# RAMA PŁASKA PRZESUWNA
# METODA PRZEMIESZCZEŃ

## SPIS TREŚCI

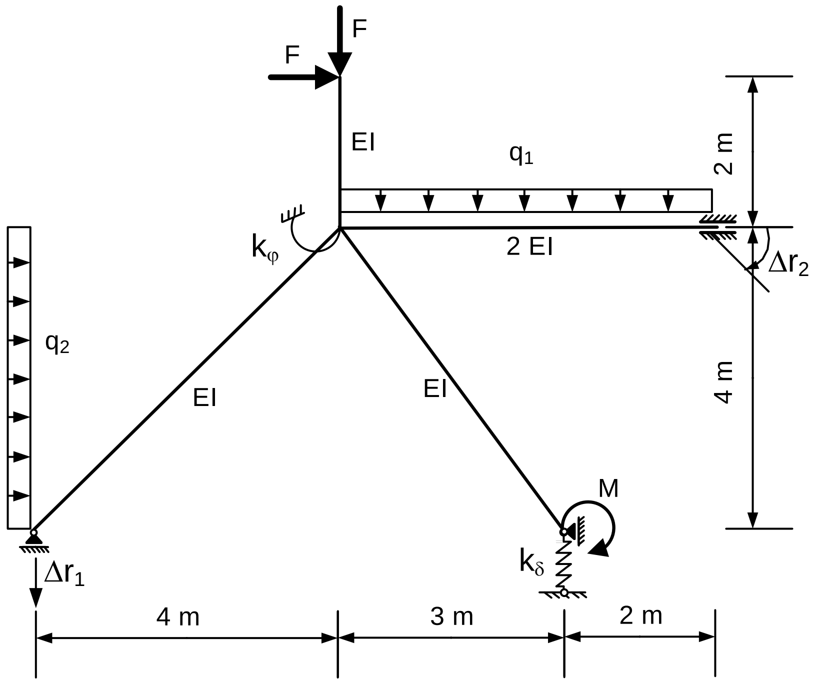
1. Dane i szukane ........................................................................ 2
2. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu........................... 3
3. Obliczenie stopnia geometrycznej (kinematycznej) niewyznaczalności układu........................................................................................ 3
3.1 Podział układu na elementy o znanych wzorach transformacyjnych i obliczenie liczby niezależnych obrotów $n_\varphi$ ..........................................................4
3.2 Zbudowanie modelu przegubowego układu i obliczenie liczby niezależnych przesunięć $n_\delta$....4
4. Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń .................... 5
5. Ogólna postać układu równań metody przemieszczeń ........................ 5
6. Rozwiązanie ramy od obciążenia mechanicznego .............................. 6
6.1 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego .......................................6
6.2 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_I = 1$ – plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych ...........................................................................8
6.3 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_{II} = 1$ – plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych ...............................................................9
6.4 Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń ......................................9
6.5 Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń i jego rozwiązanie.....................11
6.6 Obliczenie wartości momentów brzegowych ze wzorów transformacyjnych .........................12
6.7 Obliczenie sił przekrojowych i sporządzenie wykresów ......................................................12
6.8 Kontrola poprawności rozwiązania.......................................................................................15
7. Wstępne projektowanie przekroju ze względu na zginanie ............... 19
8. Rozwiązanie ramy od przemieszczenia podpór ................................ 20
8.1 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia podpór..........................................20
8.2 Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń ....................................22
8.3 Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń i jego rozwiązanie.....................22
8.4 Obliczenie wartości momentów brzegowych ze wzorów transformacyjnych .........................23
8.5 Obliczenie sił przekrojowych i sporządzenie wykresów ......................................................23
8.6 Kontrola poprawności rozwiązania.......................................................................................26

# 1. Dane i szukane

Dla ramy geometrycznie niewyznaczalnej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły przekrojowe i sporządzić ich wykresy).
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie, w obliczeniach przyjąć - średni współczynnik obciążenia $\gamma_f = 1.5$, wytrzymałość obliczeniową stali $f_d = 215$ MPa, $E$=210 GPa.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..

Rozwiązanie musi również zawierać wykresy momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia mechanicznego i niemechanicznego oraz szczegółową postać układów równań metody przemieszczeń.

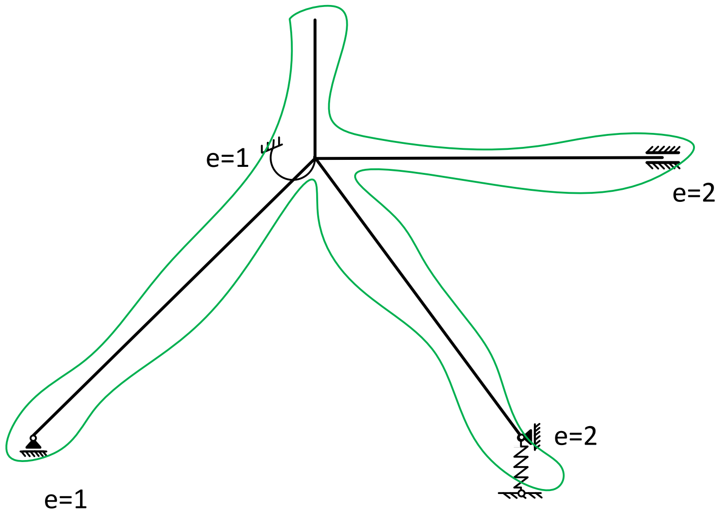



*Dane* do obliczeń: F = 20 kN, M = 12 kN·m, $q_1$ = 4 kN/m, $q_2$ = 5 kN/m, $k_\varphi$ = EI/m, $k_\delta$ = 2EI/m$^3$, $\Delta r_1$ = 2 cm, $\Delta r_2$ = 0.01 rad.

*Szukane*: $M_x^F$, $M_y^F$, $V^F$, $M_x^\Delta$, $M_y^\Delta$, $V^\Delta$.

## 2. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu

Szkic tarcze –więzi




t = 1,  e = 2 + 2+1+1 = 6

*Warunek ilościowy* geometrycznej niezmienności: $e \overset{?}{>=} 3 \cdot t$ .

6 > 3, warunek spełniony.

*Warunek jakościowy:*

Układ składa się z jednej tarczy podpartej 6 więziami wśród których można wyróżnić 3 niezbieżne, wobec tego warunki geometrycznej niezmienności: ilościowy $e \geq 3 \cdot t$ i jakościowy - 3 niezbieżne więzi - są spełnione.

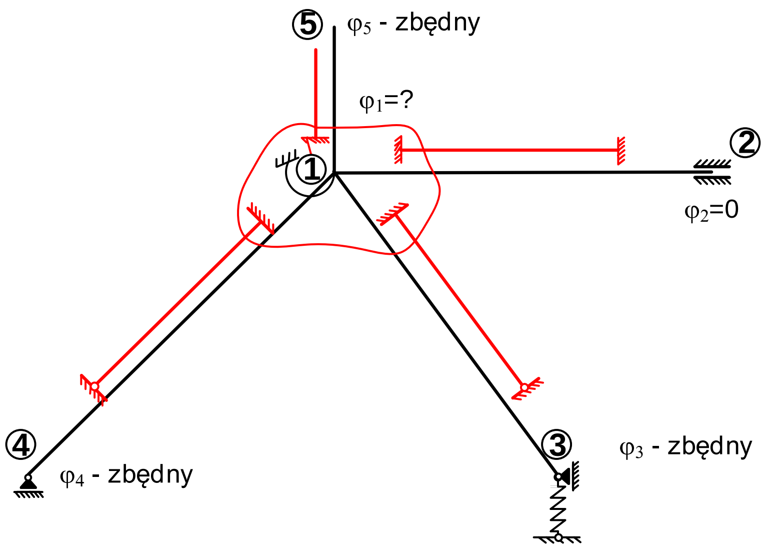
Stopień statycznej niewyznaczalności układu

$$n_h = e - 3 \cdot t = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

## 3. Obliczenie stopnia geometrycznej (kinematycznej) niewyznaczalności układu

$$\boxed{n_g = n_\varphi + n_\delta}$$

## 3.1 Podział układu na elementy o znanych wzorach transformacyjnych i obliczenie liczby niezależnych obrotów $n_\varphi$

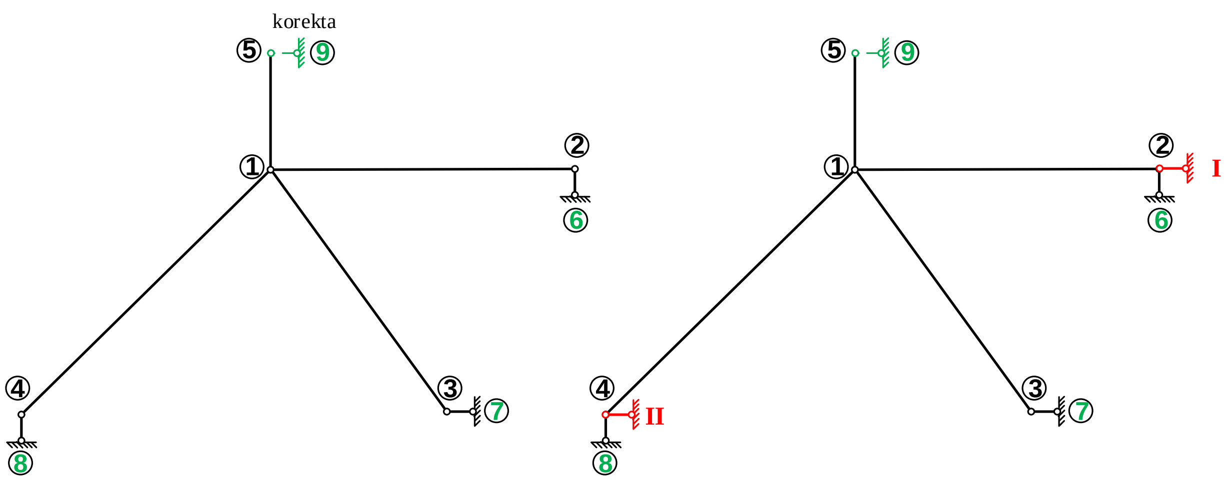



$n_\varphi = 1$

## 3.2 Zbudowanie modelu przegubowego układu i obliczenie liczby niezależnych przesunięć $n_\delta$

- odrzucamy więzi sprężyste, wszystkie węzły zamieniamy na przegubowe, dodajemy więź, jeśli stosujemy element typu wspornik i/lub sztywno – sztywno-suwny (przesuw prostopadły do osi pręta)

**Model przegubowy** | **Model przegubowy po dołożeniu 2 więzi**



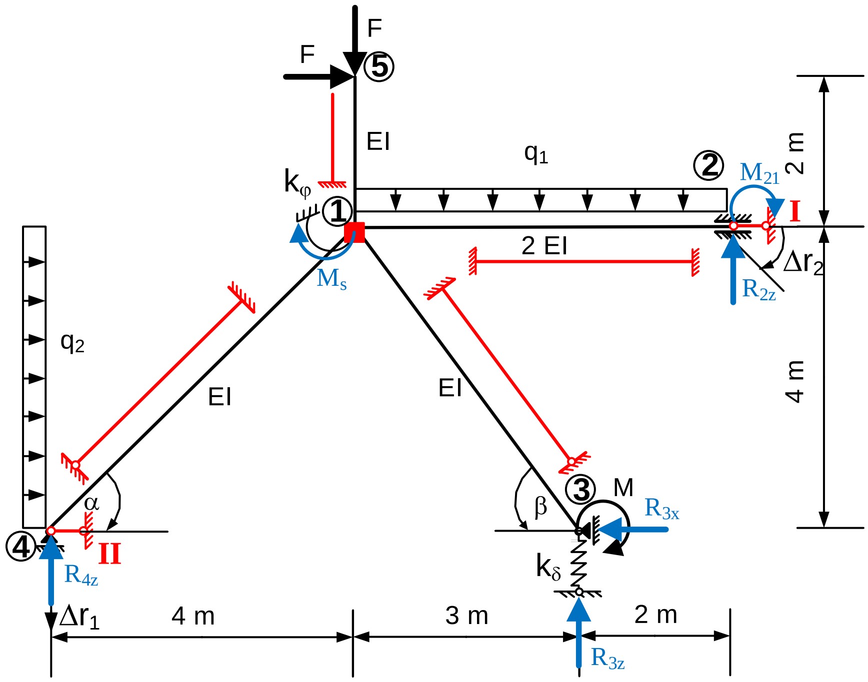

Liczba węzłów w=9, liczba prętów p=8, liczba więzi podporowych r =8.
*Warunek konieczny, ale niewystarczający* – minimalna liczba więzi translacyjnych

$$n_\delta \geq 2 \cdot w - p - r = 2*9 - 8 - 8 = 2$$

*Warunek dostateczny* – analiza kinematyczna modelu przegubowego po dołożeniu 2 więzi translacyjnych – model jest geometrycznie niezmienny wobec tego $n_\delta = 2$

## 4. Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń

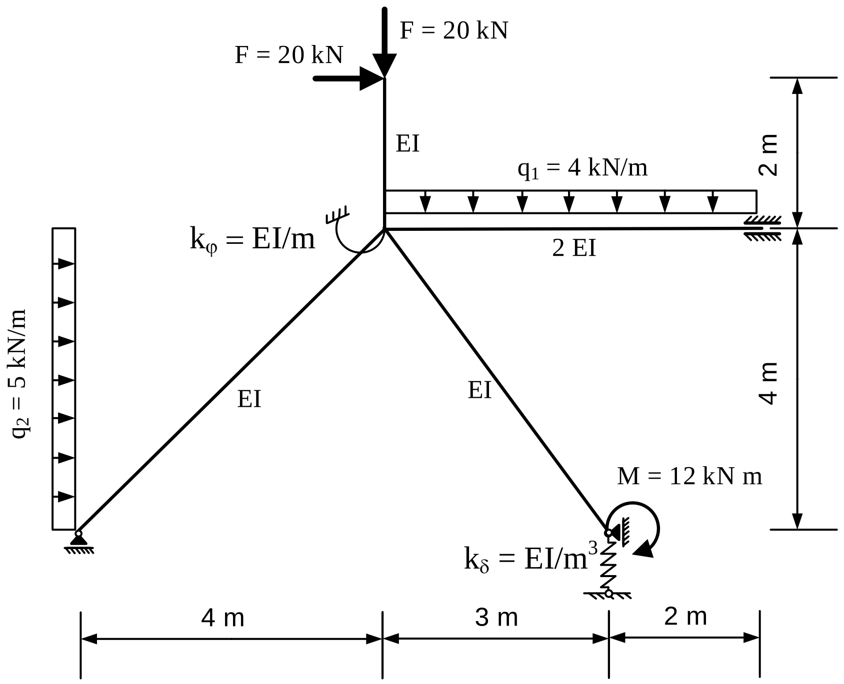
**Układ podstawowy** – układ zadany, w którym dodano $n_\varphi$ więzi rotacyjnych i $n_\delta$ więzi translacyjnych. W układzie tym oznaczymy węzły – początkowe numery dajemy w węzłach z dodanymi więziami rotacyjnymi.



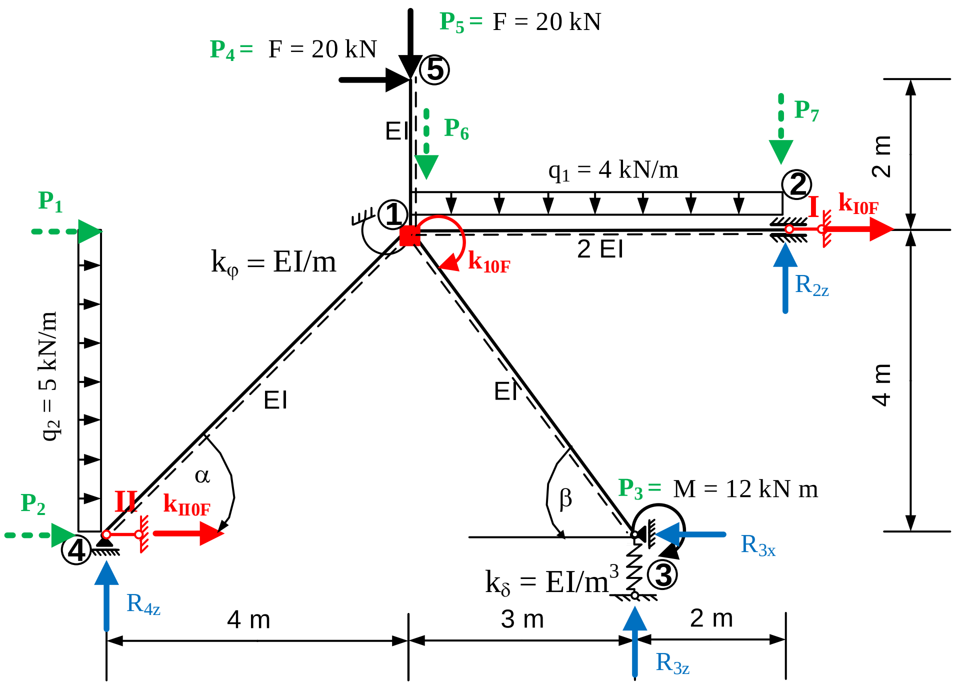

## 5. Ogólna postać układu równań metody przemieszczeń

$$
\boxed{\begin{aligned}
&k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0,\\
&k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0,\\
&k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0.
\end{aligned}}
$$

# 6. Rozwiązanie ramy od obciążenia mechanicznego




## 6.1 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego



**Obliczenie momentów brzegowych** (wykorzystano wzory transformacyjne dla przyjętych elementów, znakowanie zgodne ze statyczną umową znakowania, tzn. momenty prawoskrętne są dodatnie))

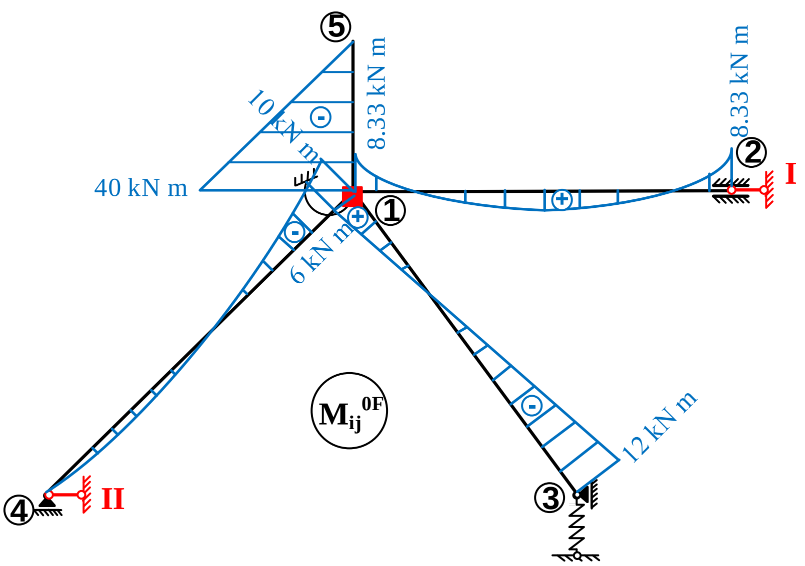
$$M_{12}^{0F} = -q_1(L_{12})^2/12 = -4\,\text{kN/m}\cdot(5\text{m})^2/12 = -8.333\,\text{kN}\cdot\text{m},$$
$$M_{21}^{0F} = +q_1(L_{12})^2/12 = +4\,\text{kN/m}\cdot(5\text{m})^2/12 = +8.333\,\text{kN}\cdot\text{m},$$
$$M_{13}^{0F} = M/2 = +12\,\text{kN}\cdot\text{m}/2 = +6\,\text{kN}\cdot\text{m},$$
$$M_{14}^{0F} = -(-q_2)(h_{14})^2/8 = +5\,\text{kN/m}\cdot(4\,\text{m})^2/8 = +10.00\,\text{kN}\cdot\text{m},$$
$$M_{15}^{0F} = -F * L_{15} = -20\,\text{kN}\cdot 2\,\text{m} = -40.00\,\text{kN}\cdot\text{m}.$$

**Uwaga:** moment $M_{14}^{0F}$ obliczono podstawiając do wzoru wartość obciążenia $q_2$ i prosto-padłą do niego długość elementu (rzut długości pręta $L_{14}$), można obliczyć prostopadłą do pręta 1-4 wartość obciążenia i wówczas podstawić do wzoru długość $L_{14}$.

**Siły równoważne** (równoważniki obciążenia – oznaczone kolorem zielonym)

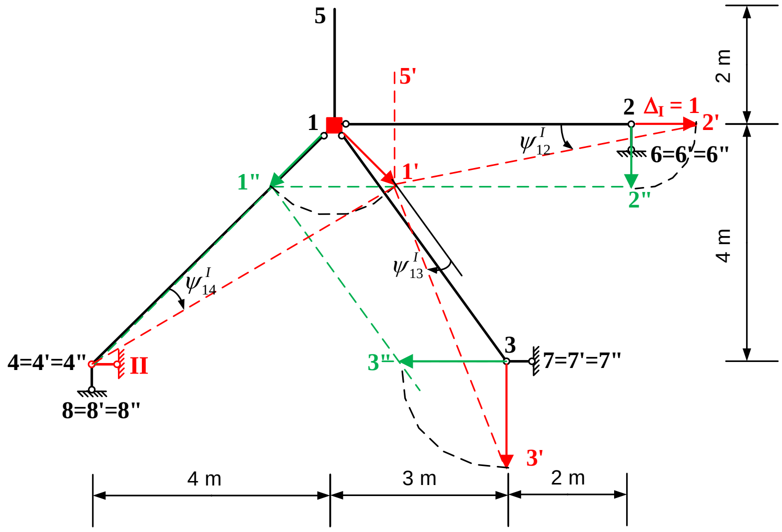
$P_1 = P_2 = q_2 \cdot 4$ m/2 = 10 kN,
$P_3$= M = 12 kN·m,
$P_4 = P_5$ = F = 20 kN,
$P_6 = P_7 = q_1 \cdot 5$ m/2 = 10 kN.

Wykres momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia danego (momenty odkładamy po stronie włókien rozciąganych, znaki przyjmujemy zgodnie z wytrzymałościową umową znakowania, w tym przykładzie znak plus, jeśli rozciągane są wyróżnione włókna).

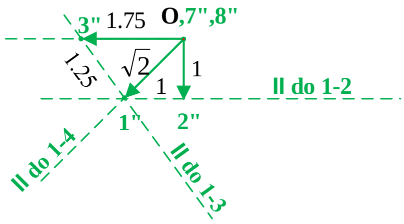


## 6.2 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_I = 1$ – plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych

**Plan przemieszczeń obróconych i plan przemieszczeń możliwych**




**B.P.P.O**




Wzajemne przemieszczenia końców elementów

$\Delta_{12} = -1,\qquad \Delta_{13} = +1.25,\qquad \Delta_{14} = +\sqrt{2} = 1.41,\qquad \Delta_{15} = 0,\qquad \delta_s^I = -1.75,$

Kąty obrotu cięciw: $\psi^{\mathrm{I}}_{\mathrm{ij}} = \Delta_{ij}/\mathrm{L}_{\mathrm{ij}}$,

$\psi^I_{12} = -1/5\mathrm{m} = -0.2/\mathrm{m},\qquad \psi^I_{13} = +1.25/5\mathrm{m} = +0.25/\mathrm{m},$

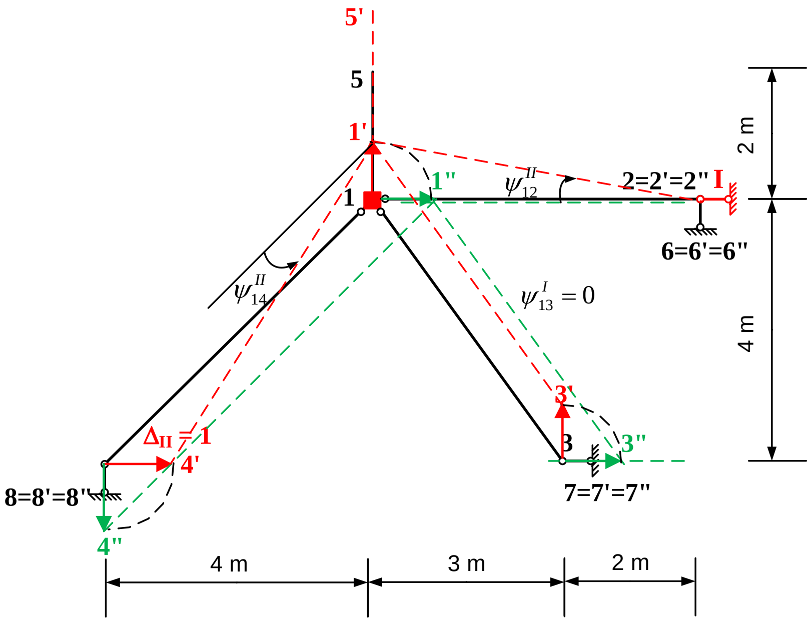
$\psi^I_{14} = +\sqrt{2}/4\sqrt{2}\mathrm{m} = +0.25/\mathrm{m},\qquad \psi^I_{15} = 0.$

Przemieszczenia pod siłami równoważnymi:

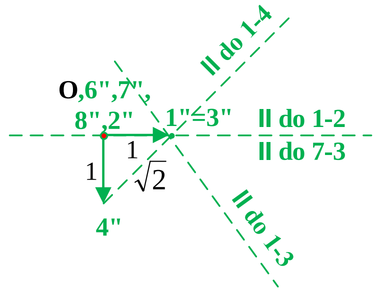
$\delta^I_{P1} = 1,\qquad \delta^I_{P2} = 0,\qquad \delta^I_{P3} = \psi^I_{13} = +0.25/m,\qquad \delta^I_{P4} = 1,\qquad \delta^I_{P5} = 1,\qquad \delta^I_{P6} = 1,\qquad \delta^I_{P7} = 0.$

## 6.3 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_{II}$ = 1 – plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych

**Plan przemieszczeń obróconych i plan przemieszczeń możliwych**




**B.P.P.O**




Wzajemne przemieszczenia końców elementów

$$\Delta_{12} = +1, \qquad \Delta_{13} = 0, \qquad \Delta_{14} = -\sqrt{2} = 1.41, \qquad \Delta_{15} = 0, \quad \delta_s^I = 1,$$

Kąty obrotu cięciw:

$$\psi_{12}^{II} = +1/5\text{m} = +0.2/\text{m}, \qquad \psi_{13}^{II} = 0,$$
$$\psi_{14}^{II} = -\sqrt{2}/4\sqrt{2}\text{m} = -0.25/\text{m}, \qquad \psi_{15}^{II} = 0.$$

Przemieszczenia pod siłami równoważnymi:

$$\delta_{P1}^{II} = 0, \quad \delta_{P2}^{II} = 1, \quad \delta_{P3}^{II} = \psi_{13}^{II} = -0.25/\text{m}, \quad \delta_{P4}^{II} = 0, \quad \delta_{P5}^{II} = -1, \quad \delta_{P6}^{II} = -1, \quad \delta_{P7}^{II} = 0.$$

## 6.4 Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń

*Elementy macierzy sztywności* (reakcje w dołożonych więziach w układzie podstawowym od jednostkowych przemieszczeń tych więzi – pierwszy indeks oznacza miejsce, drugi przyczynę).

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_{\varphi 1} = \sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} a_{1j} + k_{\varphi 1} =$$
$$= \underbrace{\frac{2EI}{5\,\text{m}}}_{1-2} \cdot 4 + \underbrace{\frac{EI}{5\,\text{m}}}_{1-3} \cdot 3 + \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}\,\text{m}}}_{1-4} \cdot 3 + \underbrace{\frac{EI}{\text{m}}}_{k_\varphi} = (1.6 + 0.6 + 0.53033 + 1)\frac{EI}{\text{m}} = 3.73033\frac{EI}{\text{m}}$$

$$k_{1\mathrm{I}} = \sum_j M_{1j}^{I} = -\sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} c_{1j} \cdot \psi_{1j}^{I} =$$

$$= \underbrace{-\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 6 \cdot \left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right)}_{1-2} - \underbrace{\frac{EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{1-3} - \underbrace{\frac{EI}{4\cdot\sqrt{2}\,m} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{1-4} = (0.48 - 0.15 - 0.1326)\frac{EI}{\mathrm{m}^2} = 0.1974\frac{EI}{\mathrm{m}^2}$$

$$k_{1\mathrm{II}} = \sum_j M_{1j}^{II} = -\sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} c_{1j} \cdot \psi_{1j}^{II} =$$

$$= \underbrace{-\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 6 \cdot \frac{0.2}{\mathrm{m}}}_{1-2} - \underbrace{\frac{EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-3} - \underbrace{\frac{EI}{4\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right)}_{1-4} = (-0.48 - 0 + 0.1326)\frac{EI}{\mathrm{m}^2} = -0.3474\frac{EI}{\mathrm{m}^2}$$

$$k_{\mathrm{I\,I}} = -\sum_{i,j} (M_{ij}^{I} + M_{ji}^{I}) \cdot \psi_{1j}^{I} + \sum_n k_{sn} \cdot \delta_{sn}^{I} \cdot \delta_{sn}^{I} = \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (c_{ij} + c_{ji}) \cdot \psi_{ij}^{I} \cdot \psi_{ij}^{I} + \sum_n k_{sn} \cdot \delta_{sn}^{I} \cdot \delta_{sn}^{I} =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^{I} \cdot \psi_{ij}^{I} + \sum_n k_{sn} \cdot \delta_{sn}^{I} \cdot \delta_{sn}^{I} =$$

$$= \underbrace{\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 12 \cdot \left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right) \cdot \left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right)}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{\mathrm{m}^3} \cdot (-1.75) \cdot (-1.75)}_{k_s} =$$

$$= (0.192 + 0.033141 + 0.0375 + 6.125)\frac{EI}{\mathrm{m}^3} = 6.3876\frac{EI}{\mathrm{m}^3}$$

$$k_{\mathrm{I\,II}} = k_{\mathrm{II\,I}} = \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^{I} \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_n k_{sn} \cdot \delta_{sn}^{I} \cdot \delta_{sn}^{II} =$$

$$= \underbrace{\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 12 \cdot \left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right) \cdot \left(\frac{0.2}{\mathrm{m}}\right)}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}} \cdot \left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right)}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{\mathrm{m}^3} \cdot (-1.75) \cdot (1)}_{k_s} =$$

$$= (-0.192 + 0 - 0.0375 - 3.5)\frac{EI}{\mathrm{m}^3} = -3.72515\frac{EI}{\mathrm{m}^3}$$

$$k_{\mathrm{II\,II}} = -\sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^{II\,II} \cdot \psi_{ij}^{II\,II} + \sum_n k_{sn} \cdot \delta_{sn}^{II} \cdot \delta_{sn}^{II} =$$

$$= \underbrace{\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 12 \cdot \frac{0.2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0.2}{\mathrm{m}}}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \frac{0}{\mathrm{m}} \cdot \frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{m}} \cdot 3 \cdot \left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right) \cdot \left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right)}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{\mathrm{m}^3} \cdot 1 \cdot 1}_{k_s} =$$

$$= (0.192 + 0 + 0.0375 + 2)\frac{EI}{\mathrm{m}^3} = 2.22515\frac{EI}{\mathrm{m}^3}$$

$$k_{\mathrm{I}1} = k_{1I}$$

$$k_{II\,1} = k_{1\mathrm{II}}$$

*Wyrazy wolne* (reakcje w dołożonych więziach w układzie podstawowym od obciążenia danego).

$$k_{10\mathrm{F}} = \sum_j M_{1j}^{0F} - M_1^0 = \left(\underbrace{-8.333}_{1-2} + \underbrace{6.00}_{1-3} + \underbrace{10.00}_{1-4} - \underbrace{40.00}_{1-5}\right) \mathrm{kN\cdot m} = -32.333\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$k_{\mathrm{I\,0F}} = -\sum_{i,j}(M_{ij}^{0F} + M_{ji}^{0F})\cdot\psi_{1j}^{I} - \sum_{k} P_k \cdot \delta_{Pk}^{I} =$$

$$= -\left\{\underbrace{(-8.333+8.333)\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot(\frac{-0.2}{m})}_{1-2} + \underbrace{6\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0.25}{m}}_{1-3} + \underbrace{10\cdot\mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0.25}{m}}_{1-4} + \underbrace{-40\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0}{m}}_{1-5}\right\} +$$

$$-\left\{\underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 1}_{P_1\cdot\delta_{P1}} + \underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 0}_{P_2\cdot\delta_{P2}} + \underbrace{12\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{P_3\cdot\delta_{P3}} + \underbrace{20\ \mathrm{kN}\cdot 1}_{P_4\cdot\delta_{P4}} + \underbrace{20\ \mathrm{kN}\cdot 1}_{P_5\cdot\delta_{P5}} + \underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 1}_{P_6\cdot\delta_{P6}} + \underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 0}_{P_{71}\cdot\delta_{P7}}\right\} =$$

$$= (-4-63)\ \mathrm{kN} = -67\ \ \mathrm{kN}$$

$$k_{\mathrm{II\,0F}} = -\sum_{i,j}(M_{ij}^{0F} + M_{ji}^{0F})\cdot\psi_{1j}^{II} - \sum_{k} P_k \cdot \delta_{Pk}^{II} =$$

$$= -\left\{\underbrace{(-8.333+8.333)\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0.2}{\mathrm{m}}}_{1-2} + \underbrace{6\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-3} + \underbrace{10\cdot\mathrm{kN\cdot m}\cdot\left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right)}_{1-4} + \underbrace{-40\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-5}\right\} +$$

$$-\left\{\underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 0}_{P_1\cdot\delta_{P1}} + \underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 1}_{P_2\cdot\delta_{P2}} + \underbrace{12\ \mathrm{kN\cdot m}\cdot\frac{0}{\mathrm{m}}}_{P_3\cdot\delta_{P3}} + \underbrace{20\ \mathrm{kN}\cdot 0}_{P_4\cdot\delta_{P4}} + \underbrace{20\ \mathrm{kN}\cdot(-1)}_{P_5\cdot\delta_{P5}} + \underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot(-1)}_{P_6\cdot\delta_{P6}} + \underbrace{10\ \mathrm{kN}\cdot 0}_{P_{71}\cdot\delta_{P7}}\right\} =$$

$$= (2.5+20)\ \mathrm{kN} = 22.5\,\mathrm{kN}$$

## *6.5 Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń i jego rozwiązanie*

$$\boxed{\begin{aligned}
&3.7303\frac{EI}{\mathrm{m}}\cdot\varphi_1 + 0.1974\frac{EI}{\mathrm{m}^2}\cdot\delta_I - 0.3474\frac{EI}{\mathrm{m}^2}\cdot\delta_{II} - 32.333\,\mathrm{kN\cdot m} = 0,\\
&0.1974\frac{EI}{\mathrm{m}^2}\cdot\varphi_1 + 6.3876\frac{EI}{\mathrm{m}^3}\cdot\delta_I - 3.7251\frac{EI}{\mathrm{m}^3}\cdot\delta_{II} - 67\ \mathrm{kN} = 0,\\
&-0.3474\frac{EI}{\mathrm{m}^2}\cdot\varphi_1 - 3.7251\frac{EI}{\mathrm{m}^3}\cdot\delta_I + 2.2251\frac{EI}{\mathrm{m}^3}\cdot\delta_{II} + 22.5\,\mathrm{kN} = 0.
\end{aligned}}$$

Rozwiązanie uzyskane dodatkiem Solver programu Excel :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\varphi_1 = 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI},\\
&\delta_I = 290.9777\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI},\\
&\delta_{II} = 482.9973\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}.
\end{aligned}}$$

## 6.6 Obliczenie wartości momentów brzegowych ze wzorów transformacyjnych

$$\boxed{\begin{aligned} M_{ij}^{F} &= \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}\left[a_{ij}\cdot\varphi_{ij}+b_{ji}\cdot\varphi_{ji}-c_{ij}\cdot\psi_{ij}\right]+M_{ij}^{0F}= \\ &=\frac{EI_{ij}}{L_{ij}}\left[a_{ij}\cdot\varphi_{ij}+b_{ji}\cdot\varphi_{ji}-c_{ij}\cdot\left(\psi_{ij}^{I}\cdot\delta_{I}+\psi_{ij}^{II}\cdot\delta_{II}\right)\right]+M_{ij}^{0F}\end{aligned}}$$

$$M_{12}^{F}=\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}}\cdot\left[4\cdot 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI}+2\cdot 0-6\cdot\left(\left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right)\cdot 290.9777\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}+\frac{0.2}{\mathrm{m}}\cdot 482.9937\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}\right)\right]+$$
$$-8.333\,\mathrm{kN\cdot m}=\left(61.2009+0+139.6693-231.8370-8.333\right)\mathrm{kN\cdot m}=-39.2998\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{21}^{F}=\frac{2EI}{5\,\mathrm{m}}\cdot\left[4\cdot 0+2\cdot 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI}-6\cdot\left(\left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right)\cdot 290.9777\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}+\frac{0.2}{\mathrm{m}}\cdot 482.9937\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}\right)\right]+$$
$$+8.333\,\mathrm{kN\cdot m}=\left(30.6004+0+139.6693-231.8370+8.333\right)\mathrm{kN\cdot m}=-53.2342\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{13}^{F}=\frac{EI}{5\,\mathrm{m}}\cdot\left[3\cdot 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI}-3\cdot\left(\frac{0.25}{\mathrm{m}}\cdot 290.9777\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}+\frac{0}{\mathrm{m}}\cdot 482.9937\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}\right)\right]+$$
$$+6\,\mathrm{kN\cdot m}=\left(22.9503-43.6467+0+6\right)\mathrm{kN\cdot m}=-14.6963\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{14}^{F}=\frac{EI}{4\sqrt{2}\,\mathrm{m}}\cdot\left[3\cdot 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI}-3\cdot\left(\frac{0.25}{\mathrm{m}}\cdot 290.9777\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}+\left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right)\cdot 482.9937\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI}\right)\right]+$$
$$+10\,\mathrm{kN\cdot m}=\left(20.2854-38.5746+64.0365+10\right)\mathrm{kN\cdot m}=+55.7434\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{15}^{F}=M_{15}^{0F}=-40.00\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{s}^{F}=-k_{\varphi}\cdot\varphi_{1}=-\frac{EI}{\mathrm{m}}\cdot 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{\mathrm{EI}}=-38.25054\,\mathrm{kN\cdot m}$$

## 6.7 Obliczenie sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

**Obliczenie sił tnących z równań równowagi elementów i sił osiowych z równań równowagi węzłów**

*Element 1-2*

$$\sum X=0,\quad N_{12}=N_{21}=0,$$

$$\sum M_{2}=0,\quad V_{12}\cdot 5\,\mathrm{m}+M_{12}-q_{1}\cdot 5\,\mathrm{m}\cdot\frac{5\,\mathrm{m}}{2}+M_{21}=0\;\Rightarrow\; V_{12}=-\frac{M_{12}+M_{21}}{5\,\mathrm{m}}+q_{1}\cdot\frac{5\,\mathrm{m}}{2},$$

$$V_{12}=-\frac{M_{12}+M_{21}}{5\,\mathrm{m}}+q_{1}\cdot\frac{5\,\mathrm{m}}{2}=-\frac{-39.2998\,\mathrm{kN\cdot m}-53.2342\,\mathrm{kN\cdot m}}{5\,\mathrm{m}}+4\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\cdot 2.5\,\mathrm{m}$$
$$=\left(18.5068+10\right)\mathrm{kN}=28.5068\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z=0,\quad V_{12}-q_{1}\cdot 5\,\mathrm{m}-V_{21}=0\;\Rightarrow\; V_{21}=V_{12}-q_{1}\cdot 5\,\mathrm{m}=28.5068\,\mathrm{kN}-4\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\cdot 5\,\mathrm{m}=8.5068\,\mathrm{kN}$$

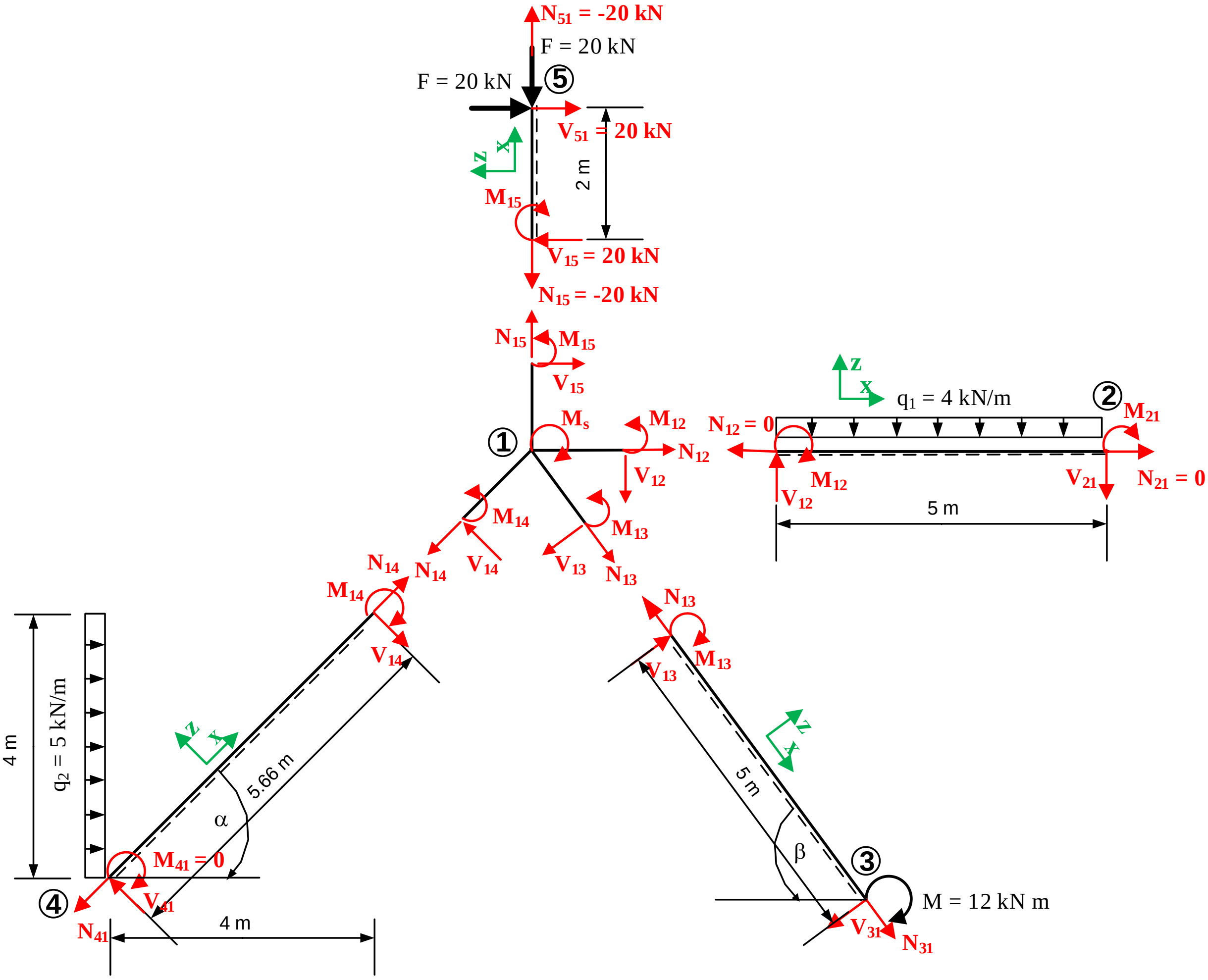
*Element 1-3*

$$\sum X = 0, \quad N_{13} = N_{31} = 0,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad V_{13} \cdot 5\,\mathrm{m} + M_{13} + M = 0 \Rightarrow V_{13} = -\frac{M_{13} + M}{5\,\mathrm{m}},$$

$$V_{13} = -\frac{-14.6963\,\mathrm{kN \cdot m} + 12\,\mathrm{kN \cdot m}}{5\,\mathrm{m}} = 0.5393\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad V_{13} = V_{31} = 0.5393\,\mathrm{kN}.$$




*Element 1-4*

$$\sum X = 0, \quad N_{14} - N_{41} + q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{41} = N_{14} + q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot \cos\alpha,$$

$$\sum M_4 = 0, \quad V_{14} \cdot 5.66\,\mathrm{m} + M_{14} + q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot \frac{4\,\mathrm{m}}{2} + M_{41} = 0 \Rightarrow V_{14} = -\frac{M_{14} - q_2 \cdot 8\,\mathrm{m}^2}{5.66.\mathrm{m}},$$

$$V_{14} = -\frac{55.7434\,\mathrm{kN \cdot m} + 5\,\mathrm{kN/m} \cdot 8\mathrm{m}^2}{5.66\,\mathrm{m}} = -16.9158\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad \text{-}V_{14} + V_{41} - q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow V_{41} = V_{41} + q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot \sin\alpha,$$

$$V_{41} = -16.9158\ \mathrm{kN} + 5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot 0.7071 = -16.9158\,\mathrm{kN} + 14.1421\,\mathrm{kN} = -2.7737\,\mathrm{kN}$$

*Węzeł 1*

$$\sum X = 0,$$
$$N_{12} + N_{13} \cdot \cos\beta - V_{13} \sin\beta - N_{14} \cos\alpha - V_{14} \sin\alpha + V_{15} =$$
$$= 0 + N_{13} \cdot 0.6 - 0.5393\,\text{kN} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 - (-16.9158\,\text{kN}) \cdot 0.7071 + 20\,\text{kN} = 0,$$
$$N_{13} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 + 31.5297\,\text{kN} = 0$$
$$\sum Z = 0,$$
$$-V_{12} - N_{13} \cdot \sin\beta - V_{13} \cos\beta - N_{14} \sin\alpha + V_{14} \cos\alpha + N_{15} =$$
$$= -28.5068\,\text{kN} - N_{13} \cdot 0.8 - 0.5393\ \text{kN} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 + (-16.9158\,\text{kN}) \cdot 0.7071 - 20\,\text{kN} = 0,$$
$$-N_{13} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 - 60.7915\,\text{kN} = 0$$

*Obliczenie sił osiowych z równań:*

$$N_{13} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 + 31.5297\,\text{kN} = 0,$$
$$-N_{13} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 - 60.7915\,\text{kN} = 0,$$
$$1.4 \cdot N_{13} + 92.3212\ \text{kN} = 0 \ \Rightarrow\ N_{13} = -65.94376\ \text{kN},$$
$$N_{14} = -11.3555\ \text{kN}$$
$$N_{41} = N_{14} + q_2 \cdot 4\,\text{m} \cdot \cos\alpha = -11.3655 + 5\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4\,\text{m} \cdot 0.7071 = 2.7767\,\text{kN}$$

$$\sum M_1 = 0,$$
$$M_s - M_{12} - M_{13} - M_{14} - M_{15} = -38.25054\,\text{kN} \cdot \text{m} - (-39.2998 - 14.6963 + 55.7434 - 40)\ \text{kN} \cdot \text{m} =$$
$$= (-38.25054 + 38.2527)\,\text{kN} \cdot \text{m} = 0.00216\,\text{kN} \cdot \text{m}$$

**Obliczenie momentów zginających**

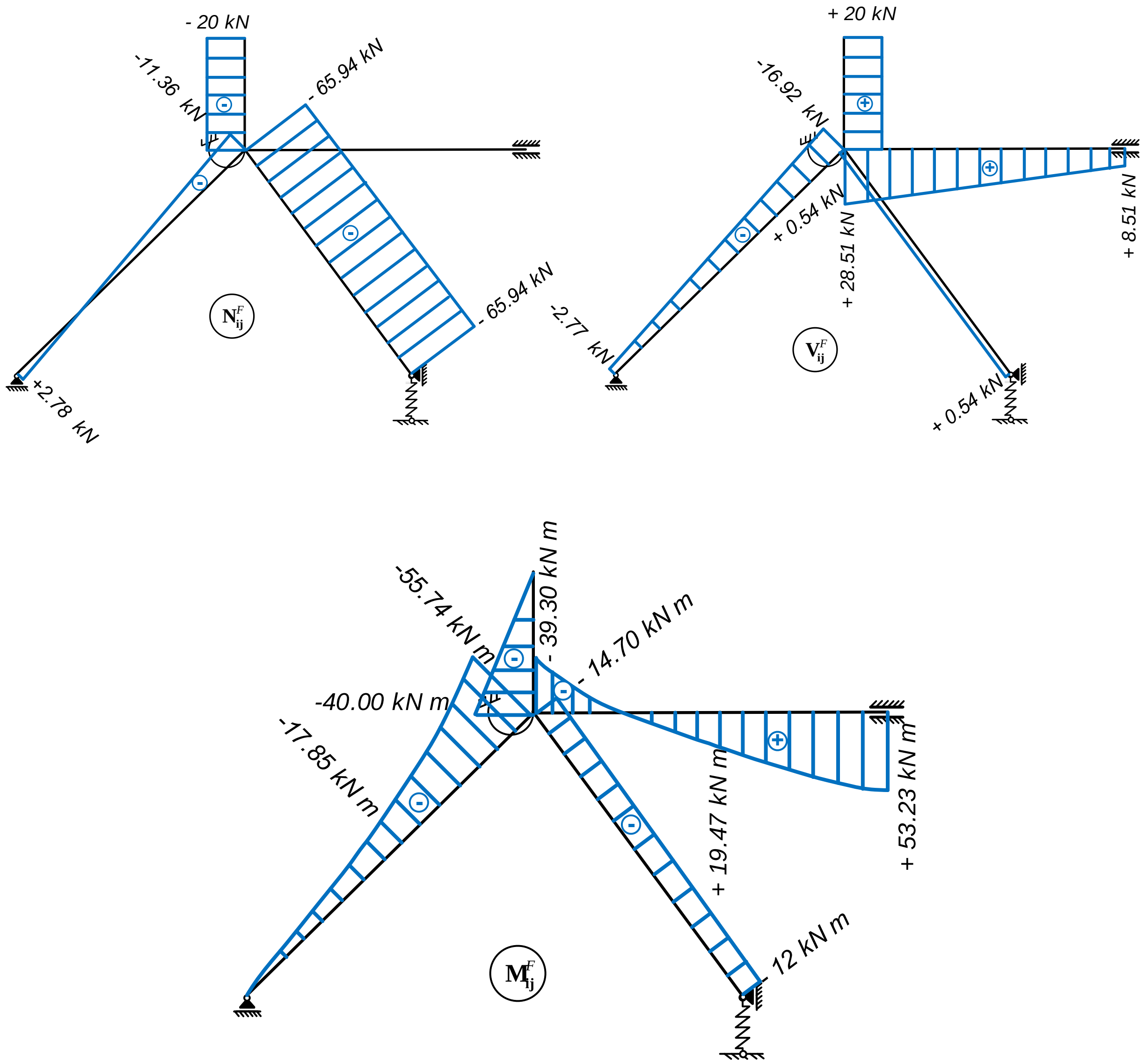
Rzeczywiste momenty zginające na końcach elementów mają wartość równą momentom brzegowym, znak zależy od wyróżnionych włókien

$$M_{12}^F = -39.2998\,\text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{21}^F = +53.2342\,\text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{13}^F = -14.6963\,\text{kN} \cdot m,$$
$$M_{14}^F = -55.7434\,\text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{15}^F = -40.00\,\text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{31}^F = -12.00\,\text{kN} \cdot \text{m}.$$

Obliczenie momentu zginającego w środku elementu 1-2 i elementu 1-4

$$M_{12,s}^F = M_{12}^F + V_{12} \cdot 2.5\,\text{m} - q_1 \cdot 1.5\,\text{m} \cdot 1.25\,\text{m} =$$
$$= -39.2998\,\text{kN} \cdot \text{m} + 28.5068\text{kN} \cdot 2.5\text{m} - 4\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1.5.\text{m} \cdot 1.25.\text{m} = 19.4672\,\text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{14,s}^F = V_{41} \cdot \frac{5.66.\text{m}}{2} - q_2 \cdot 2.\text{m} \cdot 1.\text{m} = -2.7737.\text{kN} \cdot 2.83.\text{m} - 5\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2.\text{m} \cdot 1.\text{m} = -17.8496.\text{kN} \cdot \text{m}$$

**Wykresy sił przekrojowych**




## *6.8 Kontrola poprawności rozwiązania*

**Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania -** równowaga prętów i węzłów, została wykonana przy obliczaniu sił tnących i osiowych.

Można jeszcze sprawdzić globalne równania równowagi. W tym celu obliczymy reakcje wykorzystując obliczone siły osiowe i tnące

$$R_{2z} = -V_{21} \cdot = -8.5068 \text{ kN},$$

$$R_{3z} = -N_{31} \sin\beta - V_{31}\cos\beta = -(-65.94376\,\text{kN}) \cdot 0.8 - 0.5393\,\text{kN} \cdot 0.6 = 52.4314 \text{ kN},$$

$$R_{3x} = -N_{31} \cos\beta + V_{31}\sin\beta = -(-65.94376\,\text{kN} \cdot 0.6) + 0.5393\,\text{kN} \cdot 0.8 = 39.9977\,\text{kN},$$

$$R_{4z} = -N_{41} \sin\alpha + V_{41}\cos\alpha = -2.7767\,\text{kN} \cdot 0.7071 - 2.7737\,\text{kN} \cdot 0.7071 = -3.9247\,\text{kN}.$$

**Uwaga:** reakcja $R_{3x}$ jest reakcją w translacyjnej więzi sprężystej można obliczyć ze wzoru

$$R_{3z} = R_{s\delta} = -k_\delta \cdot \delta_s = -k_\delta \cdot \left(\delta_s^I \cdot \delta_I + \delta_s^{II} \cdot \delta_{II}\right) =$$

$$= -\frac{2EI}{\mathrm{m}^3} \cdot \left(-1.75 \cdot \frac{290.9777\,\mathrm{kN\,m^3}}{EI} + 1 \cdot \frac{482.9973\,\mathrm{kN\,m^3}}{EI}\right) = 52.4274\,\mathrm{kN}$$

*Globalne równania równowagi*

$$\sum X = 0, \quad F + q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} - R_{3x} = 20\,\mathrm{kN} + 5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 4\,\mathrm{m} - 39.9977\,\mathrm{kN} = 0.0023\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad -F - q_1 \cdot 5m + R_{2z} + R_{3z} + R_{4z} =$$

$$= -20\,\mathrm{kN} - 4\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 5\,\mathrm{m} - 8.5068\,\mathrm{kN} + 52.4314\,\mathrm{kN} - 3.9247\,\mathrm{kN} = -0.0001\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_3 = 0,$$

$$F \cdot 6\,\mathrm{m} - F \cdot 3\,\mathrm{m} - q_1 \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 0.5\,\mathrm{m} + q_2 \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} + M + M_s - R_{2z} \cdot 2\,\mathrm{m} + R_{4z} \cdot 7\,\mathrm{m} + M_{21} =$$

$$= 20\,\mathrm{kN} \cdot 6\,\mathrm{m} - 20\,\mathrm{kN} \cdot 3\,\mathrm{m} - 4\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 0.5\,\mathrm{m} + 5\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 4\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m} - 38.2505\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m} +$$

$$-\left(-8.5068\,\mathrm{kN} \cdot 2\,\mathrm{m}\right) + \left(-3.9247\,\mathrm{kN} \cdot 7\,\mathrm{m}\right) + \left(-53.2342\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}\right) = 0..056\,\mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$$

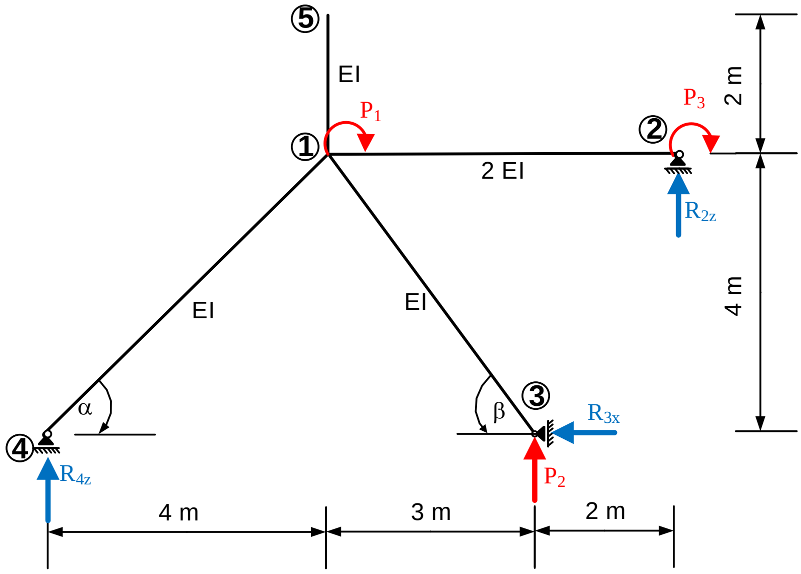
**Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania** (sprawdzenie przemieszczeń)

Analizowana rama jest 3-krotnie statycznie niewyznaczalna (patrz punkt 2), należałoby więc sprawdzić 3 przemieszczenia, których wartości znamy. Obciążenie jednostkowe do obliczenia przemieszczeń przyłożymy w układzie statycznie wyznaczalnym powstałym z układu danego przez usunięcie 3 więzi – obu więzi sprężystych i więzi momentowej w węźle 2. Przemieszczenia w miejscu usuniętych więzi powinny wynosić

$$\Delta_1^{FR} = -\frac{M_s^F}{k_\varphi} = \varphi_1 = 38.25054\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI},$$

$$\Delta_2^{FR} = -\frac{R_s^F}{k_\delta} = \frac{-52.4274\,\mathrm{kN}}{2EI/\mathrm{m}^3} = -26.2137\frac{\mathrm{kN\,m^3}}{EI},$$

$$\Delta_3^{FR} = \varphi_2 = 0.$$



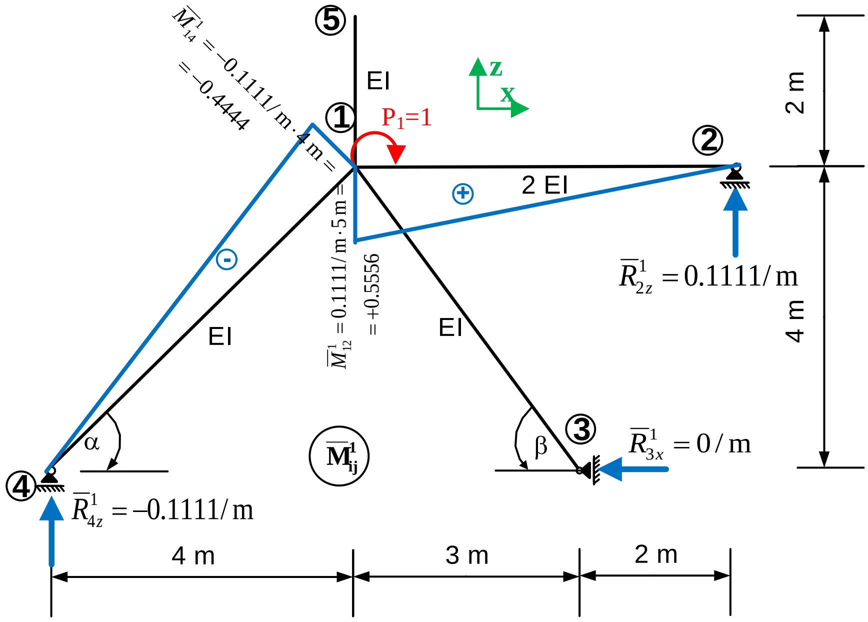

*Rozwiązanie ramy statycznie wyznaczalnej od* $P_1 = 1$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \;\Rightarrow\; \overline{R}^1_{3x} = 0,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad \overline{R}^1_{4z} \cdot 9\,\text{m} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{R}^1_{4z} = -0.1111/\text{m},$$

$$\sum Z = 0, \quad \overline{R}^1_{4z} + \overline{R}^1_{2z} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{R}^1_{2z} = +0.1111/\text{m}.$$




$$\Delta_1^F = \int\limits_{1-2,1-4} \frac{M_{ij}^F \overline{M}_{ij}^1}{EI_{ij}} dx + \sum_n \frac{S_n^F \overline{S}_n^1}{k_n} =$$

$$= \frac{5\,\text{m}}{6 \cdot 2EI}\left[-39.2998\,\text{kN m} \cdot 0.5556 + 4 \cdot 19.4672\,\text{kN m} \cdot 0.5556/2 + 53.2342\,\text{kN m} \cdot 0\right] +$$

$$+ \frac{5.66\,\text{m}}{6\,EI}\left[-55.7434\,\text{kN m} \cdot (\text{-}0.4444) + 4 \cdot (\text{-}17.8496\,\text{kN m}) \cdot (\text{-}0.4444/2) + 0)\right] =$$

$$= (-0.08459 + 38.33431)\frac{\text{kN m}^2}{EI} = 38.24972\frac{\text{kN m}^2}{EI}$$

$$\Delta_1^{FR}-\Delta_1^{F}=(38.25054-38.24972)\frac{\text{kN m}^2}{EI}=0.00082\frac{\text{kN m}^2}{EI}.$$

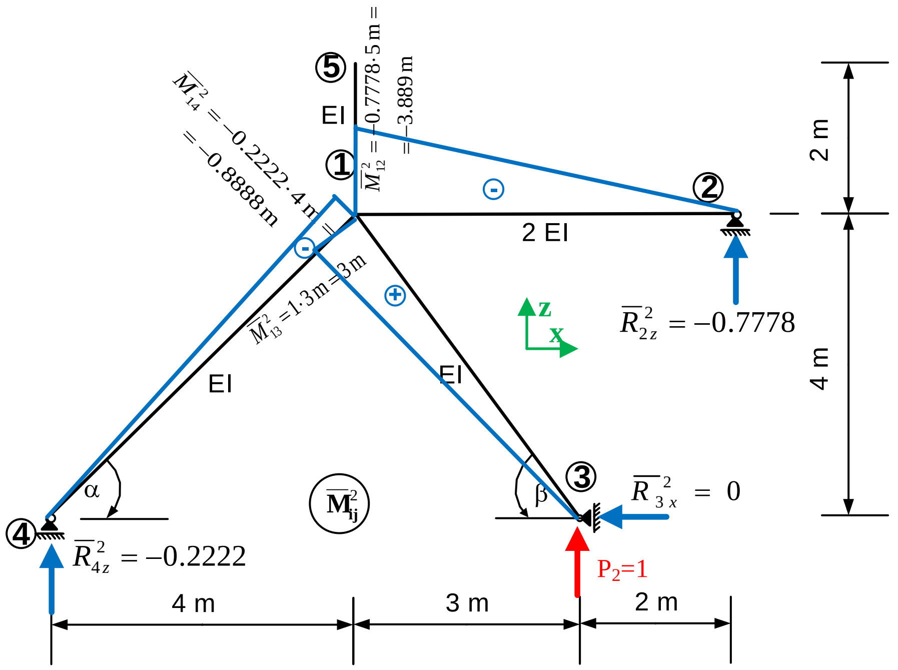
*Rozwiązanie ramy statycznie wyznaczalnej od* $P_2=1$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{3x}^2=0,$$

$$\sum M_3=0,\quad \overline{R}_{4z}^2\cdot 9\,\text{m}+1\cdot 2\,\text{m}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{4z}^2=-0.2222,$$

$$\sum Z=0,\quad \overline{R}_{4z}^2+\overline{R}_{2z}^2+1=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{2z}^2=-0.7778.$$




$$\Delta_2^F=\int\limits_{1-2,1-3,1-4}\frac{M_{ij}^F\overline{M}_{ij}^2}{EI_{ij}}dx+\sum_n\frac{S_n^F\overline{S}_n^2}{k_n}=$$

$$=\frac{5\,\text{m}}{6\cdot 2EI}\left[-39.2998\,\text{kN m}\cdot(-3.889\,\text{m})+4\cdot 19.4672\,\text{kN m}\cdot(-3.889\,\text{m})/2+53.2342\,\text{kNm}\cdot 0\,\text{m}\right]+$$

$$+\frac{5\,\text{m}}{6\cdot EI}\left[-14.6963\,\text{kN m}\cdot 3\,\text{m}+4\cdot(-14.6963-12\,\text{kN m})\cdot 3\,\text{m}/4-12\,\text{kN m}\cdot 0\,\text{m}\right]+$$

$$+\frac{5.66\,\text{m}}{6\,EI}\left[-55.7434\,\text{kN m}\cdot(-0.8888\,\text{m})+4\cdot(-17.8496\,\text{kN m})\cdot(-0.8888\,\text{m}/2)+0)\right]=$$

$$=(0.5921-103.483+76.6686)\frac{\text{kN m}^3}{EI}=-26.2208\frac{\text{kN m}^3}{EI}$$

$$\Delta_2^{FR}-\Delta_2^{F}=-26.2137\frac{\text{kN m}^3}{EI}-\left(-26.2208\frac{\text{kN m}^3}{EI}\right)=0.007073\frac{\text{kN m}^3}{EI}.$$

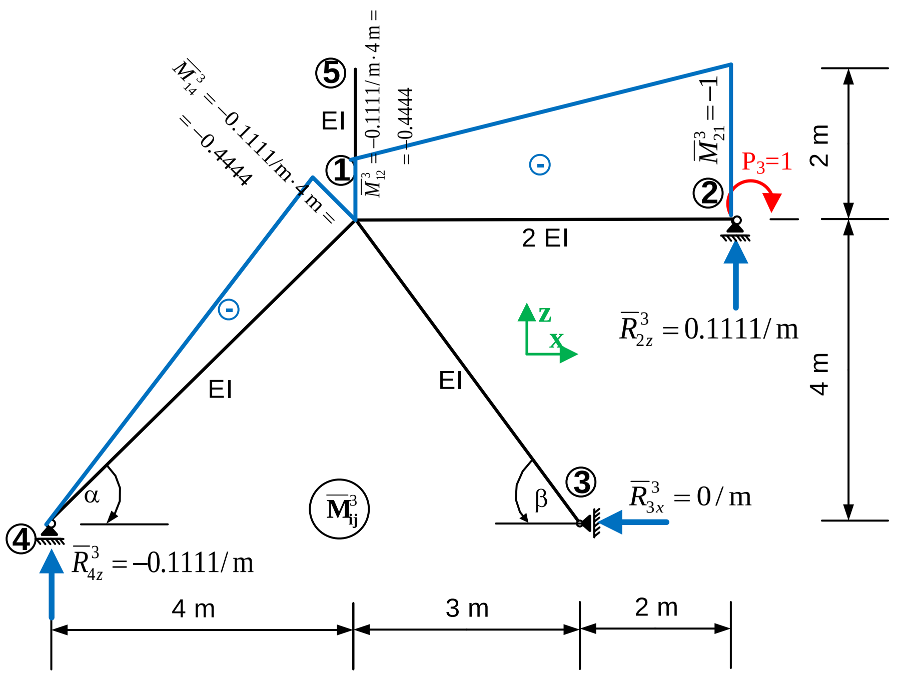
*Rozwiązanie ramy statycznie wyznaczalnej od* $P_3=1$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{3x}^3=0,$$

$$\sum M_3=0,\quad \overline{R}_{4z}^3\cdot 9\,\text{m}+1=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{4z}^3=-0.1111/\text{m},$$

$$\sum Z=0,\quad \overline{R}_{4z}^3+\overline{R}_{2z}^3=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{2z}^3=+0.1111/\text{m}.$$




$$\Delta_3^F = \int_{1-2,1-4} \frac{M_{ij}^F \overline{M}_{ij}^3}{EI_{ij}} dx + \sum_n \frac{S_n^F \overline{S}_n^3}{k_n} =$$

$$= \frac{5\,\mathrm{m}}{6 \cdot 2EI}\left[-39.2998\,\mathrm{kN\,m} \cdot (-0.4444) + 4 \cdot 19.4672\,\mathrm{kN\,m} \cdot (-0.4444 - 1)/2 + 53.2342\,\mathrm{kN\,m} \cdot (-1)\right] +$$

$$+ \frac{5.66\,\mathrm{m}}{6\,EI}\left[-55.7434\,\mathrm{kN\,m} \cdot (-0.4444) + 4 \cdot (-17.8496\,\mathrm{kN\,m}) \cdot (-0.4444/2) + 0)\right] =$$

$$= (-38.3359 + 38.33431)\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI} = -0.00161\frac{\mathrm{kN\,m^2}}{EI}$$

# 7. Wstępne projektowanie przekroju ze względu na zginanie

***Uwaga:*** Rozwiązanie układu hiperstatycznego zależy od proporcji sztywności elementów. Dlatego, aby w dalszych obliczeniach można było skorzystać z obliczonych elementów macierzy sztywności zaprojektujemy dla elementów o sztywności EI 1 dwuteownik a dla elementów o sztywności 2 EI przyjmiemy dwa takie same dwuteowniki.

Maksymalny moment dla elementów o sztywności EI – wynosi 55.74 kN m,
dla elementów o sztywności 2 EI – 53.23 kN m (po podzieleniu przez 2 jest mniej niż dla EI)

**Wskaźnik na zginanie obliczymy ze wzoru**

$$W \geq \frac{\gamma \cdot \max \mathrm{M}}{f_d} = \frac{1.5 \cdot 55.74\,\mathrm{kN\,m}}{215000\,\mathrm{kN/m^2}} = 0.000389\,\mathrm{m^3} = 389\,\mathrm{cm^3}$$

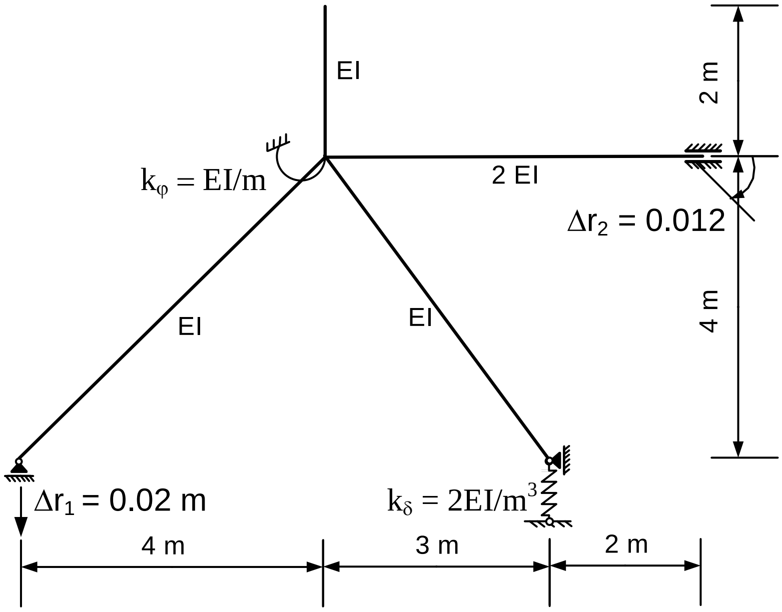
Dla elementów 1-3, 1-4, 1- 5 przyjmiemy I260, dla elementu 1-2 przyjmiemy 2I260.

$W_{I260} = 441.5\ \mathrm{cm^3}$, $\qquad I_{I260} = 5740\ \mathrm{cm^4}$,

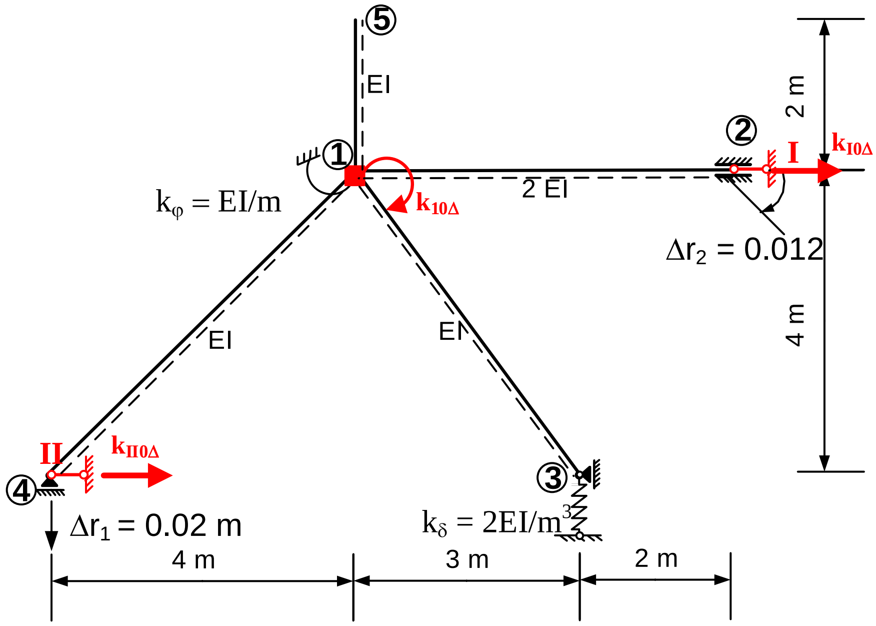
$$EI = 210000000\,\mathrm{kN/m^2} \cdot 5740 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^4} = 12054\,\mathrm{kN \cdot m^2},$$

$$k_\delta = 2EI/\mathrm{m}^3 = 2\cdot 12054\,\mathrm{kN\cdot m^2/m^3} = 24108\,\mathrm{kN/m},$$
$$k_\varphi = EI/\mathrm{m} = 12054\,\mathrm{kN\cdot m}.$$

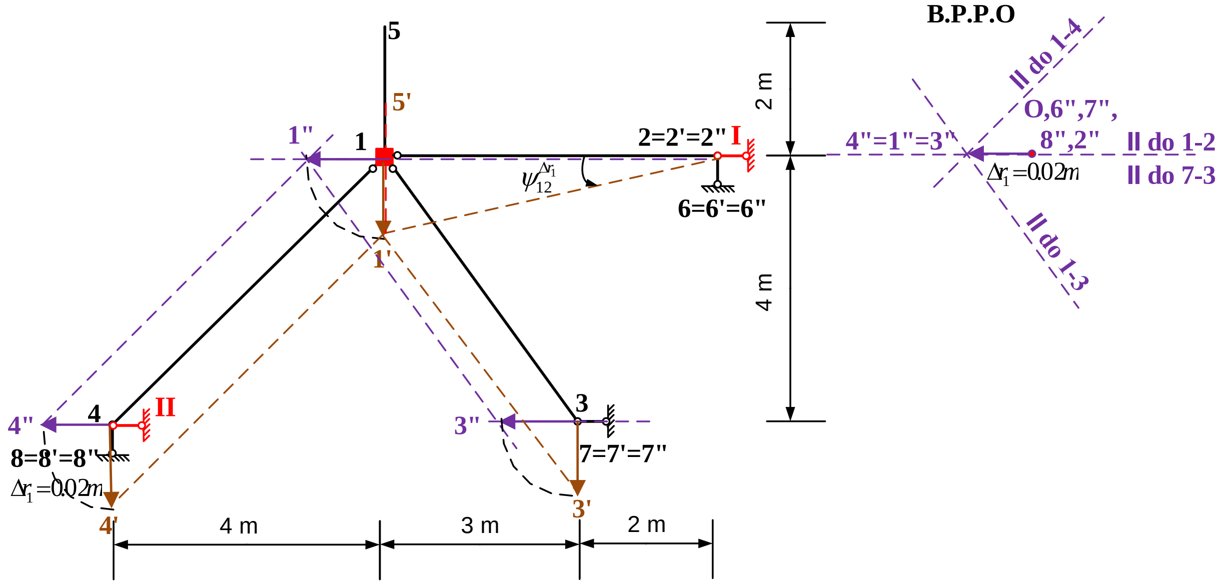
# 8. Rozwiązanie ramy od przemieszczenia podpór




## *8.1 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia podpór*



**Plan przemieszczeń obróconych**
**i plan przemieszczeń możliwych**




$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = -0.02\,\text{m}/5\,\text{m} = -0.004, \qquad \psi_{13}^{\Delta r_1} = 0,$$

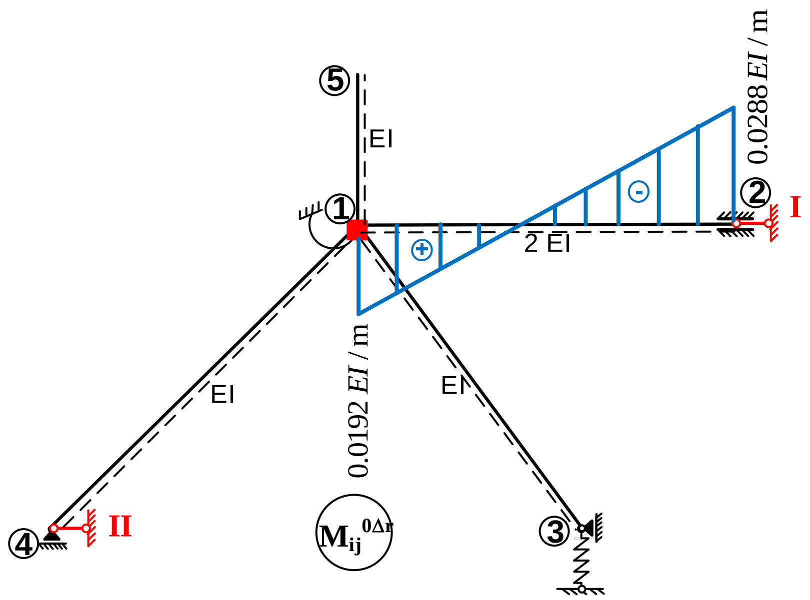
$$\psi_{14}^{I\Delta r_1} = 0, \qquad \psi_{15}^{I\Delta r_1} = 0, \qquad \delta_s^{0\Delta r} = -\Delta r_1 = -0.02\,\text{m}.$$

**Obliczenie momentów brzegowych w układzie podstawowym od przemieszczenia podpór** (wykorzystano wzory transformacyjne dla przyjętych elementów)

$$M_{12}^{0\Delta r} = \frac{2EI}{5\,\text{m}}\left[4\cdot 0 + 2\cdot 0.012 - 6\cdot(-0.004)\right] = 0.0192\frac{EI}{\text{m}},$$

$$M_{21}^{0\Delta r} = \frac{2EI}{5\,\text{m}}\left[4\cdot 0.012 + 2\cdot 0 - 6\cdot(-0.004)\right] = 0.0288\frac{EI}{\text{m}},$$

$$M_{13}^{0\Delta r} = M_{14}^{0\Delta r} = M_{15}^{0\Delta r} = 0.$$



## 8.2 Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń

*Elementy macierzy sztywności* jak w punkcie 6.3

*Wyrazy wolne* od przemieszczenia podpór

$$k_{10\Delta} = \sum_j M_{1j}^{0\Delta} = \left( \underbrace{0.0192}_{1-2} + \underbrace{0.00}_{1-3} + \underbrace{0.00}_{1-4} + \underbrace{0.00}_{1-5} \right) \frac{EI}{\mathrm{m}} = 0.0192 \frac{EI}{\mathrm{m}}$$

$$k_{\mathrm{I}0\Delta} = -\sum_{i,j} (M_{ij}^{0\Delta} + M_{ji}^{0\Delta}) \cdot \psi_{1j}^{I} + \sum_n k_{\delta sn} \cdot \delta_{sn}^{\Delta r} \cdot \delta_{sn}^{I} =$$

$$= -\left\{ \underbrace{(0.0192 + 0.0288) \frac{EI}{\mathrm{m}} \cdot \left( \frac{-0.2}{\mathrm{m}} \right)}_{1-2} + \underbrace{0 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{1-3} + \underbrace{0 \cdot \frac{0.25}{\mathrm{m}}}_{1-4} + \underbrace{0 \cdot \frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-5} \right\} + \underbrace{\frac{2EI}{\mathrm{m}^3}}_{k_\delta} \cdot (-0.02\,\mathrm{m}) \cdot (-1.75) =$$

$$= (0.0096 + 0.07) \frac{EI}{\mathrm{m}^2} = 0{,}0796 \ \frac{EI}{\mathrm{m}^2}$$

$$k_{\mathrm{II}0\Delta} = -\sum_{i,j} (M_{ij}^{0\Delta} + M_{ji}^{0\Delta}) \cdot \psi_{1j}^{II} + \sum_n k_{\delta sn} \cdot \delta_{sn}^{\Delta r} \cdot \delta_{sn}^{II} =$$

$$= -\left\{ \underbrace{(0.0192 + 0.0288) \frac{EI}{\mathrm{m}} \cdot \left( \frac{0.2}{\mathrm{m}} \right)}_{1-2} + \underbrace{0 \cdot \frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-3} + \underbrace{0 \cdot \frac{-0.25}{\mathrm{m}}}_{1-4} + \underbrace{0 \cdot \frac{0}{\mathrm{m}}}_{1-5} \right\} + \underbrace{\frac{2EI}{\mathrm{m}^3}}_{k_\delta} \cdot (-0.02\mathrm{m}) \cdot (+1) =$$

$$= (-0.0096 - 0.04) \frac{EI}{\mathrm{m}^2} = -0.0496 \ \frac{EI}{\mathrm{m}^2}$$

## 8.3 Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń i jego rozwiązanie

$$\boxed{\begin{aligned}
&3.7303 \frac{EI}{\mathrm{m}} \cdot \varphi_1^{\Delta r} + 0.1974 \frac{EI}{\mathrm{m}^2} \cdot \delta_I^{\Delta r} - 0.3474 \frac{EI}{\mathrm{m}^2} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} + 0.0192 \frac{EI}{\mathrm{m}} = 0, \\
&0.1974 \frac{EI}{\mathrm{m}^2} \cdot \varphi_1^{\Delta r} + 6.3876 \frac{EI}{\mathrm{m}^3} \cdot \delta_I^{\Delta r} - 3.7251 \frac{EI}{\mathrm{m}^3} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} + 0.0796 \frac{EI}{\mathrm{m}^2} = 0, \\
&-0.3474 \frac{EI}{\mathrm{m}^2} \cdot \varphi_1^{\Delta r} - 3.7251 \frac{EI}{\mathrm{m}^3} \cdot \delta_I^{\Delta r} + 2.2251 \frac{EI}{\mathrm{m}^3} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} - 0.0496 \frac{EI}{\mathrm{m}^2} = 0.
\end{aligned}}$$

Rozwiązanie uzyskane programem calcoolator.pl/metoda-gaussa :

$$\boxed{\begin{aligned}
\varphi_1^{\Delta r} &= -0.00101086, \\
\delta_I^{\Delta r} &= 0.02014635\,\mathrm{m}, \\
\delta_{II}^{\Delta r} &= 0.05586085\,\mathrm{m}.
\end{aligned}}$$

## 8.4 Obliczenie wartości momentów brzegowych ze wzorów transformacyjnych

$$\boxed{M_{ij}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}\left[a_{ij}\cdot\varphi_{ij}^{\Delta r} + b_{ji}\cdot\varphi_{ji}^{\Delta r} - c_{ij}\cdot\left(\psi_{ij}^{I}\cdot\delta_{I}^{\Delta r} + \psi_{ij}^{II}\cdot\delta_{II}^{\Delta r}\right)\right] + M_{ij}^{0\Delta r}}$$

$$M_{12}^{\Delta r} = \frac{2EI}{5\,\mathrm{m}}\cdot\left[4\cdot(-0.00101086) + 2\cdot 0 - 6\cdot\left(\left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right)\cdot 0.02014635m + \frac{0.2}{\mathrm{m}}\cdot 0.05586085\,\mathrm{m}\right)\right] +$$

$$+0.0192\frac{EI}{\mathrm{m}} = (-0.00162 + 0.00967 - 0.02681 - 0.0192)\frac{EI}{\mathrm{m}} = 0.000440\frac{EI}{\mathrm{m}} =$$

$$= 0.000440\cdot\frac{12054\,\mathrm{kN\cdot m^2}}{\mathrm{m}} = 5.2997\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{21}^{\Delta r} = \frac{2EI}{5\,\mathrm{m}}\cdot\left[4\cdot 0 + 2\cdot(-0.00101086) - 6\cdot\left(\left(\frac{-0.2}{\mathrm{m}}\right)\cdot 0.02014635m + \frac{0.2}{\mathrm{m}}\cdot 0.05586085\,\mathrm{m}\right)\right] +$$

$$+0.0288\frac{EI}{\mathrm{m}} = (0 - 0.00081 + 0.00967 - 0.02681 + 0.0288)\frac{EI}{\mathrm{m}} = 0.000440\frac{EI}{\mathrm{m}} =$$

$$= 0.010848\cdot\frac{12054\,\mathrm{kN\cdot m^2}}{\mathrm{m}} = 130.766\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{13}^{\Delta r} = \frac{EI}{5\,\mathrm{m}}\cdot\left[3\cdot(-0.00101086) - 3\cdot\left(\frac{0.25}{\mathrm{m}}\cdot 0.02014635\,\mathrm{m} + \frac{0}{\mathrm{m}}\cdot 0.05586085m\right)\right] + 0 =$$

$$= (-0.00061 - 0.00302)\frac{EI}{\mathrm{m}} = -0.00363\cdot\frac{12054\,\mathrm{kN\cdot m^2}}{\mathrm{m}} = -43.7376\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{14}^{\Delta r} = \frac{EI}{4\sqrt{2}\,\mathrm{m}}\cdot\left[3\cdot(-0.00101086) - 3\cdot\left(\frac{0.25}{\mathrm{m}}\cdot 0.02014635\,\mathrm{m} + \left(\frac{-0.25}{\mathrm{m}}\right)\cdot 0.05586085\,\mathrm{m}\right)\right] + 0 =$$

$$= (-0.00054 - 0.00267 + 0.007406)\frac{EI}{\mathrm{m}} = 0.004199\cdot\frac{12054\,\mathrm{kN\cdot m^2}}{\mathrm{m}} = +50.6151\,\mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{15}^{\Delta r} = 0\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{s}^{\Delta r} = -k_{\varphi}\cdot\varphi_{1}^{\Delta r} = -\frac{EI}{\mathrm{m}}\cdot(-0.00101086) = \frac{12054\ \mathrm{kN\cdot m^2}}{\mathrm{m}}\cdot 0.00101086 = 12.1849\,\mathrm{kN\cdot m}$$

## 8.5 Obliczenie sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

**Obliczenie sił tnących z równań równowagi elementów i sił osiowych z równań równowagi węzłów**

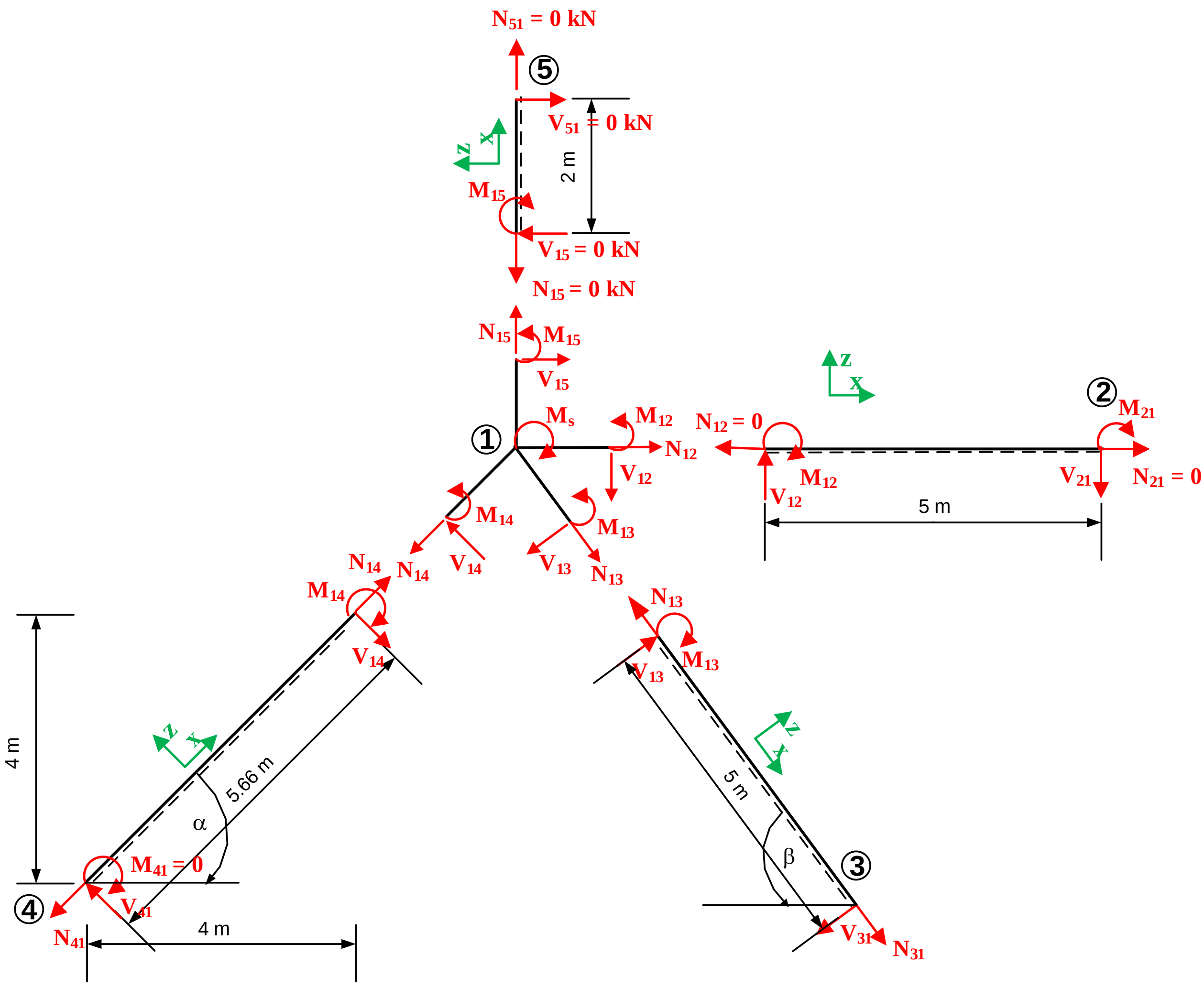
*Element 1-2*

$$\sum X = 0,\quad N_{12} = N_{21} = 0,$$

$$\sum M_2 = 0,\quad V_{12}\cdot 5\,\mathrm{m} + M_{12} + M_{21} = 0 \;\Rightarrow\; V_{12} = -\frac{M_{12}+M_{21}}{5\,\mathrm{m}} =$$

$$V_{12} = -\frac{5.2997\,\mathrm{kN\cdot m} + 130.766\,\mathrm{kN\cdot m}}{5\,\mathrm{m}} = -27.2131\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0,\quad V_{12} - V_{21} = 0 \;\Rightarrow\; V_{21} = V_{12} = \text{-}27.2131\ \mathrm{kN}$$




*Element 1-3*

$$\sum X = 0,\quad N_{13} = N_{31} = 0,$$

$$\sum M_3 = 0,\quad V_{13}\cdot 5\,\mathrm{m} + M_{13} = 0 \;\Rightarrow\; V_{13} = -\frac{M_{13}}{5\,\mathrm{m}} = -\frac{-43.7376\,\mathrm{kN\cdot m}}{5\,\mathrm{m}} = 8.7475\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0,\quad V_{13} = V_{31} = 8.7475\ \mathrm{kN}.$$

*Element 1-4*

$$\sum X = 0,\quad N_{14} - N_{41} = 0 \;\Rightarrow\; N_{41} = N_{14},$$

$$\sum M_4 = 0,\quad V_{14}\cdot 5.66\ \mathrm{m} + M_{14} + M_{41} = 0 \;\Rightarrow\; V_{14} = -\frac{M_{14}}{5.66\,\mathrm{m}} = -\frac{50.6151\,\mathrm{kN\cdot m}}{5.66\ \mathrm{m}} = -8.9426\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad -V_{14} + V_{41} = 0 \Rightarrow V_{41} = V_{41} = -8.9426 \text{ kN}$$

*Węzeł 1*

$$\sum X = 0,$$
$$N_{12} + N_{13} \cdot \cos\beta - V_{13} \sin\beta - N_{14} \cos\alpha - V_{14} \sin\alpha + V_{15} =$$
$$= 0 + N_{13} \cdot 0.6 - 8.7475 \text{ kN} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 - (-8.9426 \text{ kN}) \cdot 0.7071 = 0,$$
$$N_{13} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 - 0.6747 \text{ kN} = 0$$
$$\sum Z = 0,$$
$$-V_{12} - N_{13} \cdot \sin\beta - V_{13} \cos\beta - N_{14} \sin\alpha + V_{14} \cos\alpha + N_{15} =$$
$$= -(-27.2131 \text{kN}) - N_{13} \cdot 0.8 - 8.7475 \text{ kN} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 + (-8.9426 \text{ kN}) \cdot 0.7071 = 0,$$
$$-N_{13} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 + 15.6413 \text{ kN} = 0$$

*Obliczenie sił osiowych z równań:*

$$N_{13} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 - 0.6747 \text{ kN} = 0,$$
$$-N_{13} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 + 15.6413 \text{ kN} = 0,$$
$$1.4 \cdot N_{13} - 16.3160 \text{ kN} = 0 \Rightarrow N_{13} = +11.6543 \text{ kN},$$
$$N_{14} = \frac{N_{13} \cdot 0.6 - 0.6747 \text{ kN}}{0.7071} = +8.9349 \text{ kN}$$

*Równanie kontrolne*

$$\sum M_1 = 0,$$
$$M_s^{\Delta r} - M_{12}^{\Delta r} - M_{13}^{\Delta r}{}_1 - M_{14}^{\Delta r} - M_{15}^{\Delta r} = 12.1849 \text{kN} \cdot \text{m} - (5.2997 - 43.7376 + 50.6151 + 0) \text{kN} \cdot \text{m} =$$
$$= (12.1849 + 12.1772) \text{ kN} \cdot \text{m} = 0.0077 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**Obliczenie momentów zginających**

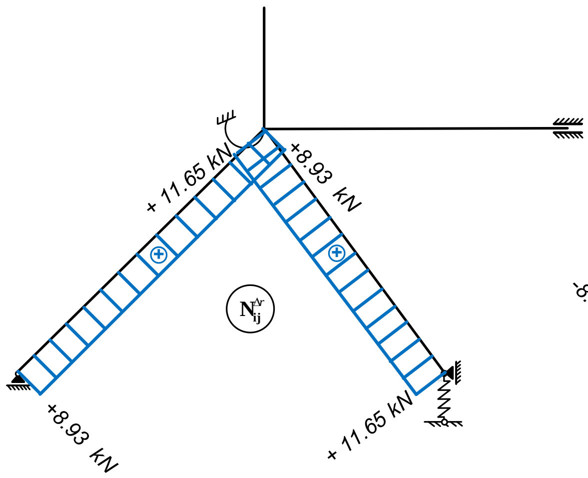
Rzeczywiste momenty zginające na końcach elementów mają wartość równą momentom brzegowym, znak zależy od wyróżnionych włókien

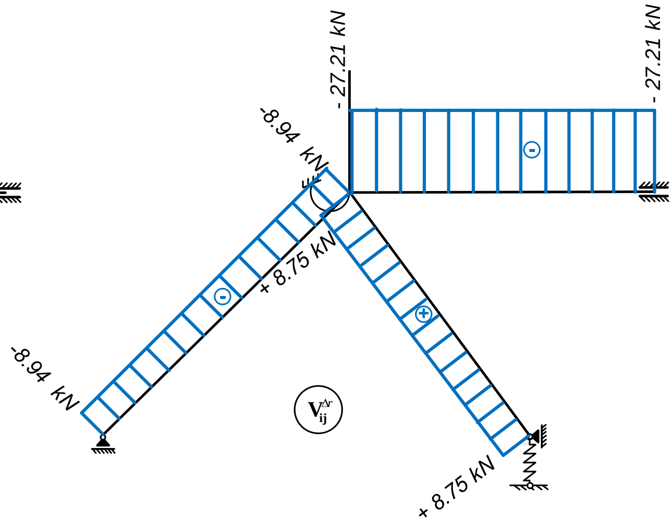
$$M_{12}^{\Delta r} = +5.2997 \text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{21}^{\Delta r} = -130.7660 \text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{13}^{\Delta r} = -43.7376 \text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{14}^{\Delta r} = -50.6151 \text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{15}^{\Delta r} = 0.00 \text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{31}^{\Delta r} = 0.00 \text{kN} \cdot \text{m},$$

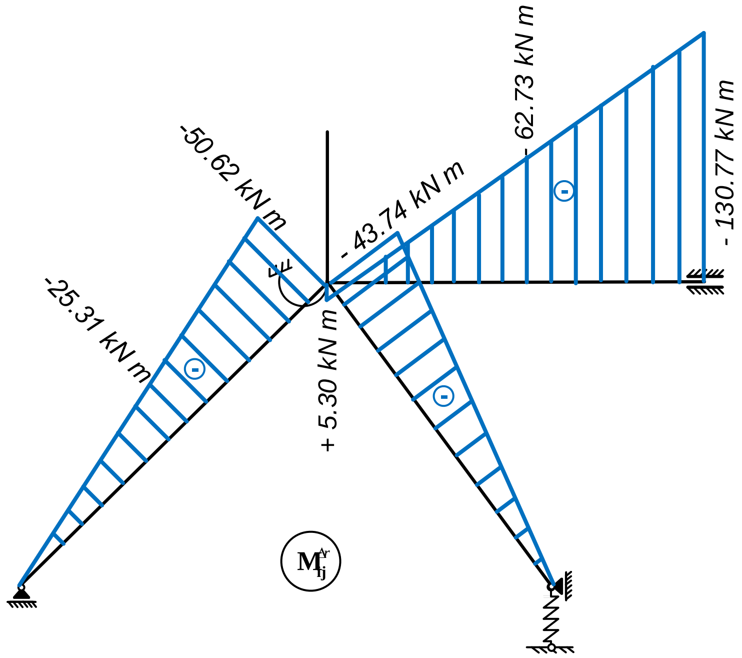
Obliczenie momentu zginającego w środku elementu 1-2 i elementu 1-4

$$M_{12,s}^{\Delta r} = (M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r})/2 = (5.2997 - 130.766) \text{kN} \cdot \text{m}/2 = -62.7332 \text{kN} \cdot \text{m},$$
$$M_{14,s}^{\Delta r} = M_{41}^{\Delta r}/2 = -50.6151 \text{kN} \cdot \text{m}/2 = -25.3075 \text{kN} \cdot \text{m}.$$

**Wykresy sił przekrojowych**




## 8.6 Kontrola poprawności rozwiązania

**Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania** - równowaga prętów i węzłów, została wykonana przy obliczaniu sił tnących i osiowych.

Sprawdzenie globalnych równań równowagi. Obliczenie reakcji przez odpowiednie rzutowanie sił osiowych i sił tnących

$$R_{2z}^{\Delta r} = -V_{21} \cdot = +27.2131\,\text{kN},$$
$$R_{3z}^{\Delta r} = -N_{31}\sin\beta - V_{31}\cos\beta = -11.6543\,\text{kN}\cdot 0.8 - 8.7475\,\text{kN}\cdot 0.6 = -14.5719\,\text{kN},$$
$$R_{3x}^{\Delta r} = -N_{31}\cos\beta + V_{31}\sin\beta = -11.6543\,\text{kN}\cdot 0.6 + 8.7475\,\text{kN}\cdot 0.8 = 0.00542\,\text{kN},$$
$$R_{4z}^{\Delta r} = -N_{41}\sin\alpha + V_{41}\cos\alpha = -8.9349\,\text{kN}\cdot 0.7071 + (-8.94267\,\text{kN})\cdot 0.7071 = -12.6412\,\text{kN}.$$

**Uwaga:** Kontrolnie obliczymy reakcję w więzi sprężystej $R_{3x}$ ze wzoru

$$R_{3z} = R_{s\delta} = -k_\delta \cdot \delta_s = -k_\delta \cdot \left(\delta_s^I \cdot \delta_I^{\Delta r} + \delta_s^{II} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} + \delta_s^{0\Delta r}\right) =$$
$$= -\frac{2EI}{\text{m}^3} \cdot (-1.75 \cdot 0.02014635\,\text{m} + 1 \cdot 0.05586085\,\text{m} - 0.02\,\text{m}) = -14.57901\,\text{kN}$$

*Globalne równania równowagi*

$$\sum X = 0, \quad -R_{3x} = -0.00542\,\text{kN},$$
$$\sum Z = 0, \quad R_{2z} + R_{3z} + R_{4z} = +27.2131\,\text{kN} - 14.5719\,\text{kN} - 12.6412\,\text{kN} = 0,$$
$$\sum M_3 = 0,$$
$$M_s - R_{2z} \cdot 2\,\text{m} + R_{4z} \cdot 7\,\text{m} + M_{21} =$$
$$= 12.1849\,\text{kN}\cdot\text{m} - 27.2131\,\text{kN}\cdot 2\,\text{m} - 12.6412\,\text{kN}\cdot 7\,\text{m} + 130.766\,\text{kN}\cdot\text{m} = 0.0363\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

**Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania** (sprawdzenie przemieszczeń)

Sprawdzimy te same 3 przemieszczenia co w punkcie 6.7. Powinny one mieć następujące wartości

$$\Delta_1^{\Delta R} = -\frac{M_s^{\Delta r}}{k_\varphi} = \frac{-12.1849\,\text{kN}\cdot\text{m}}{EI/\text{m}} = \frac{-12.1849\,\text{kN}\,\text{m}^2}{EI} = \varphi_1 = -0.0010186,$$
$$\Delta_2^{\Delta R} = -\frac{R_s^{\Delta r}}{k_\delta} = -\frac{-14.5719\,\text{kN}}{2EI/\text{m}^3} = +7.2859\,\frac{\text{kN}\,\text{m}^3}{EI} = +0.000604\,\text{m},$$
$$\Delta_3^{\Delta R} = \varphi_2 = 0.$$

$$\Delta_1^{\Delta r} = \int\limits_{1-2,1-4} \frac{M_{ij}^{\Delta r}\overline{M}_{ij}^1}{EI_{ij}}\,dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta r}\overline{S}_n^1}{k_n} - \sum_r \overline{R}_r^1 \Delta r_r =$$
$$= \frac{5\,\text{m}}{6\cdot 2EI}\left[5.2997\,\text{kN m}\cdot 0.5556 + 4\cdot(-62.7332\,\text{kN m})\cdot 0.5556/2 - 130.766\,\text{kN m}\cdot 0\right] +$$
$$+ \frac{5.66\,\text{m}}{6\,\text{EI}}\left[-50.6151\,\text{kN m}\cdot(-0.4444) + 4\cdot(-25.3075\,\text{kN m})\cdot(-0.4444/2) + 0)\right] +$$
$$- \{(-0.111/\text{m})\cdot(-0.02\,\text{m}) + 0\cdot 0.012\} = 14.6188\frac{\text{kN m}^2}{EI} - 0.00222 =$$
$$= 14.6188\frac{\text{kN m}^2}{12054\,\text{kN m}^2} - 0.00222 = 0.001213 - 0.00222 = -0.00101$$

$$\Delta_2^{\Delta r} = \int\limits_{1-2,1-3,1-4} \frac{M_{ij}^{\Delta r}\overline{M}_{ij}^{2}}{EI_{ij}}dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta r}\overline{S}_n^{2}}{k_n} - \sum_r \overline{R}_r^{2}\Delta r_r =$$

$$= \frac{5\,\mathrm{m}}{6\cdot 2EI}\left[5.2997\ \mathrm{kN\,m}\cdot(-3.889\,\mathrm{m}) + 4\cdot(-62.7332\,\mathrm{kN\,m})\cdot(-3.889\,\mathrm{m})/2 - 130.766\,\mathrm{kN\,m}\cdot 0\,\mathrm{m}\right] +$$

$$+ \frac{5\,\mathrm{m}}{6\cdot EI}\left[-43.7376\,\mathrm{kN\,m}\cdot 3\,\mathrm{m} + 4\cdot(-43.7376\ \mathrm{kN\,m})\cdot 3\,\mathrm{m}/4 - 0\,\mathrm{kN\,m}\cdot 0\,\mathrm{m}\right] +$$

$$+ \frac{5.66\,\mathrm{m}}{6\,E\mathrm{I}}\left[-50.6151\,\mathrm{kN\,m}\cdot(-0.8888\,\mathrm{m}) + 4\cdot(-25.3075\,\mathrm{kN\,m})\cdot(-0.8888\,\mathrm{m}/2) + 0)\right] + =$$

$$- \{(-0.2222/\mathrm{m})\cdot(-0.02\,\mathrm{m}) + 0\cdot 0.012\} = 60.9020\frac{\mathrm{kN\,m}^3}{EI} - 0.004444\,\mathrm{m} =$$

$$= 60.9020\frac{\mathrm{kN\,m}^3}{12054\,\mathrm{kN\,m}^2} - 0.004444\,\mathrm{m} = 0.005052\,\mathrm{m} - 0.004444\,\mathrm{m} = 0.000608\,\mathrm{m}$$

$$\Delta_3^{\Delta r} = \int\limits_{1-2,1-4} \frac{M_{ij}^{\Delta r}\overline{M}_{ij}^{3}}{EI_{ij}}dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta r}\overline{S}_n^{3}}{k_n} - \sum_r \overline{R}_r^{3}\Delta r_r =$$

$$= \frac{5\,\mathrm{m}}{6\cdot 2EI}\left[5.2997\,\mathrm{kN\ \ m}\cdot(-0.4444) + 4\cdot(-62.7332\,\mathrm{kN\,m})\cdot(-0.4444-1)/2 - 130.766\,\mathrm{kN\,m}\cdot(-1)\right] +$$

$$+ \frac{5.66\,\mathrm{m}}{6\,E\mathrm{I}}\left[-50.6151\,\mathrm{kN\,m}\cdot(-0.4444) + 4\cdot(-25.3075\,\mathrm{kN\,m})\cdot(-0.4444/2) + 0)\right] +$$

$$- \{(-0.111/\mathrm{m})\cdot(-0.02\,\mathrm{m}) + 1\cdot 0.012\} = 171.4518\frac{\mathrm{kN\,m}^2}{EI} - 0.014222 =$$

$$= 171.4518\frac{\mathrm{kNm}^2}{12054\,\mathrm{kNm}^2} = 0.014224 - 0.014222 = 0.000002$$