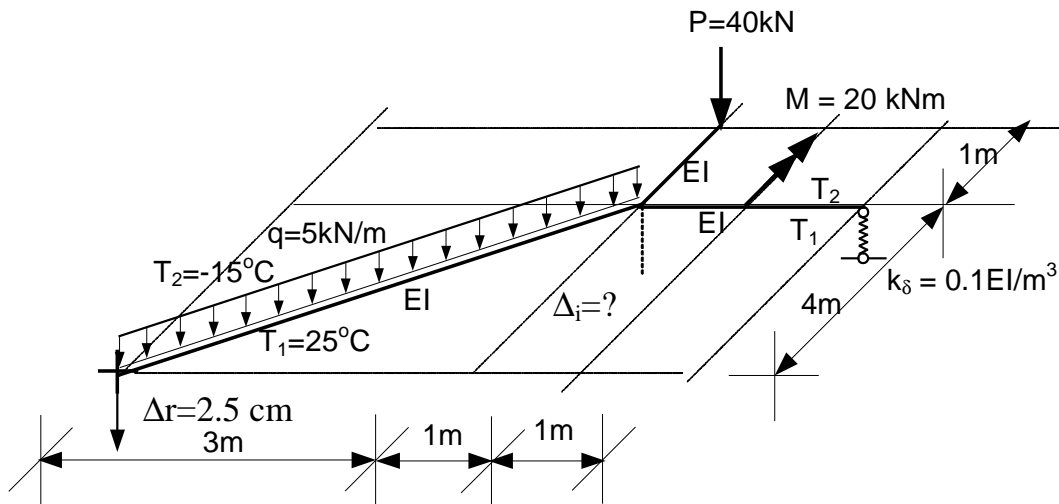
## UKŁAD ZAŁAMANY W PLANIE METODA SIŁ

### SPIS TREŚCI

<b>1. Dane i szukane.....</b>	<b>2</b>
<b>2. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu i obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności .....</b>	<b>2</b>
<b>3. Przyjęcie układu podstawowego metody sił.....</b>	<b>3</b>
<b>4. Ogólna postać układu równań metody sił.....</b>	<b>3</b>
<b>5. Rozwiązanie układu od obciążenia mechanicznego .....</b>	<b>3</b>
5.1 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ .....	4
5.2 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego .....	5
5.3 Obliczenie współczynników układu równań metody sił.....	6
5.4 Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie.....	7
5.5 Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów .....	7
5.6 Kontrola poprawności rozwiązania .....	8
<b>6. Projektowanie przekroju wg hipotezy wytrzymałościowej Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H) .....</b>	<b>10</b>
7. Rozwiązanie układu od temperatury .....	10
7.1 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ – jak w p.5.1 .....	11
7.2 Rozwiązanie układu podstawowego od temperatury .....	11
7.3 Obliczenie współczynników układu równań metody sił.....	11
7.4 Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie.....	11
7.5 Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów .....	12
7.6 Kontrola poprawności rozwiązania .....	13
<b>8. Rozwiązanie układu od przemieszczenia podpory.....</b>	<b>14</b>
8.1 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ – jak w p.5.1 .....	14
8.2 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia podpór.....	14
8.3 Obliczenie współczynników układu równań metody sił.....	14
8.4 Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie.....	14
8.5 Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów .....	15
8.6 Kontrola poprawności rozwiązania .....	16
<b>9. Obliczenie przemieszczenia <math>\Delta_i</math> .....</b>	<b>16</b>

## 1. Dane i szukane

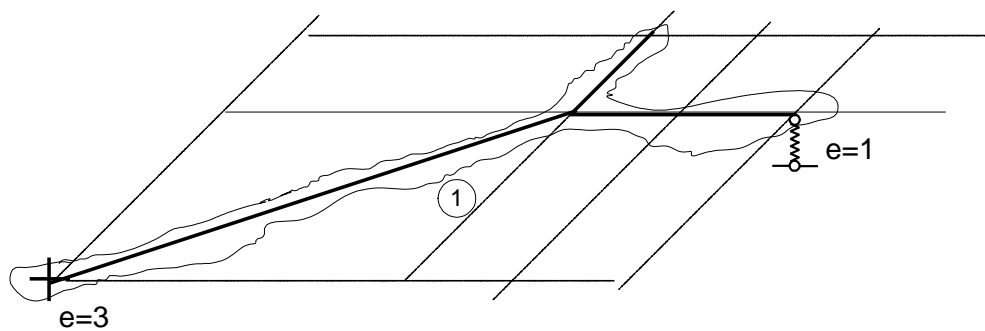
Układ załamany w planie o schemacie i obciążeniu jak na rysunku rozwiązać metodą sił i obliczyć wartość zaznaczonego przemieszczenia od każdego obciążenia oddzielnie. W obliczeniach przyjąć, że konstrukcja wykonana jest z rur stalowych, tzn.  $GI_s = 0.769EI_y$ , ze stali o wytrzymałości obliczeniowej równej 235 MPa, średni współczynnik obciążenia wynosi  $\gamma_f = 1.3$ . Przy projektowaniu przekroju zastosować hipotezę wytrzymałościową Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H).



Szukane:  $M_x^F, M_y^F, V^F, \Delta_i^F, M_x^T, M_y^T, V^T, \Delta_i^T, M_x^\Delta, M_y^\Delta, V^\Delta, \Delta_i^\Delta$ .

## 2. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu i obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności

Szkic tarczy – więzi



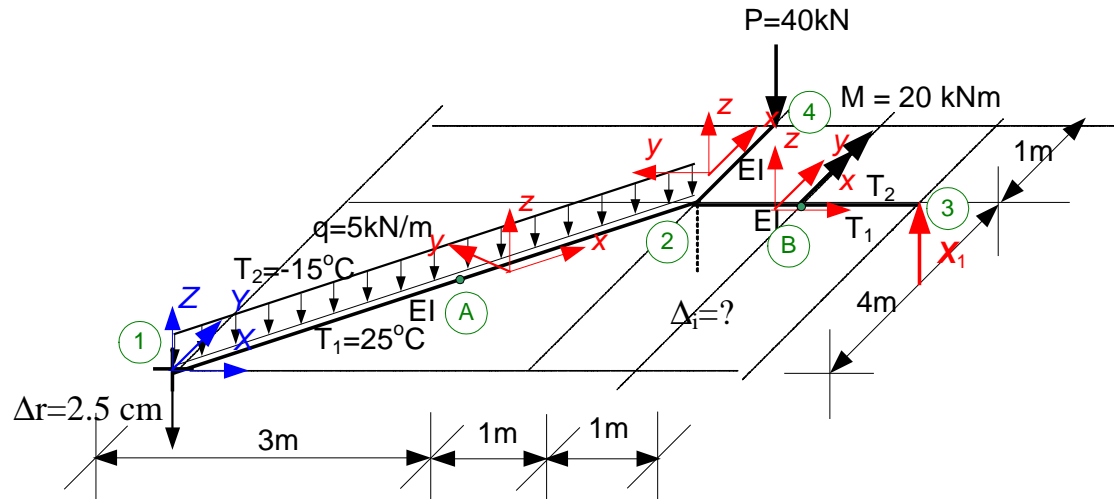
$$t = 1, e = 3 + 1 = 4,$$

$$\text{Stopień statycznej niewyznaczalności: } n_h = e - 3 * t = 4 - 3 = 1.$$

Układ składa się z jednej tarczy podpartej 4 więziami niezbieżnymi, wobec tego warunki geometrycznej niezmienności: ilościowy  $e \geq 3 * t$  i jakościowy - 3 niezbieżne więzi - są spełnione.

### 3. Przyjęcie układu podstawowego metody sił

**Układ podstawowy** – układ zadany, w którym przecięto lub odrzucono  $n_h$  więzi i zastąpiono je niewiadomymi siłami hiperstatycznymi. W układzie tym oznaczymy węzły, punkty charakterystyczne i przyjmijemy ogólny i lokalne układy współrzędnych.



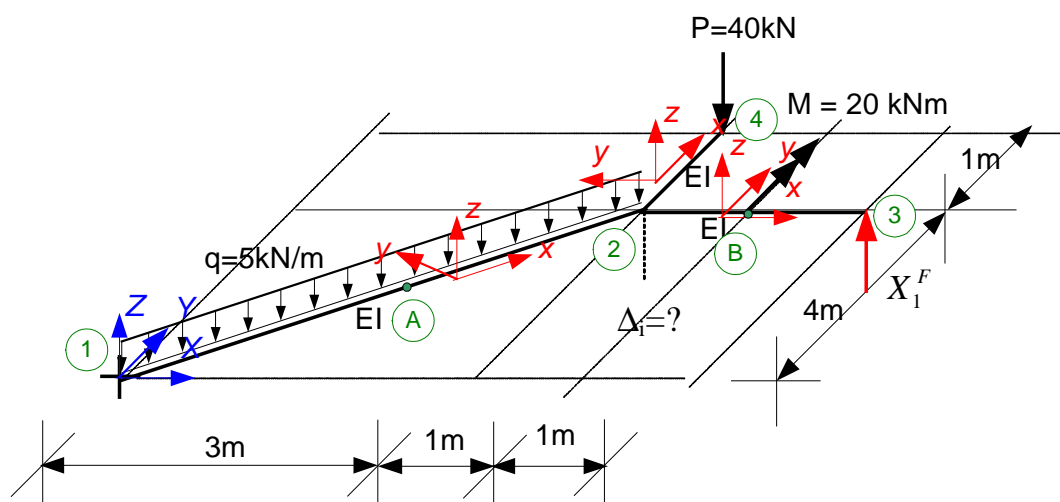
### 4. Ogólna postać układu równań metody sił

Od obciążenia mechanicznego: 
$$\delta_{11} X_1^F + \delta_{1F} = -\frac{X_1^F}{k_\delta}$$

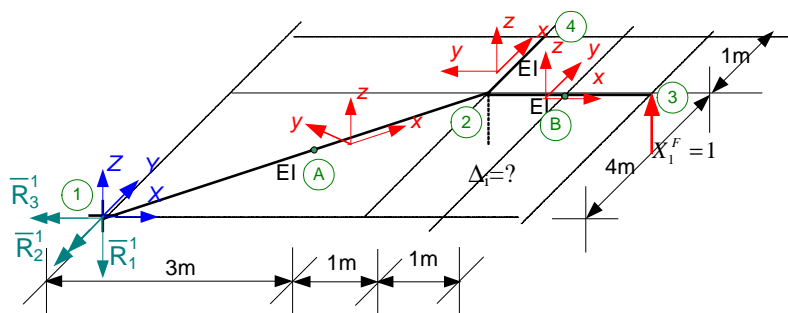
Od zmian temperatury: 
$$\delta_{11} X_1^T + \delta_{1T} = -\frac{X_1^T}{k_\delta}$$

Od osiadania podpory: 
$$\delta_{11} X_1^\Delta + \delta_{1\Delta} = -\frac{X_1^\Delta}{k_\delta}$$

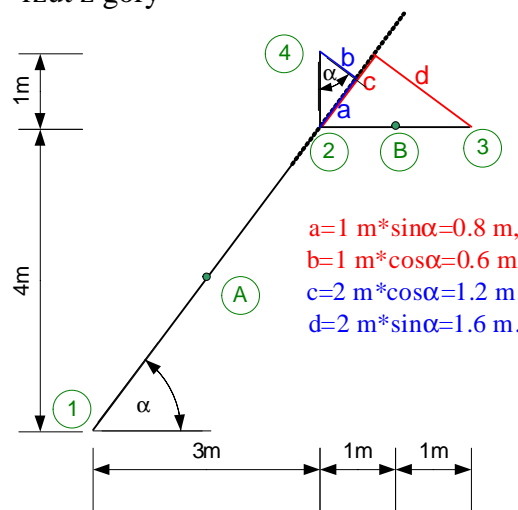
### 5. Rozwiązanie układu od obciążenia mechanicznego



### 5.1 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$



Obliczenia pomocnicze – rzut z góry

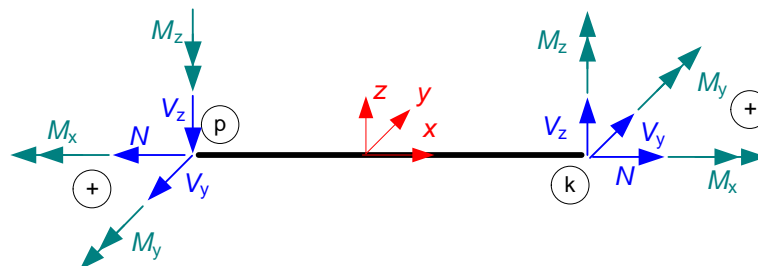


Układ jest wspornikiem, wobec czego można obliczyć siły przekrojowe bez konieczności obliczania reakcji podporowych.

**Uwagi:**

- Momenty zginające  $M_y$  odkładamy po stronie włókien rozciąganych w płaszczyźnie xz, kreskujemy pionowo, znak „+” jest po dodatniej stronie osi „z” układu lokalnego;
- Momenty skręcające odkładamy w płaszczyźnie xz lub xy.

W układach przestrzennych, załamanych w planie i rusztach belkowych dodatnie znaki sił przekrojowych przyjmujemy jak na rysunku poniżej:



**Obliczenie momentów skręcających**

$$\bar{M}_{x,32}^1 = \bar{M}_{x,23}^1 = \bar{M}_{x,42}^1 = \bar{M}_{x,24}^1 = 0;$$

$$\bar{M}_{x,21}^1 = \bar{M}_{x,12}^1 = -1 * d = -1.6 \text{ m.}$$

**Obliczenie momentów zginających**

$$\bar{M}_{y,32}^1 = \bar{M}_{y,42}^1 = \bar{M}_{y,24}^1 = 0,$$

$$\bar{M}_{y,23}^1 = -1 * 2 \text{ m} = -2 \text{ m},$$

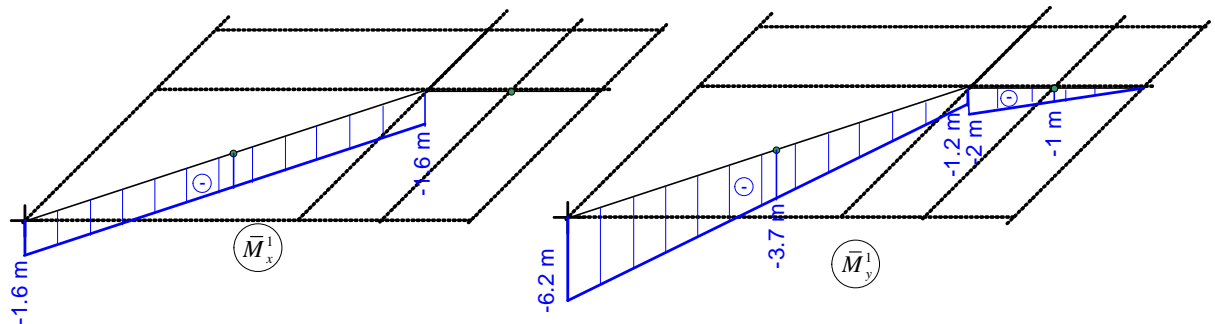
$$\bar{M}_{y,31}^1 = -1 * c = -1.2 \text{ m},$$

$$\bar{M}_{y,13}^1 = -1 * (c + 5 \text{ m}) = -6.2 \text{ m},$$

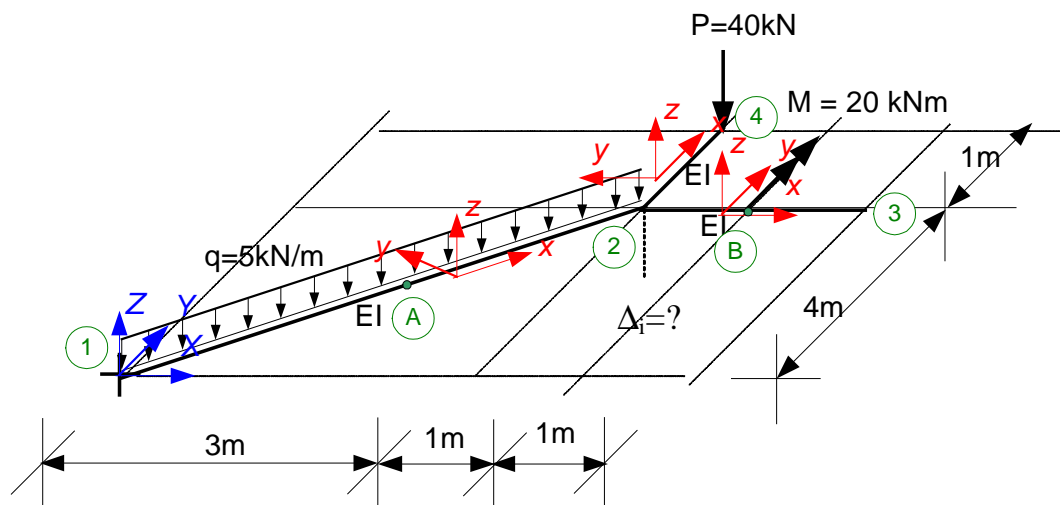
$$\bar{M}_{y,A}^1 = (-1.2 \text{ m} - 6.2 \text{ m}) / 2 = -3.7 \text{ m},$$

$$\bar{M}_{y,B}^1 = (-2 \text{ m}) / 2 = -1 \text{ m}.$$

**Wykresy sił przekrojowych**



**5.2 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego**



### Obliczenie momentów skręcających

$$\bar{M}_{x,32}^F = \bar{M}_{x,23}^F = \bar{M}_{x,42}^F = \bar{M}_{x,24}^F = 0;$$

$$\bar{M}_{x,21}^F = \bar{M}_{x,12}^F = -F * b + M * \sin \alpha = -40 \text{ kN} * 0.6 \text{ m} + 20 \text{ kNm} * 0.8 = -8 \text{ kNm}.$$

### Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_{y,3B}^F = \bar{M}_{y,B3}^F = 0,$$

$$\bar{M}_{y,B2}^F = \bar{M}_{y,2B}^{1F} = M = 20 \text{ kNm},$$

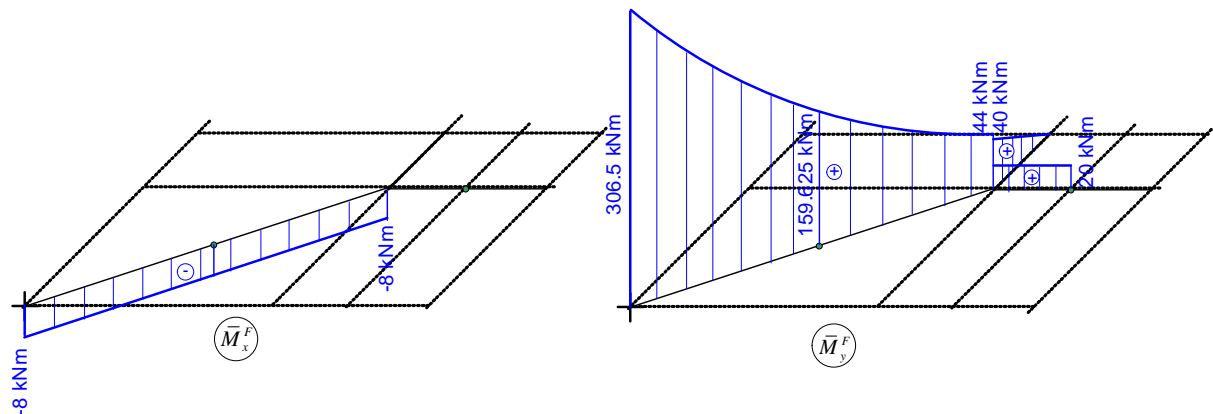
$$\bar{M}_{y,42}^F = 0,$$

$$\bar{M}_{y,24}^F = F * 1 \text{ m} = 40 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{y,2A}^F = F * a + M * \cos \alpha = 40 \text{ kN} * 0.8 \text{ m} + 20 \text{ kNm} * 0.6 = 44 \text{ kNm},$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{y,A1}^F &= F * (a + 2.5 \text{ m}) + M * \cos \alpha + q * 2.5 \text{ m} * 1.25 \text{ m} = \\ &= 40 \text{ kN} * 3.3 \text{ m} + 20 \text{ kNm} * 0.6 + 5 \text{ kN/m} * 2.5 \text{ m} * 1.25 \text{ m} = 159.625 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{y,1A}^F &= F * (a + 5 \text{ m}) + M * \cos \alpha + q * 5 \text{ m} * 2.5 \text{ m} = \\ &= 40 \text{ kN} * 5.8 \text{ m} + 20 \text{ kNm} * 0.6 + 5 \text{ kN/m} * 5 \text{ m} * 2.5 \text{ m} = 306.5 \text{ kNm}. \end{aligned}$$



### 5.3 Obliczenie współczynników układu równań metody sił

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_s} dx + \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \bar{S}_n^1}{k_n} = \\ &= \frac{-1.6 \text{ m} * 5 \text{ m} * (-1.6 \text{ m})}{0.769 EI_y} + \frac{5 \text{ m}}{6 EI_y} [-6.2 \text{ m} * (-6.2 \text{ m}) + 4 * (-3.7 \text{ m}) * (-3.7 \text{ m}) + (-1.2 \text{ m}) * (-1.2 \text{ m})] + \\ &+ \left[ 0.5 * (-2 \text{ m}) * 2 \text{ m} * \frac{2}{3} * (-2 \text{ m}) \right] / EI_y = [16.645 + 78.867 + 2.667] \frac{\text{m}^3}{EI_y} = 98.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^F}{GI_s} dx + \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \bar{S}_n^F}{k_n} = \\ &= \frac{-1.6 \text{ m} * 5 \text{ m} * (-8 \text{ m})}{0.769 EI_y} + \frac{5 \text{ m}}{6 EI_y} [-6.2 \text{ m} * 306.5 \text{ kNm} + 4 * (-3.7 \text{ m}) * 159.625 \text{ kNm} + (-1.2 \text{ m}) * 44 \text{ kNm}] + \\ &+ [20 \text{ kNm} * 1 \text{ m} * 0.5 * (-2 \text{ m} - 1 \text{ m})] / EI_y = [82.225 - 3596.292 - 30] \frac{\text{kNm}^3}{EI_y} = -3543,067 \frac{\text{kNm}^3}{EI_y}. \end{aligned}$$

## 5.4 Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$98.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y} X_1^F - 3543.067 \frac{\text{kNm}^3}{EI_y} = \frac{-X_1^F}{0.1 \frac{EI_y}{\text{m}^3}},$$

$$108.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y} X_1^F - 3543.067 \frac{\text{kNm}^3}{EI_y} = 0,$$

$$X_1^F = \frac{3543.067}{108.179} \text{kN} = 32.752 \text{ kN}.$$

## 5.5 Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Rzeczywiste momenty skręcające i zginające obliczymy z superpozycji

$$M_x^F = \bar{M}_x^1 * X_1^F + \bar{M}_x^F,$$

$$M_y^F = \bar{M}_y^1 * X_1^F + \bar{M}_y^F.$$

### Momenty skręcające

$$M_{x,32}^F = M_{x,23}^F = M_{x,42}^F = M_{x,24}^F = 0;$$

$$M_{x,21}^F = M_{x,12}^F = -1.6 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} - 8 \text{ kNm} = -60.403 \text{ kNm}.$$

### Momenty zginające

$$M_{y,3B}^F = 0,$$

$$M_{y,B3}^F = -1 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} = -32.752 \text{ kNm},$$

$$M_{y,B2}^F = -1 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} + 20 \text{ kNm} = -12.752 \text{ kNm},$$

$$M_{y,2B}^F = -2 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} + 20 \text{ kNm} = -45.504 \text{ kNm},$$

$$M_{y,42}^F = 0,$$

$$M_{y,24}^F = F * 1 \text{ m} = 40 \text{ kNm},$$

$$M_{y,2A}^F = -1.2 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} + 44 \text{ kNm} = 4.698 \text{ kNm},$$

$$M_{y,A1}^F = -3.7 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} + 159.625 \text{ kNm} = 38.443 \text{ kNm},$$

$$M_{y,1A}^F = -6.2 \text{ m} * 32.752 \text{ kN} + 306.5 \text{ kNm} = 103.438 \text{ kNm}.$$

### Obliczenie sił tnących

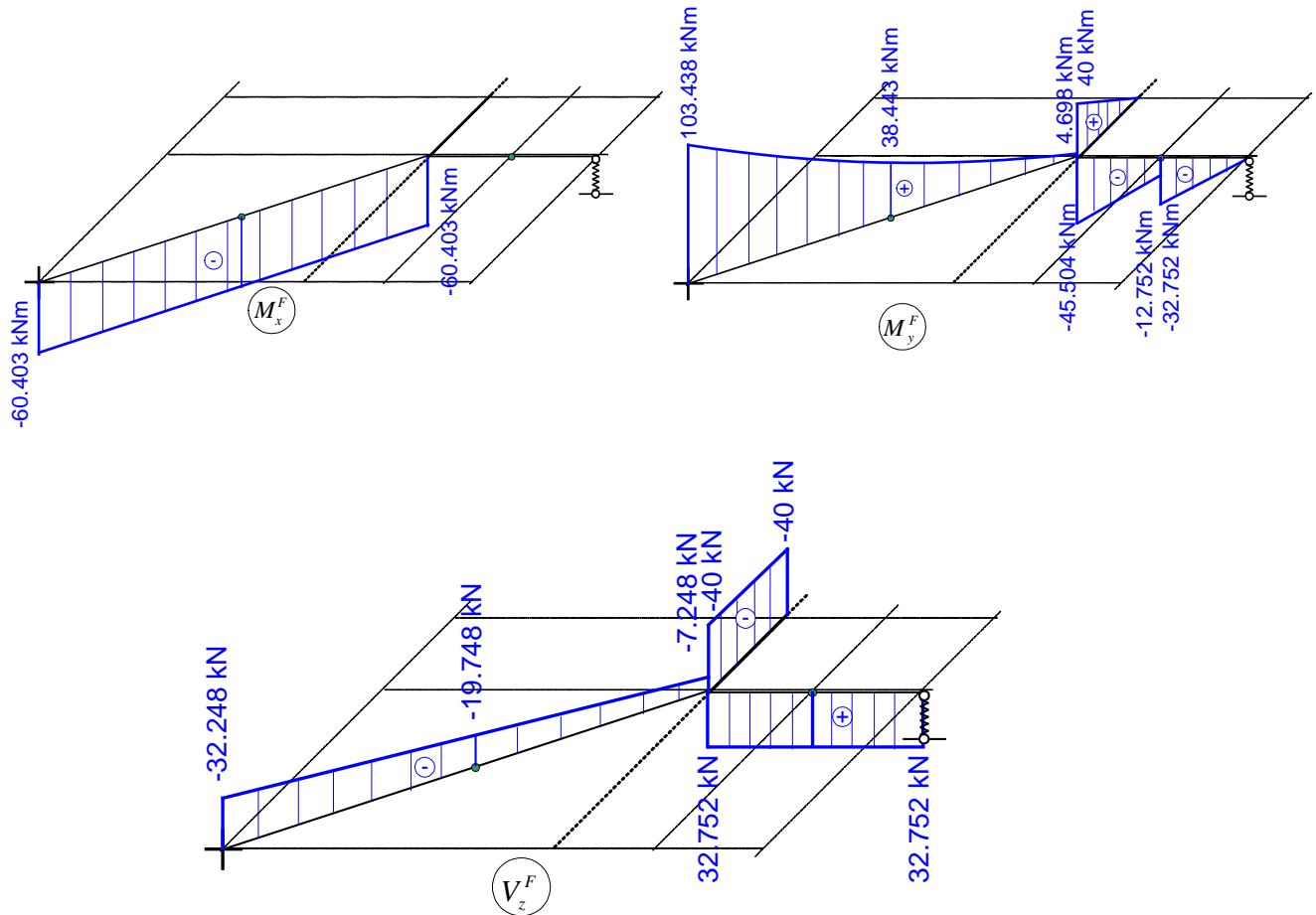
$$V_{z,32}^F = V_{z,23}^F = X_1^F = 32.752 \text{ kN},$$

$$V_{z,42}^F = V_{z,24}^F = -F = -40 \text{ kNm},$$

$$V_{z,2A}^F = X_1^F - F = 32.752 \text{ kN} - 40 \text{ kN} = -7.248 \text{ kNm},$$

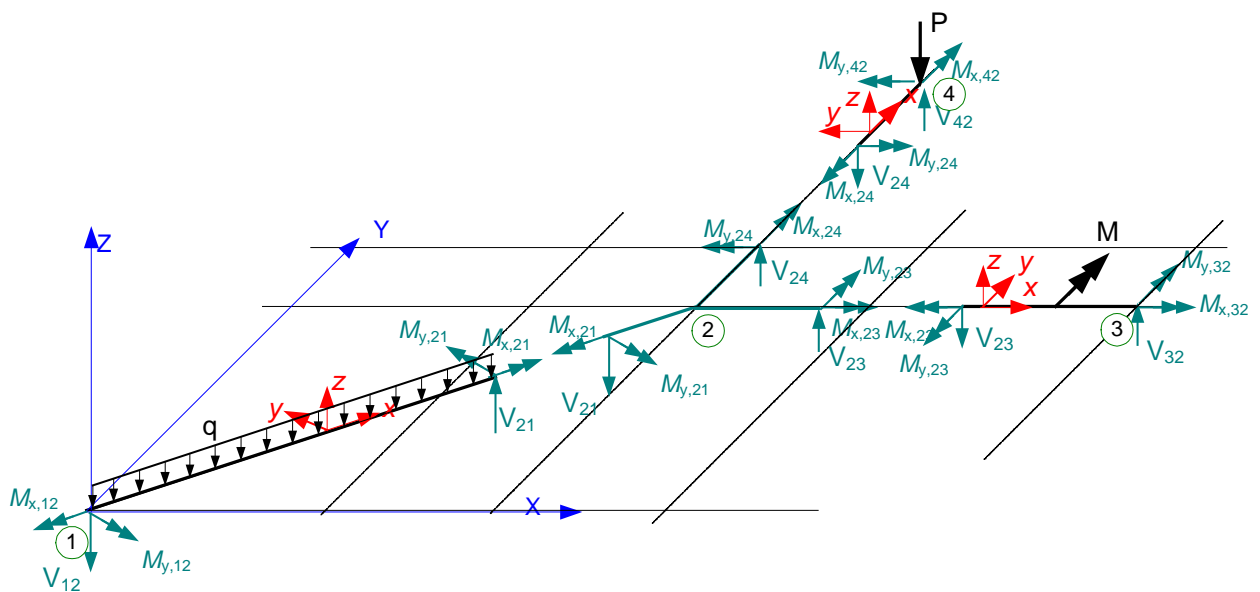
$$V_{z,A1}^F = X_1^F - F - q * 2.5 \text{ m} = 32.752 \text{ kN} - 40 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} * 2.5 \text{ m} = -19.748 \text{ kN},$$

$$V_{z,1A}^F = X_1^F - F - q * 5 \text{ m} = 32.752 \text{ kN} - 40 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} * 5 \text{ m} = -32.248 \text{ kN}.$$



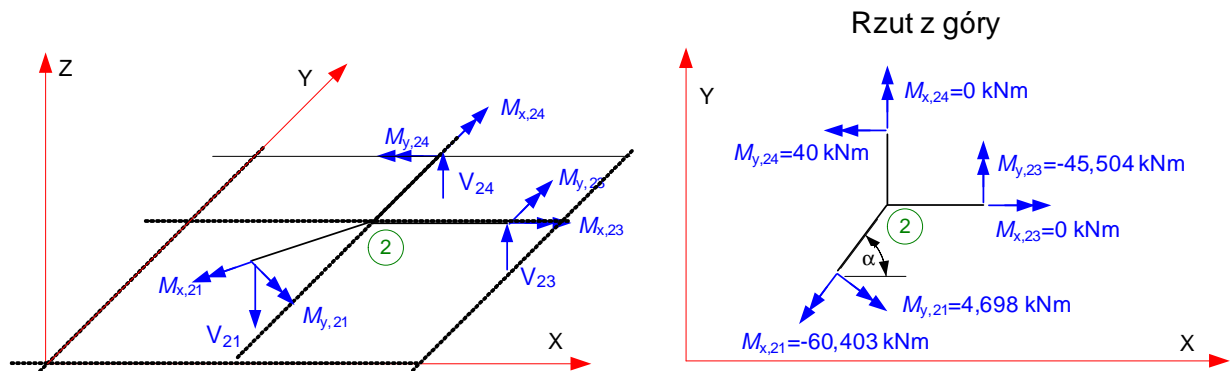
## 5.6 Kontrola poprawności rozwiązania

**Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania** (równowaga prętów i węzłów, wektory sił przekrojowych wskazują dodatnie wartości zgodnie z przyjętymi lokalnymi układami współrzędnych)





Należy sprawdzić równowagę wszystkich elementów i węzłów. Tutaj przykładowo sprawdzamy równowagę węzła nr 2



$$\begin{aligned}\sum M_x &= -M_{y,24}^F + M_{x,23}^F - M_{x,21}^F \cdot \cos \alpha + M_{y,21}^F \cdot \sin \alpha = \\ &= [-40 + 0 - (-60.403) \cdot 0.6 + 4.689 \cdot 0.8] \text{kNm} = -0.0046 \text{ kNm}, \\ \sum M_y &= M_{x,24}^F + M_{y,23}^F - M_{x,21}^F \cdot \sin \alpha - M_{y,21}^F \cdot \cos \alpha = \\ &= [0 + (-45.504) - (-60.403) \cdot 0.8 - 4.689 \cdot 0.6] \text{kNm} = 0.0036 \text{ kNm}, \\ \sum F_z &= -V_{z,21}^F + V_{z,23}^F + V_{z,24}^F = -(-7.248 \text{ kN}) + 32.752 \text{ kN} - 40 \text{ kN} = 0 \text{ kN}\end{aligned}$$

Równowaga pręta 2-3

$$\begin{aligned}\sum M_x &= -M_{x,23}^F + M_{x,32}^F = 0, \\ \sum M_y &= -M_{y,23}^F + M_{y,32}^F + M - V_{32}^F \cdot 2\text{m} = -(-45.504 \text{ kNm}) + 0 + 20 \text{ kNm} - 32.754 \text{ kN} \cdot 2\text{m} = 0, \\ \sum F_z &= -V_{23}^F + V_{32}^F = -32.752 \text{ kN} + 32.752 \text{ kN} = 0.\end{aligned}$$

**Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania (sprawdzenie przemieszczeń)**

Sprawdzenie wartości pionowego przemieszczenia węzła nr 3, która powinna wynosić

$$\begin{aligned}\Delta_3^F &= -\frac{X_1^F}{k_\delta} = -\frac{32.752 \text{ kN}}{0.1 EI_y / \text{m}^3} = -327.52 \frac{\text{kNm}^3}{EI_y} \\ \Delta_3^F &= \int \frac{M_x^F \bar{M}_x^1}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^F \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{S_n^F \bar{S}_n^1}{k_n} = (-1.6\text{m} \cdot 5\text{m} \cdot (-60.403 \text{ kNm})) / 0.769 EI_y + \\ &+ \frac{5\text{m}}{6EI_y} [-6.2\text{m} \cdot 103.438 \text{ kNm} + 4 \cdot (-3.7\text{m}) \cdot 38.443 \text{ kNm} + (-1.2\text{m}) \cdot 4.698 \text{ kNm}] + \\ &+ \frac{1\text{m}}{6EI_y} [-2\text{m} \cdot (-45.504 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-1.5\text{m}) \cdot (-45.504 \text{ kNm} - 12.752 \text{ kNm}) \cdot 0.5 - 1\text{m} \cdot (-12.752 \text{ kNm})] + \\ &+ 0.5 \cdot (-1\text{m}) \cdot 1\text{m} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-32.752 \text{ kNm}) = (628.379 - 1013.258 + 46.421 + 10.917) \frac{\text{kNm}^3}{EI_y} = -327.54 \frac{\text{kNm}^3}{EI_y}\end{aligned}$$

## 6. Projektowanie przekroju wg hipotezy wytrzymałościowej Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H)

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_n^2 + 3\tau^2} \leq f_d,$$

$$\sigma_n = \frac{\max M_y^F * \gamma_f}{W_y}, \quad \tau = \frac{M_x^F * \gamma_f}{W_s}, \quad (M_x^F \text{ odpowiadający } \max M_y^F)$$

$$\text{dla rur } W_s = 2W, \quad \text{stąd } W \geq \frac{\gamma_f * \sqrt{(\max M_y^F)^2 + 0.75(M_x^F)^2}}{f_d}$$

$$W \geq \frac{\gamma_f * \sqrt{(\max M_y^F)^2 + 0.75(M_x^F)^2}}{f_d} =$$

$$= \frac{1.3 * \sqrt{(103.438 \text{ kNm})^2 + 0.75(-60.403 \text{ kNm})^2}}{235000 \text{ kN/m}^2} = 0.00064122 \text{ m}^3 = 641.22 \text{ cm}^3$$

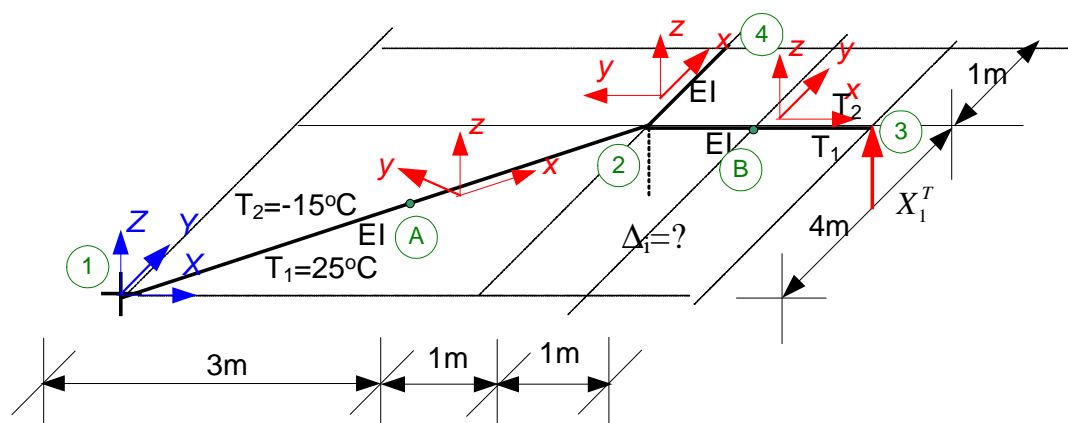
**Uwaga:** Należy również sprawdzić naprężenia zredukowane dla maksymalnego momentu skręcającego i odpowiadającego mu momentu zginającego – w rozpatrywanym zadaniu są to te same wartości momentów.

Uwzględniając, że układ obciążony jest jeszcze obciążeniem niemechanicznym przyjęto rurę o większym wskaźniku wytrzymałości na zginanie niż obliczony powyżej, a mianowicie przyjęto rurę RO 323.9 x 11 mm,  $W = 818,14 \text{ cm}^3$ ,  $I = 13249.72 \text{ cm}^4$ .

$$EI = 205000000 \text{ kN/m}^2 * 13249.72 * 10^{-8} \text{ m}^4 = 27161.93 \text{ kNm}^2,$$

$$k_s = 0.1 EI = 2716.193 \text{ kN/m}.$$

## 7. Rozwiązanie układu od temperatury



Do obliczeń przyjmujemy:  $\alpha = 0.000012 / ^\circ\text{C}$ ,  $h = 0.3239 \text{ m}$ .

## 7.1 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ – jak w p.5.1

## 7.2 Rozwiązanie układu podstawowego od temperatury

W układach statycznie wyznaczalnych obciążenia niemechaniczne nie powodują powstawania sił przekrojowych.

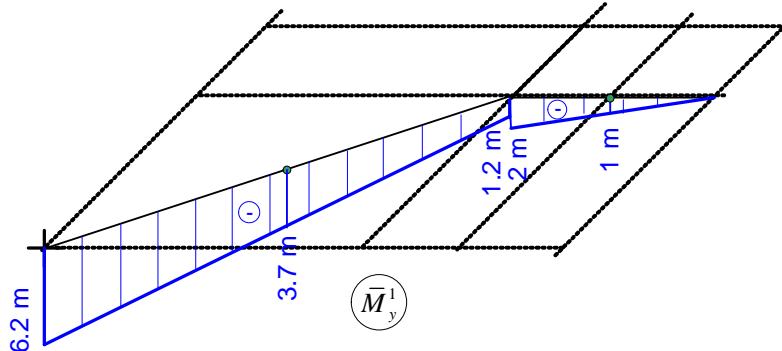
## 7.3 Obliczenie współczynników układu równań metody sił

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_s} dx + \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \bar{S}_n^1}{k_n} = 98.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y}, \text{ jak obliczono w punkcie 5.1}$$

Wyraz wolny obliczymy ze wzoru

$$\delta_{1T} = \int \bar{M}_y^1 \alpha \frac{T_w - T_p}{h} dx = \alpha \frac{T_w - T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1}$$

Dane:  $T_{w,12} = T_{w,23} = -15^\circ \text{C}$ ,  $T_{p,12} = T_{p,23} = +25^\circ \text{C}$ .



$$\Omega_{\bar{M}_y^1,12} = 0.5 * (-6.2 - 1.2) * 5 \text{ m} = -18.5 \text{ m}^2,$$

$$\Omega_{\bar{M}_y^1,23} = 0.5 * (-2 \text{ m}) * 2 \text{ m} = -2 \text{ m}^2,$$

$$\delta_{1T} = \alpha \frac{T_w - T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1} = 0.000012 / ^\circ \text{C} \frac{-15^\circ \text{C} - 25^\circ \text{C}}{0.3239 \text{ m}} * (-18.5 \text{ m}^2 - 2 \text{ m}^2) = +0.03038 \text{ m}.$$

## 7.4 Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$98.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y} X_1^T + 0.03038 \text{ m} = \frac{-X_1^T}{0.1 \frac{EI_y}{\text{m}^3}},$$

$$108.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y} X_1^T + 0.03038 \text{ m} = 0,$$

$$X_1^T = \frac{-0.03038 \text{ m}}{108.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y}} = -0.000280829 \frac{EI_y}{\text{m}^2} = -7.628 \text{ kN}.$$

## 7.5 Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Rzeczywiste momenty skręcające i zginające obliczymy z superpozycji

$$M_x^T = \bar{M}_x^1 * X_1^T,$$

$$M_y^T = \bar{M}_y^1 * X_1^T.$$

### Momenty skręcające

$$M_{x,32}^T = M_{x,23}^T = M_{x,42}^T = M_{x,24}^T = 0;$$

$$M_{x,21}^T = M_{x,12}^T = -1.6 \text{ m} * (-7.638 \text{ kN}) = 12.205 \text{ kNm}.$$

### Momenty zginające

$$M_{y,3B}^T = 0,$$

$$M_{y,B3}^T = M_{y,B2}^T = -1 \text{ m} * (-7.628 \text{ kN}) = 7.628 \text{ kNm},$$

$$M_{y,2B}^T = -2 \text{ m} * (-7.628 \text{ kN}) = 15.256 \text{ kNm},$$

$$M_{y,42}^T = 0,$$

$$M_{y,24}^T = 0 \text{ kNm},$$

$$M_{y,2A}^T = -1.2 \text{ m} * (-7.628 \text{ kN}) = 9.154 \text{ kNm},$$

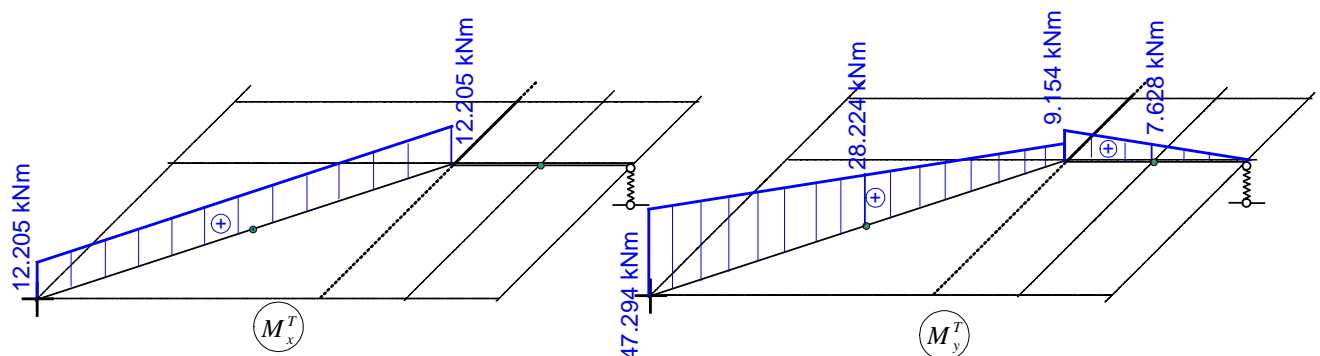
$$M_{y,A1}^T = -3.7 \text{ m} * (-7.628 \text{ kN}) = 28.224 \text{ kNm},$$

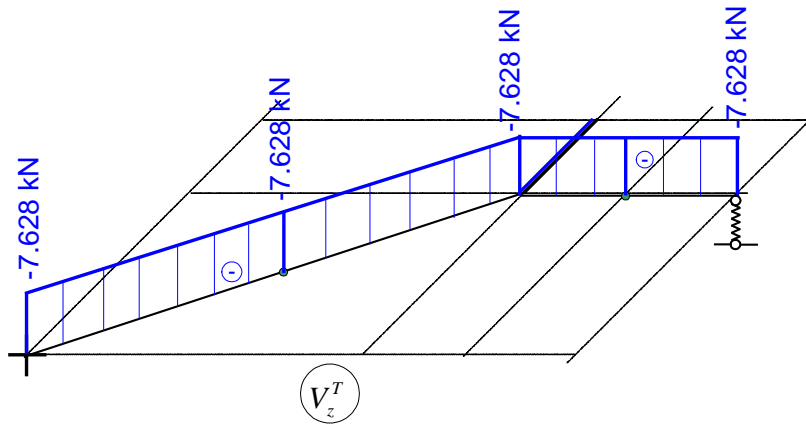
$$M_{y,1A}^T = -6.2 \text{ m} * (-7.628 \text{ kN}) = 47.294 \text{ kNm}.$$

### Obliczenie sił tnących

$$V_{42}^T = V_{24}^T = 0,$$

$$V_{32}^T = V_{23}^T = V_{21}^T = V_{12}^T = X_1^T = -7.628 \text{ kN}.$$





## 7.6 Kontrola poprawności rozwiązania

**Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania** (równowaga prętów i węzłów)

Równowaga węzła nr 2

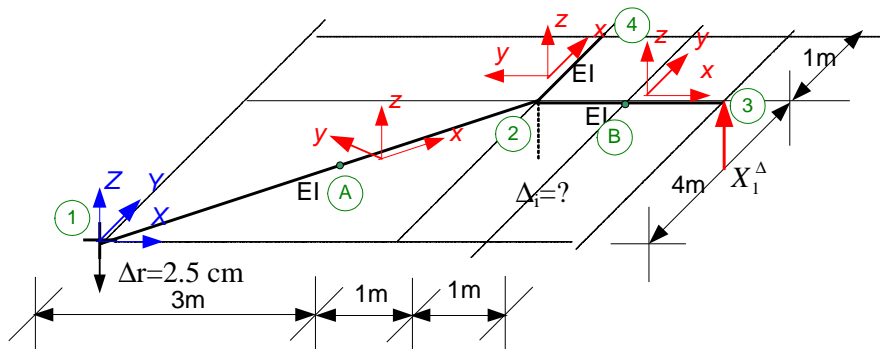
$$\begin{aligned}\sum M_X &= -M_{y,24}^T + M_{x,23}^T - M_{x,21}^T \cdot \cos \alpha + M_{y,21}^T \cdot \sin \alpha = \\ &= [0 + 0 - (12.205) \cdot 0.6 + 9.154 \cdot 0.8] \text{ kNm} = 0.0002 \text{ kNm}, \\ \sum M_Y &= M_{x,24}^T + M_{y,23}^T - M_{x,21}^T \cdot \sin \alpha - M_{y,21}^T \cdot \cos \alpha = \\ &= [0 + 15.256 - 12.205 \cdot 0.8 - 9.154 \cdot 0.6] \text{ kNm} = -0.0004 \text{ kNm}, \\ \sum F_Z &= -V_{z,21}^T + V_{z,23}^T + V_{z,24}^T = -(-7.628 \text{ kN}) - 7.628 \text{ kN} + 0 \text{ kN} = 0 \text{ kN}\end{aligned}$$

**Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania** (sprawdzenie przemieszczeń)

Sprawdzenie wartości pionowego przemieszczenia węzła nr 3, która powinna wynosić

$$\begin{aligned}\Delta_3^T &= \frac{-X_1^T}{k_\delta} = \frac{-7.628 \text{ kN}}{0.1 \text{ EI}_y / \text{m}^3} = \frac{7.628 \text{ kN}}{2716.193 \text{ kNm}^2 / \text{m}^3} = 0.002808 \text{ m} \\ \Delta_3^T &= \int \frac{M_x^T \bar{M}_x^1}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^T \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{S_n^T \bar{S}_n^1}{k_n} + \alpha \frac{T_w - T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1} = \\ &= (-1.6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot (12.205 \text{ kNm})) / 0.769 \text{ EI}_y + \\ &+ \frac{5 \text{ m}}{6 \text{ EI}_y} [-6.2 \text{ m} \cdot 47.294 \text{ kNm} + 4 \cdot (-3.7 \text{ m}) \cdot 28.224 \text{ kNm} + (-1.2 \text{ m}) \cdot 9.154 \text{ kNm}] + \\ &+ 0.5 \cdot (-2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15.256 \text{ kNm} + 0.000012 / ^\circ \text{C} \cdot \frac{-15^\circ \text{C} - 25^\circ \text{C}}{0.3239 \text{ m}} \cdot (-18.5 + 2) \text{ m}^2 = \\ &= (-126.968 - 601.602 - 20.341) \frac{\text{kNm}^3}{27161.93 \text{ kNm}^2} + 0.03038 \text{ m} = \\ &= (-0.027572 + 0.03038) \text{ m} = 0.002808 \text{ m}\end{aligned}$$

## 8. Rozwiązanie układu od przemieszczenia podpory



### 8.1 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ – jak w p.5.1

### 8.2 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia podpór

W układach statycznie wyznaczalnych obciążenia niemechaniczne nie powodują powstawania sił przekrojowych.

### 8.3 Obliczenie współczynników układu równań metody sił

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_s} dx + \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \bar{S}_n^1}{k_n} = 98.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y}, \text{ jak obliczono w punkcie 5.1,}$$

Z rys. w punkcie 5.1 wynika, że

$$\sum F_z = -\bar{R}_1^1 + 1 = 0 \quad \text{stad} \quad \bar{R}_1^1 = 1.$$

Wyraz wolny obliczymy ze wzoru

$$\delta_{1\Delta} = -\sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n = -\bar{R}_1^1 \Delta r = -1 * 0.025 \text{ m} = -0.025 \text{ m}$$

### 8.4 Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$98.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y} X_1^\Delta - 0.025 \text{ m} = \frac{-X_1^\Delta}{0.1 \frac{EI_y}{\text{m}^3}},$$

$$108.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y} X_1^\Delta - 0.025 \text{ m} = 0,$$

$$X_1^\Delta = \frac{0.025 \text{ m}}{108.179 \frac{\text{m}^3}{EI_y}} = 0.0002311 \frac{EI_y}{\text{m}^2} = 6.277 \text{ kN}$$

## 8.5 Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Rzeczywiste momenty skręcające i zginające obliczymy z superpozycji

$$M_x^\Delta = \bar{M}_x^1 * X_1^\Delta,$$

$$M_y^\Delta = \bar{M}_y^1 * X_1^\Delta.$$

### Momenty skręcające

$$M_{x,32}^\Delta = M_{x,23}^\Delta = M_{x,42}^\Delta = M_{x,24}^\Delta = 0,$$

$$M_{x,21}^\Delta = M_{x,12}^\Delta = -1.6 \text{ m} * 6.277 \text{ kN} = -10.0432 \text{ kNm}.$$

### Momenty zginające

$$M_{y,3B}^\Delta = 0,$$

$$M_{y,B3}^\Delta = -1 \text{ m} * 6.277 \text{ kN} = -6.277 \text{ kNm},$$

$$M_{y,2B}^\Delta = -2 \text{ m} * 6.277 \text{ kN} = -12.554 \text{ kNm},$$

$$M_{y,42}^\Delta = M_{y,24}^\Delta = 0,$$

$$M_{y,2A}^\Delta = -1.2 \text{ m} * 6.277 \text{ kN} = -7.532 \text{ kNm},$$

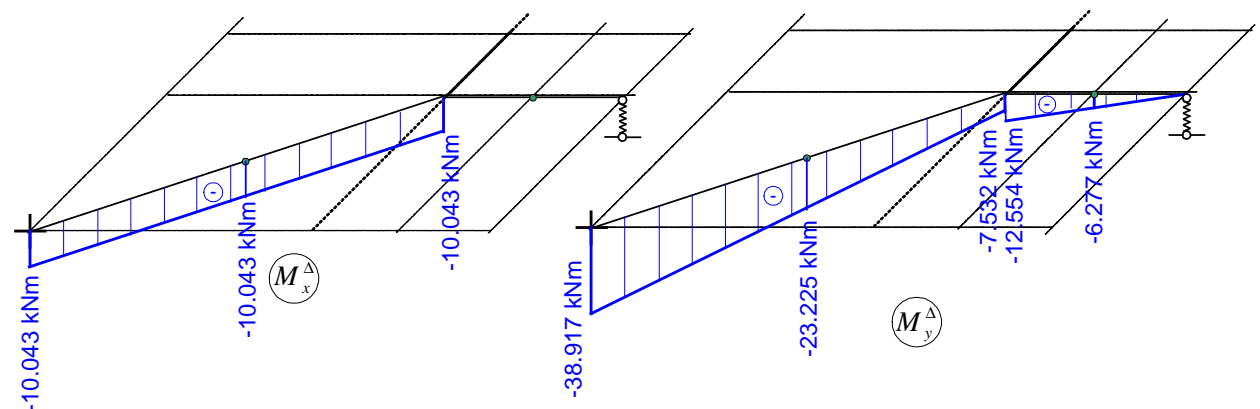
$$M_{y,A1}^\Delta = -3.7 \text{ m} * 6.277 \text{ kN} = -23.225 \text{ kNm},$$

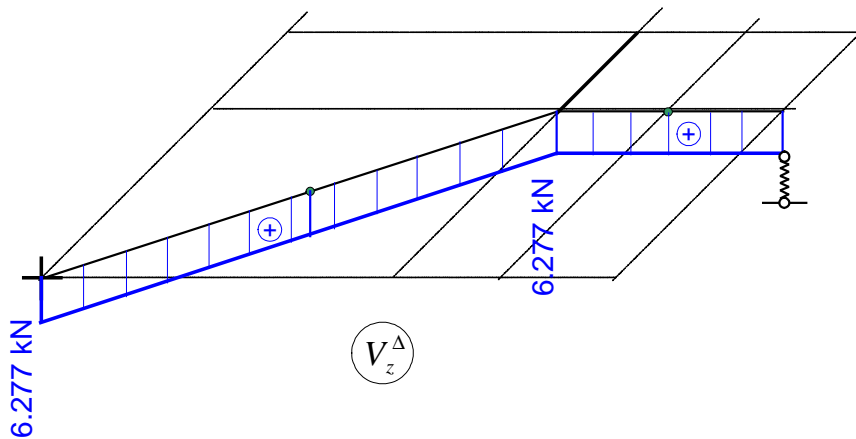
$$M_{y,1A}^\Delta = -6.2 \text{ m} * 6.277 \text{ kN} = -38.917 \text{ kNm}.$$

### Obliczenie sił tnących

$$V_{42}^\Delta = V_{24}^\Delta = 0,$$

$$V_{32}^\Delta = V_{23}^\Delta = V_{21}^\Delta = V_{12}^\Delta = X_1^\Delta = 6.277 \text{ kN}.$$





## 8.6 Kontrola poprawności rozwiązania

**Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania** (równowaga prętów i węzłów)

Równowaga węzła nr 2

$$\begin{aligned}\sum M_x &= -M_{y,24}^{\Delta} + M_{x,23}^{\Delta} - M_{x,21}^{\Delta} * \cos \alpha + M_{y,21}^{\Delta} * \sin \alpha = \\ &= [0 + 0 - (-10.043)*0.6 + (-7.532)*0.8] \text{ kNm} = 0.0002 \text{ kNm},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_y &= M_{x,24}^{\Delta} + M_{y,23}^{\Delta} - M_{x,21}^{\Delta} * \sin \alpha - M_{y,21}^{\Delta} * \cos \alpha = \\ &= [0 + (-12.554) - (-10.043)*0.8 - (-7.532)*0.6] \text{ kNm} = -0.0004 \text{ kNm},\end{aligned}$$

$$\sum F_z = -V_{z,21}^{\Delta} + V_{z,23}^{\Delta} + V_{z,24}^{\Delta} = -(6.227 \text{ kN}) + 6.227 \text{ kN} + 0 \text{ kN} = 0 \text{ kN}$$

**Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania** (sprawdzenie przemieszczeń)

Sprawdzenie wartości pionowego przemieszczenia węzła nr 3, która powinna wynosić

$$\Delta_3^{\Delta} = -\frac{X_1^{\Delta}}{k_{\delta}} = -\frac{6.277 \text{ kN}}{0.1 \text{ EI}_y / \text{m}^3} = -\frac{6.277 \text{ kN}}{2716.193 \text{ kNm}^2 / \text{m}^3} = -0.002311 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3^{\Delta} &= \int \frac{M_x^{\Delta} \bar{M}_x^1}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^{\Delta} \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta} \bar{S}_n^1}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n = (-1.6 \text{ m} * 5 \text{ m} * (-10.043 \text{ kNm})) / 0.769 \text{ EI}_y + \\ &+ \frac{5 \text{ m}}{6 \text{ EI}_y} [-6.2 \text{ m} * (-38.917) \text{ kNm} + 4 * (-3.7 \text{ m}) * (-23.225) \text{ kNm} + (-1.2 \text{ m}) * (-7.532) \text{ kNm}] + \\ &+ 0.5 * (-2 \text{ m}) * 2 \text{ m} * \frac{2}{3} (-12.554 \text{ kNm}) - (1 * 0.025 \text{ m}) = (104.479 + 495.045 + 16.739) \frac{\text{kNm}^3}{\text{EI}_y} - 0.025 \text{ m} = \\ &= -0.002312 \text{ m}\end{aligned}$$

## 9. Obliczenie przemieszczenia $\Delta_i$

Wykorzystamy twierdzenie redukcyjne, które pozwala przyjąć do rozwiązania układu od obciążenia jednostkowego przyłożonego w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia dowolny układ podstawowy. Zastosujemy następujące wzory



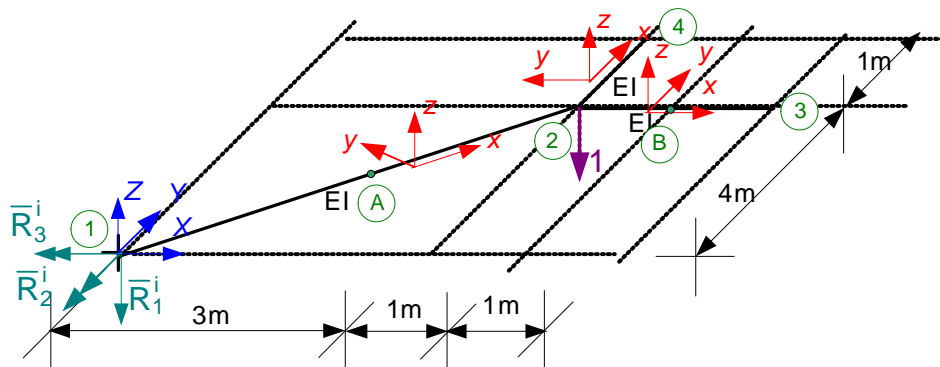
$$\Delta_i^F = \int \frac{M_x^F \bar{M}_x^i}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^F \bar{M}_y^i}{EI_y} dx + \sum_n \frac{S_n^F \bar{S}_n^i}{k_n},$$

$$\Delta_i^T = \int \frac{M_x^T \bar{M}_x^i}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^T \bar{M}_y^i}{EI_y} dx + \sum_n \frac{S_n^T \bar{S}_n^i}{k_n} + \alpha \frac{T_w - T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i},$$

$$\Delta_i^\Delta = \int \frac{M_x^\Delta \bar{M}_x^i}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^\Delta \bar{M}_y^i}{EI_y} dx + \sum_n \frac{S_n^\Delta \bar{S}_n^i}{k_n} - \sum_r \bar{R}_r^i \Delta r_r.$$

Wykorzystamy ten sam układ podstawowy, co poprzednio. W tym przypadku ze wzorów odpada człon dotyczący więzi sprężystych, ponieważ w układzie podstawowym odrzuciliśmy więź sprężystą.

### 9.1 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia



#### Obliczenie momentów skręcających

$$\bar{M}_{x,32}^i = \bar{M}_{x,23}^i = \bar{M}_{x,42}^i = \bar{M}_{x,24}^i = 0;$$

$$\bar{M}_{x,21}^i = \bar{M}_{x,12}^i = 0.$$

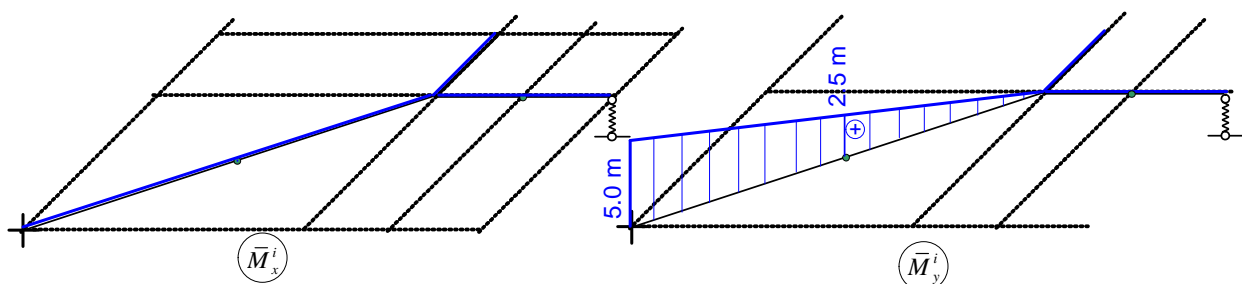
#### Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_{y,32}^i = \bar{M}_{y,23}^i = \bar{M}_{y,31}^i = \bar{M}_{y,42}^i = \bar{M}_{y,24}^i = 0,$$

$$\bar{M}_{y,13}^i = 1 * 5 \text{ m} = 5.0 \text{ m},$$

$$\bar{M}_{y,A}^i = 5.0 \text{ m} / 2 = 2.5 \text{ m}.$$

#### Wykresy sił przekrojowych



## 9.2 Obliczenie przemieszczenia od obciążenia mechanicznego

$$\begin{aligned}\Delta_i^F &= \int \frac{M_x^F \bar{M}_x^i}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^F \bar{M}_y^i}{EI_y} dx = \\ &= 0 + \frac{5 \text{ m}}{6EI_y} (103.438 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ m} + 4 \cdot 38.443 \text{ kNm} \cdot 2.5 \text{ m} + 4.698 \text{ kNm} \cdot 0 \text{ m}) = \frac{751.35 \text{ m}^3}{EI_y} = 0.0277 \text{ m}\end{aligned}$$

## 9.3 Obliczenie przemieszczenia od temperatury

$$\begin{aligned}\Delta_i^T &= \int \frac{M_x^T \bar{M}_x^i}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^T \bar{M}_y^i}{EI_y} dx + \alpha \frac{T_w - T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} = 0 + \frac{5 \text{ m}}{6EI_y} (47.294 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ m} + 4 \cdot 28.224 \text{ kNm} \cdot 2.5 \text{ m} + 9.154 \text{ kNm} \cdot 0 \text{ m}) + \\ &+ \frac{-15^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{0.3239 \text{ m}} \cdot 0.000012 / ^\circ\text{C} \cdot 0.5 \cdot 5 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = \frac{432.258 \text{ m}^3}{EI_y} - 0.0185 \text{ m} = 0.0159 \text{ m} - 0.0185 \text{ m} = -0.0026 \text{ m}.\end{aligned}$$

## 9.4 Obliczenie przemieszczenia od osiadania podpory

Z rys. w punkcie 9.1 wynika, że  $\sum F_z = -\bar{R}_1^i - 1 = 0$  stąd  $\bar{R}_1^i = -1$ .

$$\begin{aligned}\Delta_i^\Delta &= \int \frac{M_x^\Delta \bar{M}_x^i}{GI_s} dx + \int \frac{M_y^\Delta \bar{M}_y^i}{EI_y} dx - \sum_r \bar{R}_r^i \Delta r_r = \\ &= 0 + \frac{5 \text{ m}}{6EI_y} (-38.917 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ m} + 4 \cdot (-23.225 \text{ kNm}) \cdot 2.5 \text{ m} - 7.532 \text{ kNm} \cdot 0 \text{ m}) - (-1 \cdot 0.025 \text{ m}) = \\ &= \frac{-355.696 \text{ m}^3}{EI_y} + 0.025 \text{ m} = -0.0131 \text{ m} + 0.025 \text{ m} = 0.0119 \text{ m}.\end{aligned}$$