Politechnika Wrocławska

Wydział Budownictwa lądowego i Wodnego

Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej

REDUKCJA PRZESTRZENNEGO UKŁADU SIŁ

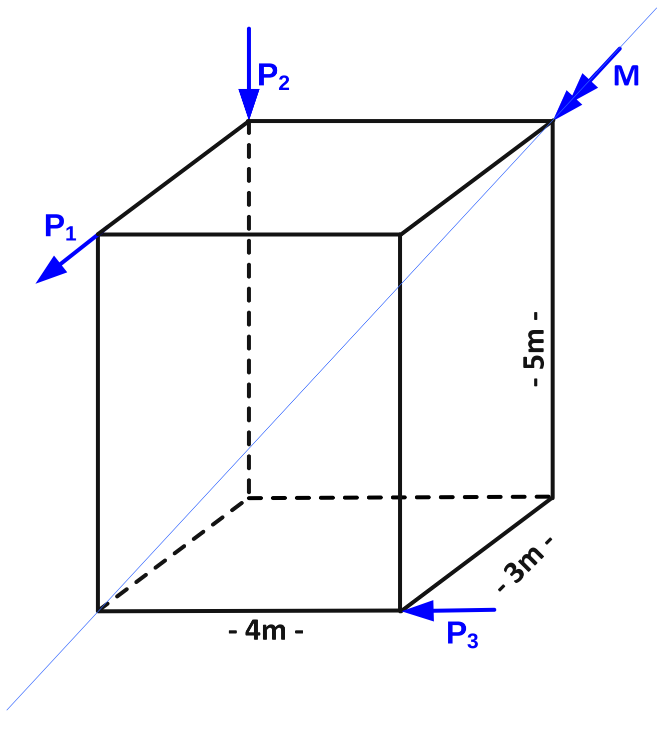
Zredukować układ sił

$P_1 = 10$ kN

$P_2 = 2$ kN

$P_3 = 1$ kN

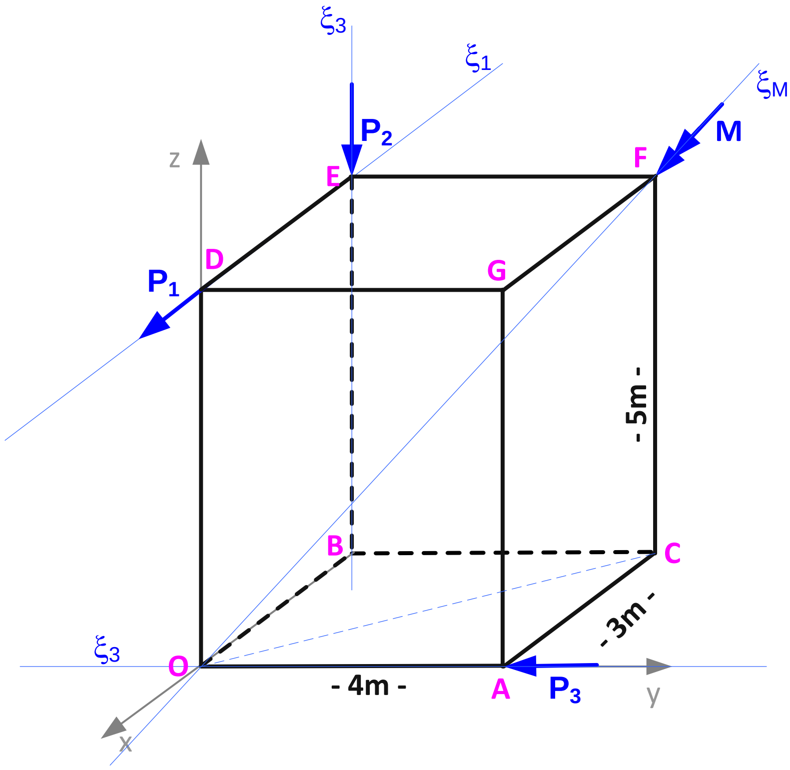
$M = 5\sqrt{2}$ kNm



Opracowała dr inż. Monika Podwórna

Wrocław, marzec 2018 r

Przyjęcie układu współrzędnych



Współrzędne punktów:

O	(0	, 0	, 0	)
A	(0	, 4	, 0	)
B	(-3	, 0	, 0	)
C	(-3	, 4	, 0	)
D	(0	, 0	, 5	)
E	(-3	, 0	, 5	)
F	(-3	, 4	, 5	)
G	(0	, 4	, 5	)

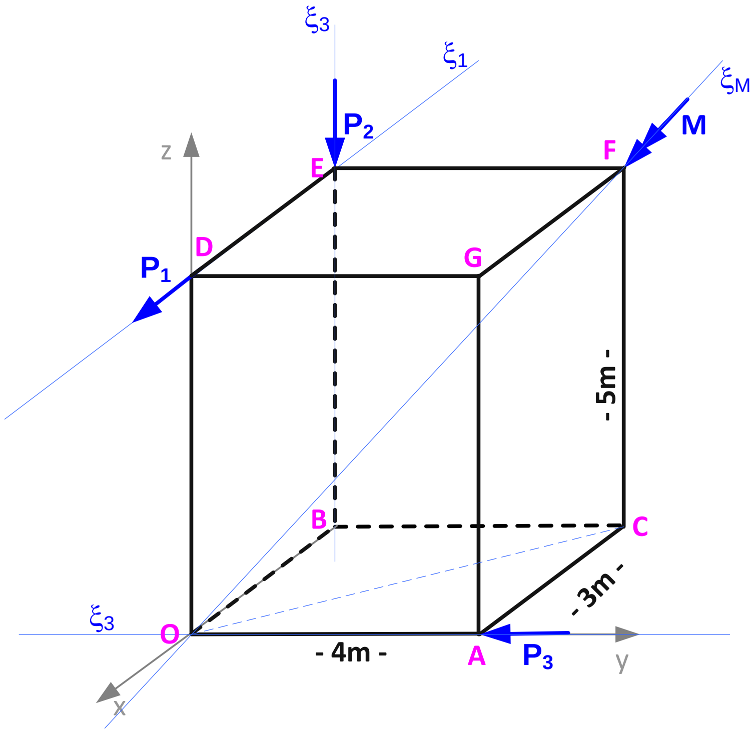
Zapis wektorowy

$P_1 = 10$ kN

$P_2 = 2$ kN

$P_3 = 1$ kN

$M = 5\sqrt{2}$ kNm



$M = 5\sqrt{2}$ kNm

$\vec{\boldsymbol{M}} = (\mathbf{3}, \mathbf{-4}, \mathbf{-5})$ **[kNm]**

I sposób:

O	(0	, 0	, 0)
F	(-3	, 4	, 5)

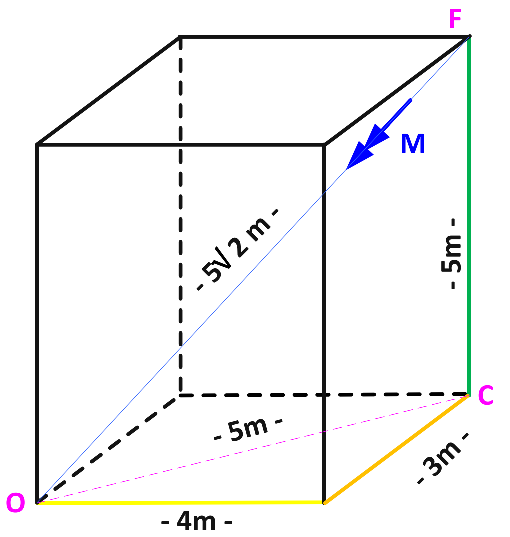
$\overrightarrow{FO} = (3, -4, -5)$ [m] ,

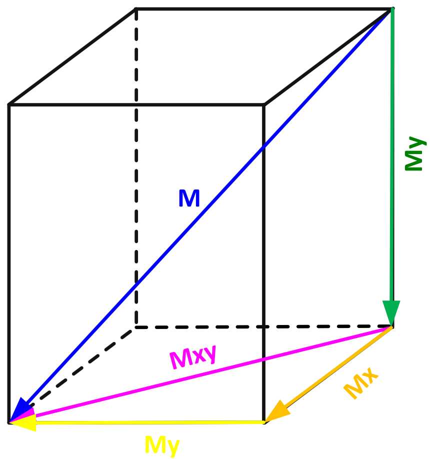
$$|\overrightarrow{FO}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{e_M} = (\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}})$$

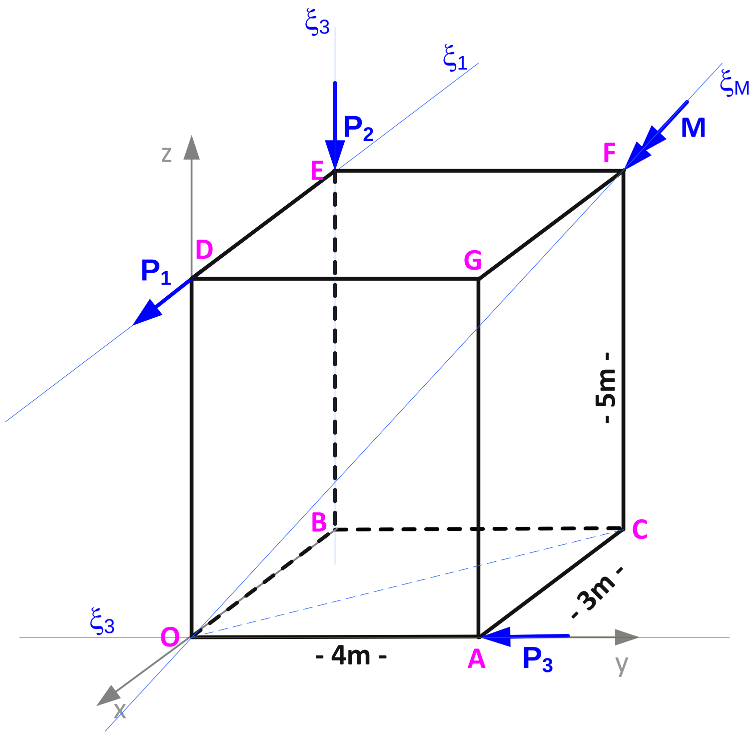
$$\vec{M} = M \cdot \overrightarrow{e_M} = (3, -4, -5) \text{ [kNm]}$$

II sposób:





$\vec{M} = (3, -4, -5)$ [kNm]



$P_1 = 10$ kN

$\overrightarrow{\boldsymbol{P_1}} = (\mathbf{10}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ **[kN]**

Prosta działania siły przez punkty

D (0 , 0 , 5)

E (-3 , 0 , 5)

$\overrightarrow{ED} = (3, 0, 0)$ [m]

$\left|\overrightarrow{ED}\right| = 3$

$\overrightarrow{e_{P1}} = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{P_1} = P_1 \cdot \overrightarrow{e_{P1}} = (10, 0, 0)$ [kN]

$P_2 = 2$ kN

$\overrightarrow{\boldsymbol{P_2}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$ **[kN]**

Prosta działania siły przez punkty

B (-3 , 0 , 0)

E (-3 , 0 , 5)

$\overrightarrow{EB} = (0, 0, -5)$ [m]

$\left|\overrightarrow{ED}\right| = 5$

$\overrightarrow{e_{P2}} = (0, 0, -1)$

$\overrightarrow{P_2} = P_2 \cdot \overrightarrow{e_{P2}} = (0, 0, -2)$ [kN]

$P_3 = 1$ kN

$\overrightarrow{\boldsymbol{P_3}} = (\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$ **[kN]**

Prosta działania siły przez punkty

O (0 , 0 , 0)

A (0 , 4 , 0)

$\overrightarrow{AO} = (0, -4, 0)$ [m]

$\left|\overrightarrow{AO}\right| = 4$

$\overrightarrow{e_{P3}} = (0, -1, 0)$

$\overrightarrow{P_3} = P_3 \cdot \overrightarrow{e_{P3}} = (0, -1, 0)$ [kN],

Moment względem punktu O:

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = M_x\overrightarrow{e_x} + M_y\overrightarrow{e_y} + M_z\overrightarrow{e_z} = \left(M_x, M_y,\ M_z\right)$$

I sposób:

Moment względem punktu O od siły P_1:

$$\overrightarrow{M_{01}} = \overrightarrow{r_{OD}} \times \overrightarrow{P_1} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 50, 0)$$

Moment względem punktu O od siły P_2:

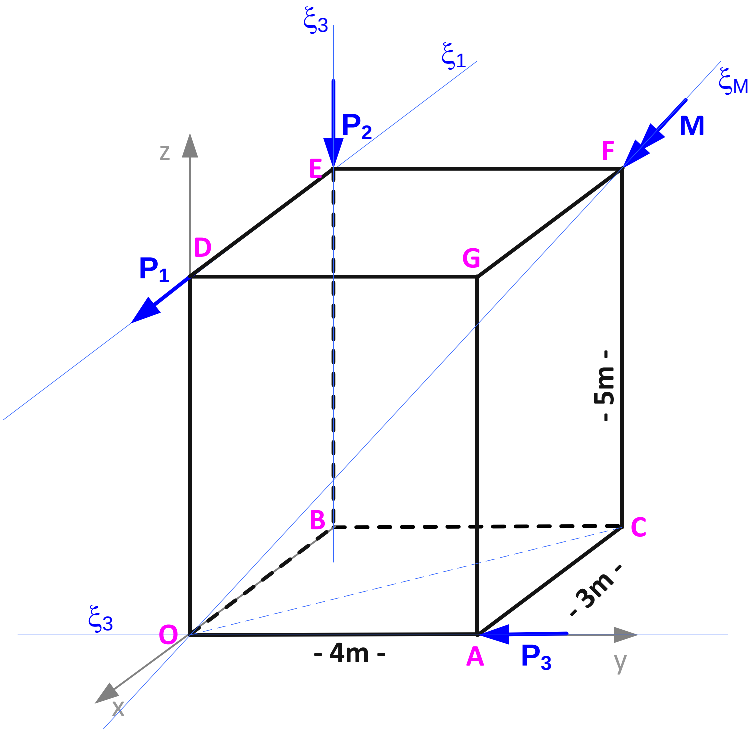
$$\overrightarrow{M_{02}} = \overrightarrow{r_{BO}} \times \overrightarrow{P_2} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, -6, 0)$$

Moment względem punktu O od siły P_3:

$$\overrightarrow{M_{03}} = \overrightarrow{r_{A0}} \times \overrightarrow{P_3} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Prosta działania siły przechodzi przez punkt O, czyli $\overrightarrow{M_{03}} = (0, 0, 0)$

II sposób:



Moment od siły P_1 $\overrightarrow{M_{01}} = (0, 50, 0)$

$M_x = 0$ (siła równoległa do osi *x*)

$M_y = 10 \cdot 5 = 50$

$M_z = 0$ (siła przecina oś *z*)

Moment od siły P_2 $\overrightarrow{M_{02}} = (0, -6, 0)$

$M_x = 0$ (siła przecina oś *x*)

$M_y = -2 \cdot 6 = -6$

$M_z = 0$ (siła równoległa do osi *z*)

Moment od siły P_3 $\overrightarrow{M_{03}} = (0, 0, 0)$

Prosta działania siły przechodzi przez punkt O, czyli $\overrightarrow{M_{03}} = (0, 0, 0)$

Siła ogólna

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = S_x\,\overline{e}_x + S_y\,\overline{e}_y + S_z\,\overline{e}_z$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} \quad ,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} \quad ,$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}$$

Moment ogólny

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{P}_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{M}_j = M_x\,\overline{e}_x + M_y\,\overline{e}_y + M_z\,\overline{e}_z$$

$$\overline{r}_i \times \overline{P} = \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ x_{Ai} & y_{Ai} & z_{Ai} \\ P_{ix} & P_{iy} & P_{iz} \end{vmatrix}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{iz}\,y_{Ai} - P_{iy}\,z_{Ai} \right) + \sum_{j=1}^{m} M_{jx}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{ix}\,z_{Ai} - P_{iz}\,x_{Ai} \right) + \sum_{j=1}^{m} M_{jy}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{iy}\,x_{Ai} - P_{ix}\,y_{Ai} \right) + \sum_{j=1}^{m} M_{jz}$$

Wyróżnik przestrzennego układu obciążeń:

$$w = \overline{S} \bullet \overline{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z$$

Wyróżnik jest niezmiennikiem układu, tzn. jego wartość nie zależy od wyboru bieguna redukcji.

Siła ogólna:

$\vec{\boldsymbol{S}} = (\mathbf{10}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$ **[kN]**

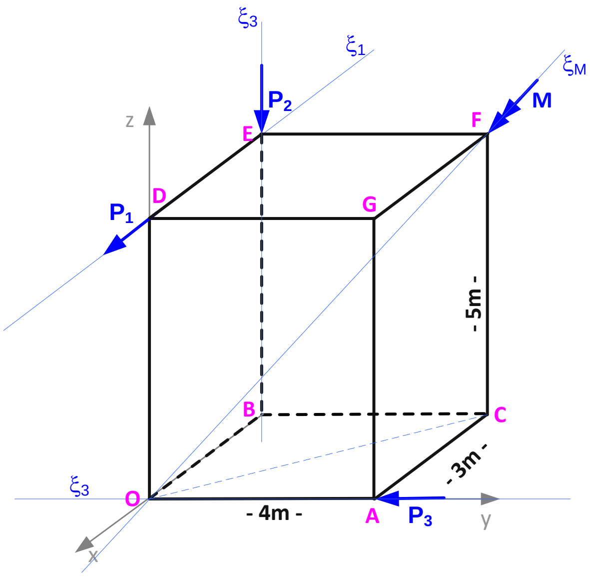
$\overrightarrow{P_1} = (10, 0, 0)$

$\overrightarrow{P_2} = (0, 0, -2)$

$\overrightarrow{P_3} = (0, -1, 0)$

Moment ogólny:

$\overrightarrow{\boldsymbol{M_0}} = (\mathbf{3}, \mathbf{40}, -\mathbf{5})$ **[kNm]**



I sposób:

$$\overrightarrow{M_{01}} = \vec{r} \times \overrightarrow{P_1} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 50, 0)$$

$$\overrightarrow{M_{02}} = \vec{r} \times \overrightarrow{P_2} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, -6, 0)$$

$$\overrightarrow{M_{03}} = \vec{r} \times \overrightarrow{P_3} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

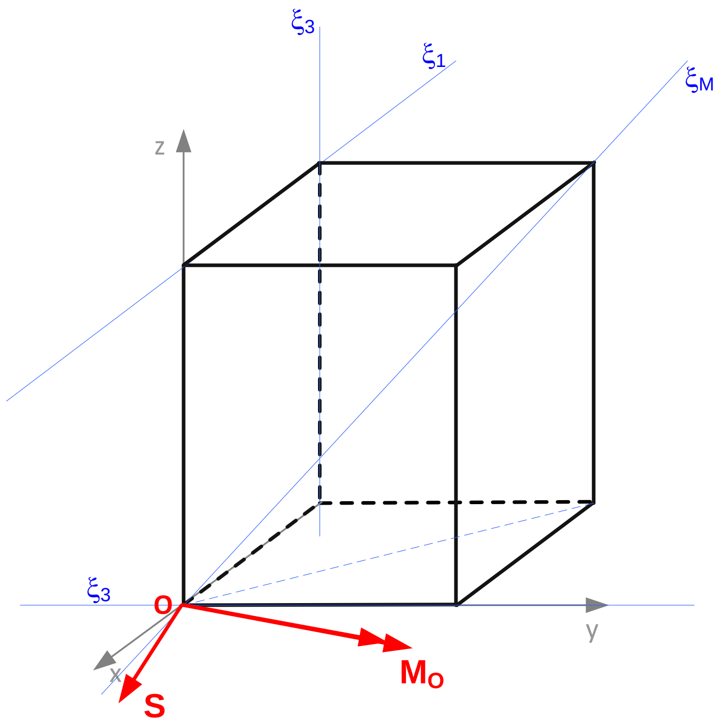
$\vec{M} = (3, -4, -5)$

II sposób:

$M_x = 3$

$M_y = 10 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 4 = 40$

$M_z = -5$



Wyróżnik (niezmiennik układu):

$$w = \vec{S} \cdot \vec{M} = S_x\, M_x + S_y\, M_y + S_z\, M_z = 30 - 40 + 10 = 0$$

istnieje wypadkowa układu

Poszukiwanie wypadkowej:

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & z \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = M_{Ox}\overrightarrow{e_x} + M_{Oy}\overrightarrow{e_y} + M_{Oz}\overrightarrow{e_z}$$

Otrzymuje się nieoznaczony układ równań z niewiadomymi

$$\begin{cases} S_z\, y - S_y\, z = M_x \\ S_x\, z - S_z\, x = M_y \\ S_y\, x - S_x\, y = M_z \end{cases}$$

Jedną z niewiadomych przyjmujemy dowolnie., np.:

jeśli $S_x \neq 0$, to jedno z rozwiązań ma postać: $x = 0,\ \ y = -\frac{M_z}{S_x},\ \ z = \frac{M_y}{S_x}$

jeśli $S_y \neq 0$, to można przyjąć $y = 0$ i rozwiązać układ.

jeśli $S_z \neq 0$, to można przyjąć $z = 0$ i rozwiązać układ.

Jest nieskończenie wiele rozwiązań, bo jest nieskończenie wiele punktów prostej działania wypadkowej (*linii centralnej*).

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & z \\ 10 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\overrightarrow{e_x} + 40\overrightarrow{e_y} - 5\overrightarrow{e_z}$$

$$\begin{cases} -2\, y + \ z = 3 \\ 10\, z + 2\, x = 40 \\ -1\, x - 10\, y = -5 \end{cases}$$

$x = 0,\ \ y = 0{,}5,\ \ z = 4$

$x = 5,\ \ y = 0,\ \ z = 3$

$x = 20,\ \ y = -1{,}5,\ \ z = 0$

Odp.

Wynikiem redukcji jest wypadkowa

$\boldsymbol{\overrightarrow{W} = (10, -1, -2)}$ **[kN]**

przechodząca przez punkt (5, 0, 3).