

Zadanie 5. – rozwiązanie przykładowe

Dla pręta cienkościennego o przekroju i schemacie statycznym pokazanymi na rysunku:

- wyznaczyć charakterystyki geometryczne: I_y , I_z , K_s , I_ω oraz \bar{S}_y , \bar{S}_z , \bar{S}_ω w punkcie **C** przekroju pręta cienkościennego,
- wyznaczyć wartości i sporządzić wykresy sił przekrojowych: M_y , M_z , T_y , T_z , M_s , M_ω i B ,
- w przekroju a-a wyznaczyć wartości naprężeń normalnych σ_x i zilustrować je wykresami oraz naprężenie styczne τ w punkcie **C**; naszkicować rozkład naprężenia τ na grubości ścianki w punkcie **C**.

Dane:

dla przekroju

$$L_1 = 20 \text{ cm}$$

$$L_2 = 30 \text{ cm}$$

$$L_3 = 13 \text{ cm}$$

$$d = 10$$

B – punkt 2

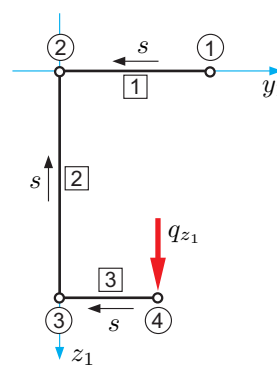
P₀ – punkt 3

C – odcinek 2 ($\xi = 0,30$)

$$P_{y_1} = 0 \quad P_{z_1} = 0$$

$$q_{y_1} = 0 \quad q_{z_1} = 3 \text{ kN/m}$$

obc – punkt 4 (obciążenie przyłożone w punkcie 4)



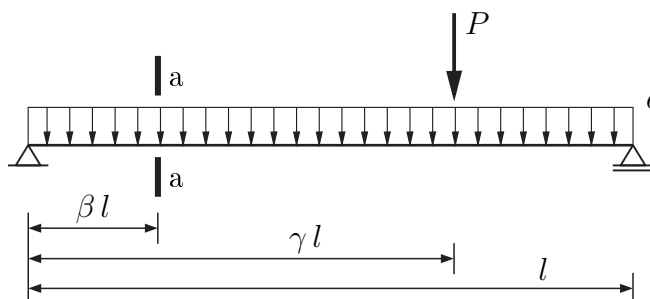
dla belki

schemat statyczny – 1

$$l = 5 \text{ m}$$

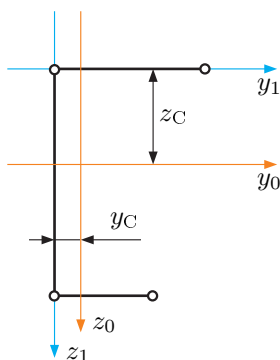
przekrój a-a – $\beta = 0,35$

$$\frac{G}{E} = 0,4$$



1. Charakterystyki geometryczne

1.1. Środek ciężkości



$$\delta_1 = \frac{20}{d} = 2,0 \text{ cm} \quad \delta_2 = 3,0 \text{ cm} \quad \delta_3 = 1,3 \text{ cm}$$

$$A = 20 \cdot 20 + 30 \cdot 30 + 13 \cdot 1,3 = 146,9 \text{ cm}^2$$

$$S_{y_1} = 20 \cdot 2,0 \cdot 0 + 30 \cdot 3,0 \cdot \frac{30}{2} + 13 \cdot 1,3 \cdot 30 = 1857 \text{ cm}^3$$

$$S_{z_1} = 20 \cdot 2,0 \cdot \frac{20}{2} + 30 \cdot 3,0 \cdot 0 + 13 \cdot 1,3 \cdot \frac{13}{2} = 509,9 \text{ cm}^3$$

$$y_c = \frac{509,9}{146,9} = 3,47 \text{ cm}$$

$$z_c = \frac{1857}{146,9} = 12,64 \text{ cm}$$

1.2. Centralne momenty bezwładności

$$I_{y_0} = 20 \cdot 2,0 \cdot (-12,64)^2 + \frac{3,0 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 3,0 \cdot \left(\frac{30}{2} - 12,64\right)^2 + 13 \cdot 1,3 \cdot (30 - 12,64)^2 =$$

$$= 18735 \text{ cm}^4$$

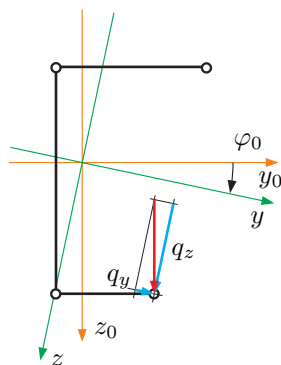
$$I_{z_0} = \frac{2,0 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 2,0 \cdot \left(\frac{20}{2} - 3,47\right)^2 + 30 \cdot 3,0 \cdot (-3,47)^2 + \frac{1,3 \cdot 13^3}{12} +$$

$$+ 13 \cdot 1,3 \cdot \left(\frac{13}{2} - 3,47\right)^2 = 4516 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0 z_0} = 20 \cdot 2,0 \cdot (-12,64) \cdot \left(\frac{20}{2} - 3,47\right) + 30 \cdot 3,0 \cdot \left(\frac{30}{2} - 12,64\right) \cdot (-3,47) +$$

$$+ 13 \cdot 1,3 \cdot (30 - 12,64) \cdot \left(\frac{13}{2} - 3,47\right) = -3150 \text{ cm}^4$$

1.3. Ośie główne



$$\text{tg}(2\varphi_0) = -\frac{2 \cdot (-3150)}{18735 - 4516} = 0,443$$

$$\varphi_0 = 11,95^\circ$$

1.4. Wykresy współrzędnych

$$y^{(1)} = (20 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = 13,55 \text{ cm}$$

$$y^{(2)} = (0 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = -6,01 \text{ cm}$$

$$y^{(3)} = (0 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = 0,20 \text{ cm}$$

$$y^{(4)} = (13 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = 12,92 \text{ cm}$$

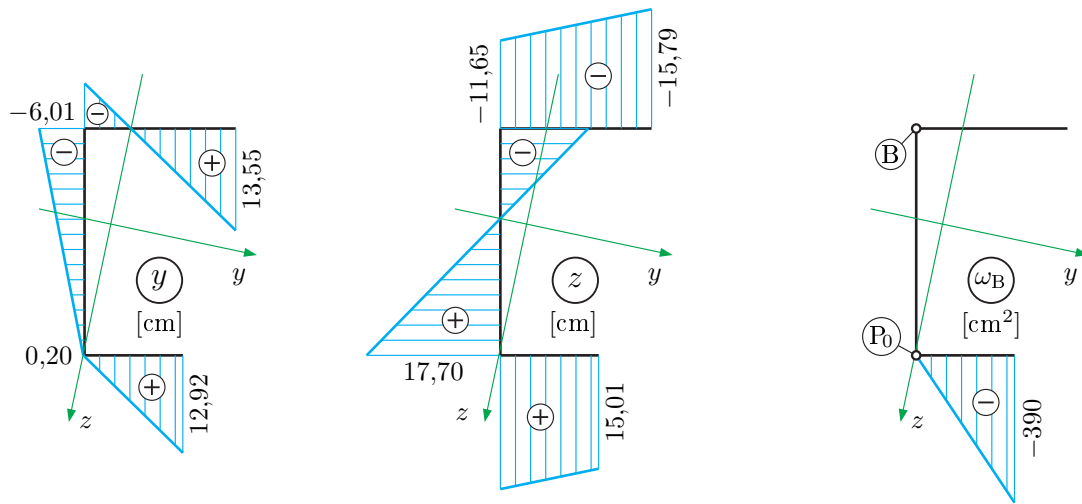
$$z^{(1)} = -(20 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = -15,79 \text{ cm}$$

$$z^{(2)} = -(0 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = -11,65 \text{ cm}$$

$$z^{(3)} = -(0 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = 17,70 \text{ cm}$$

$$z^{(4)} = -(13 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = 15,01 \text{ cm}$$

$$\omega_B^{(1)} = 0 \quad \omega_B^{(2)} = 0 \quad \omega_B^{(3)} = 0 \quad \omega_B^{(4)} = -30 \cdot 13 = -390 \text{ cm}^2$$



1.5. Momenty bezwładności

Ponieważ odcinki konturu są ukośne w stosunku do osi układu współrzędnych do wyznaczenia momentów I_y i I_z zastosowano wzory trapezów.

$$I_y = \frac{20}{6} \left[2 \cdot ((-15,79)^2 + (-11,65)^2) + 2 \cdot (-15,79) \cdot (-11,65) \right] \cdot 2,0 +$$

$$+ \frac{30}{6} \left[2 \cdot ((-11,65)^2 + (17,70)^2) + 2 \cdot (-11,65) \cdot (17,70) \right] \cdot 3,0 +$$

$$+ \frac{13}{6} \left[2 \cdot ((17,70)^2 + (15,01)^2) + 2 \cdot (17,70) \cdot (15,01) \right] \cdot 1,3 = 19\,402 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{20}{6} \left[2 \cdot ((13,55)^2 + (-6,01)^2) + 2 \cdot (13,55) \cdot (-6,01) \right] \cdot 2,0 +$$

$$+ \frac{30}{6} \left[2 \cdot ((-6,01)^2 + (0,20)^2) + 2 \cdot (-6,01) \cdot (0,20) \right] \cdot 3,0 +$$

$$+ \frac{13}{6} \left[2 \cdot ((0,20)^2 + (12,92)^2) + 2 \cdot (0,20) \cdot (12,92) \right] \cdot 1,3 = 3\,849 \text{ cm}^4$$

$$K_s = \frac{1}{3} \sum_i l_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} (20 \cdot 2,0^3 + 30 \cdot 3,0^3 + 13 \cdot 1,3^3) = 332,9 \text{ cm}^4$$

$$I_{\omega_{By}} = \frac{13}{6} \left[2 \cdot 12,92 \cdot (-390) + 0,20 \cdot (-390) \right] \cdot 1,3 = -28\,594 \text{ cm}^5$$

$$I_{\omega_{Bz}} = \frac{13}{6} \left[2 \cdot 15,01 \cdot (-390) + 17,70 \cdot (-390) \right] \cdot 1,3 = -52\,422 \text{ cm}^5$$

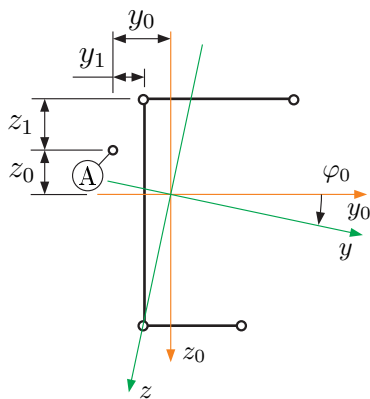
1.6. Główny biegun wycinkowy

$$y_A = -6,01 + \frac{-52\,422}{19\,402} = -6,01 - 2,70 = -8,71 \text{ cm}$$

$$z_A = -11,65 - \frac{-28\,594}{3\,849} = -11,65 + 7,43 = -4,22 \text{ cm}$$

1.7. Główna współrzędna wycinkowa

1.7.1. Współrzędne głównego bieguna wycinkowego w układzie osi środkowych



$$y_0 = y_A \cdot \cos(-\varphi) + z_A \cdot \sin(-\varphi) =$$

$$= -8,71 \cdot \cos(-11,95^\circ) + (-4,22) \cdot \sin(-11,95^\circ) =$$

$$= -7,651 \text{ cm}$$

$$z_0 = -y_A \cdot \sin(-\varphi) + z_A \cdot \cos(-\varphi) =$$

$$= -(-8,71) \cdot \sin(-11,95^\circ) + (-4,22) \cdot \cos(-11,95^\circ) =$$

$$= -5,932 \text{ cm}$$

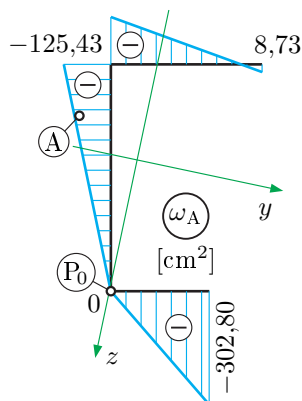
1.7.2. Współrzędne głównego bieguna wycinkowego w układzie osi początkowych

$$y_1 = y_0 + y_C = -7,651 + 3,47 = -4,181 \text{ cm}$$

$$z_1 = z_0 + z_C = -5,932 + 12,64 = 6,708 \text{ cm}$$

1.7.3. Współrzędna ω_A

Współrzędna wyznaczana względem początku zliczania P_0 podanego w danych do zadania.



$$\omega_A^{(3)} = 0$$

$$\omega_A^{(2)} = \omega_A^{(3)} - |y_1| \cdot L_2 = 0 - |-4,18| \cdot 30 =$$

$$= -125,43 \text{ cm}^2$$

$$\omega_A^{(1)} = \omega_A^{(2)} + z_1 \cdot L_1 = -125,43 + 6,708 \cdot 20 =$$

$$= -125,43 + 134,16 = 8,73 \text{ cm}^2$$

$$\omega_A^{(4)} = \omega_A^{(3)} - (L_2 - z_1) \cdot L_3 = 0 - (30 - 6,708) \cdot 13 =$$

$$= -302,80 \text{ cm}^2$$

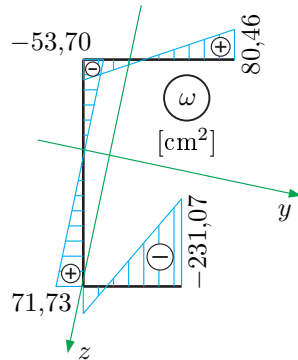
1.7.4. Moment statyczny współrzędnej ω_A

$$S_{\omega_A} = \frac{8,73 - 125,43}{2} \cdot 20 \cdot 2,0 + \frac{-125,43 + 0}{2} \cdot 30 \cdot 3,0 + \frac{0 - 302,80}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 =$$

$$= -10\,537 \text{ cm}^4$$

1.7.5. Współrzędna ω

Współrzędna wyznaczana względem głównego początku zliczania.



$$\omega_A(P_{gł}) = \frac{S_{\omega_A}}{A} = \frac{-10\,537}{146,9} = -71,73 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(i)} = \omega_A^{(i)} - \omega_A(P_{gł})$$

$$\omega^{(1)} = 8,73 + 71,73 = 80,46 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(2)} = -125,43 + 71,73 = -53,70 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(3)} = 0 + 71,73 = 71,73 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(4)} = -302,80 + 71,73 = -231,07 \text{ cm}^2$$

1.8. Główny wycinkowy moment bezwładności

$$I_\omega = \frac{20}{6} \left[2 \cdot (80,46^2 + (-53,70)^2) + 2 \cdot 80,46 \cdot (-53,70) \right] \cdot 2,0 +$$

$$+ \frac{30}{6} \left[2 \cdot ((-53,70)^2 + 71,73^2) + 2 \cdot (-53,70) \cdot 71,73 \right] \cdot 3,0 +$$

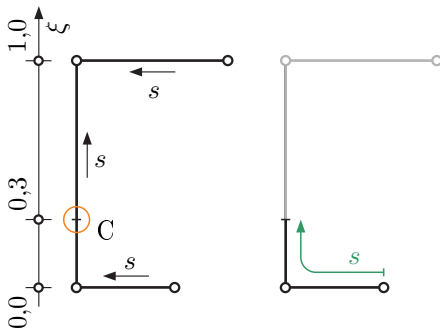
$$+ \frac{13}{6} \left[2 \cdot (71,73^2 + (-231,07)^2) + 2 \cdot 71,73 \cdot (-231,07) \right] \cdot 1,3 = 428\,855 \text{ cm}^6$$

1.9. Współczynnik giętno-skrętny

$$\alpha = \sqrt{\frac{GK_s}{EI_\omega}} = \sqrt{0,4 \cdot \frac{332,9 \text{ cm}^4}{428\,855 \text{ cm}^6}} = 0,01761 \frac{1}{\text{cm}} = 1,761 \frac{1}{\text{m}}$$

1.10. Momenty statyczne odciętej części przekroju w punkcie C

Wyznaczanie momentów statycznych odciętej części przekroju dla poszczególnych współrzędnych należy rozpocząć od ustalenia, która część przekroju jest „odciętą częścią przekroju”. Zależy to od przebiegu lokalnej współrzędnej s na poszczególnych odcinkach konturu, co, dla analizowanego przekroju, pokazano na poniższym rysunku.



$$y_{(\text{odcinek 2; } \xi=0,3)} = 0,20 + 0,3 \cdot (-6,01 - 0,20) = -1,66 \text{ cm}$$

$$z_{(\text{odcinek 2; } \xi=0,3)} = 17,70 + 0,3 \cdot (-11,65 - 17,70) = 8,90 \text{ cm}$$

$$\omega_{(\text{odcinek 2; } \xi=0,3)} = 71,73 + 0,3 \cdot (-53,70 - 71,73) = 34,10 \text{ cm}^2$$

$$\bar{S}_y(C) = \frac{15,01 + 17,70}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 + \frac{17,70 + 8,90}{2} \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 3,0 = 635,50 \text{ cm}^3$$

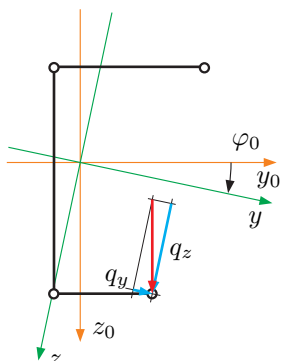
$$\bar{S}_z(C) = \frac{12,92 + 0,20}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 + \frac{0,20 - 1,66}{2} \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 3,0 = 91,15 \text{ cm}^3$$

$$\bar{S}_\omega(C) = \frac{-231,07 + 71,73}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 + \frac{71,73 + 34,10}{2} \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 3,0 = 82,28 \text{ cm}^4$$

2. Siły wewnętrzne

2.1. Pochodzące od zginania: siły tnące i momenty zginające

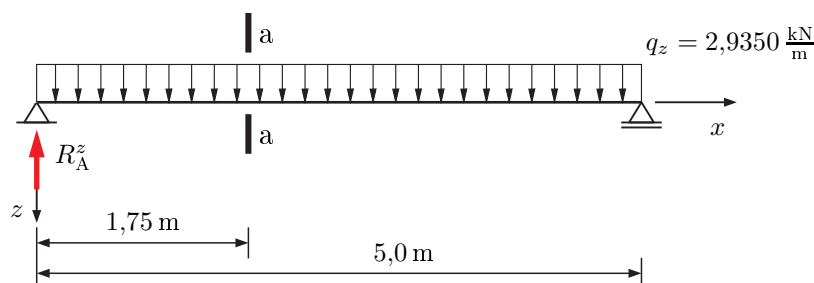
2.1.1. Obciążenie wywołujące zginanie belki



$$q_y = q \cdot \sin \varphi_0 = 3 \cdot \sin(11,95^\circ) = 3 \cdot 0,2071 = 0,6212 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$q_z = q \cdot \cos \varphi_0 = 3 \cdot \cos(11,95^\circ) = 3 \cdot 0,9783 = 2,9350 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

2.1.2. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie OXZ

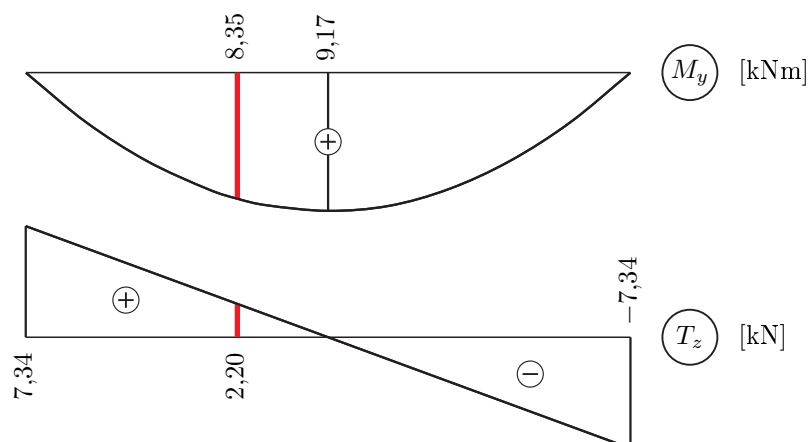


$$R_A^z = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q_z = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 2,9350 = 7,3375 \text{ kN}$$

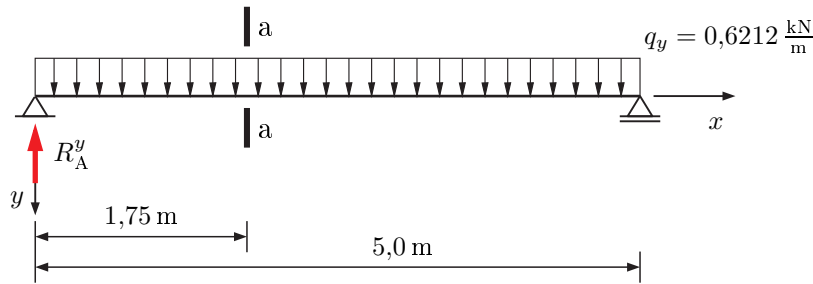
$$M_y \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{q_z \cdot l^2}{8} = \frac{2,9350 \cdot 5^2}{8} = 9,17 \text{ kNm}$$

$$M_y(\beta l) = R_A^z \cdot \beta l - q_z \cdot \frac{(\beta l)^2}{2} = 7,3375 \cdot 1,75 - 2,9350 \cdot \frac{(1,75)^2}{2} = 8,35 \text{ kNm}$$

$$T_z(\beta l) = R_A^z - q_z \cdot (\beta l) = 7,3375 - 2,9350 \cdot 1,75 = 2,20 \text{ kN}$$



2.1.3. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie OXY

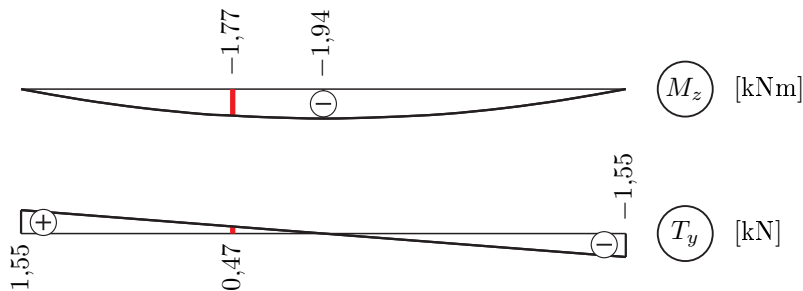


$$R_A^y = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q_y = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 0,6212 = 1,553 \text{ kN}$$

$$M_z \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{q_y \cdot l^2}{8} = -\frac{0,6212 \cdot 5^2}{8} = -1,94 \text{ kNm}$$

$$M_z(\beta l) = -R_A^y \cdot \beta l + q_y \cdot \frac{(\beta l)^2}{2} = -1,553 \cdot 1,75 + 0,6212 \cdot \frac{(1,75)^2}{2} = -1,77 \text{ kNm}$$

$$T_y(\beta l) = R_A^y - q_y \cdot (\beta l) = 1,553 - 0,6212 \cdot 1,75 = 0,47 \text{ kN}$$



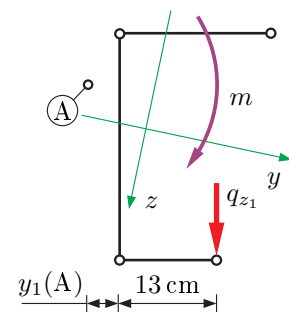
2.2. Siły pochodzące od skręcania pręta cienkościennego: B , M_ω , M_s

2.2.1. Obciążenie skręcające pręt cienkościenny

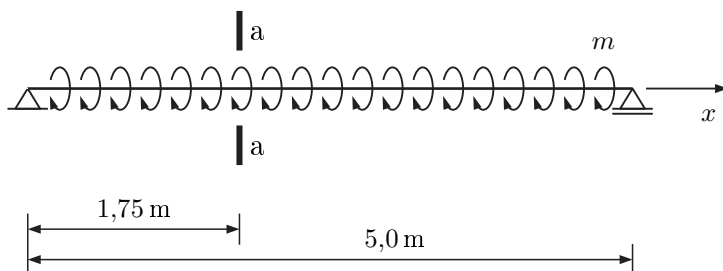
Analizowana belka jest skręcana rozłożonym momentem skręcającym m wynikającym z faktu, iż płaszczyzna obciążenia (q_{z1}) nie przechodzi przez główny biegunek wycinkowy A.

Moment działa zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zatem zwrot jego wektora jest zgodny z osią $x \rightarrow$ moment dodatni.

$$m = q_{z1} \cdot (L_3 + |y_1(A)|) = 3 \cdot (0,13 + 0,04181) = 0,515 \text{ kNm/m}$$



Otrzymujemy belkę skręcaną:



W niektórych projektach występuje obciążenie siłą skupioną. Siła ta działając na ramieniu względem bieguna A daje nam moment skupiony M skręcający pręt cienkościenny. Wartość

momentu skupionego wyznaczamy analogicznie do momentu m mnożąc siłę P przez odległość bieguna A od linii działania tej siły.

2.2.2. Równanie różniczkowe skręcanego pręta cienkościennego – wartości sił wewnętrznych

W wyniku rozwiązania równania różniczkowego skręcanego pręta cienkościennego:

$$\theta^{\text{IV}}(x) - \alpha^2 \theta^{\text{II}}(x) = \frac{m(x)}{E I_\omega}$$

otrzymujemy funkcję kąta skręcenia $\theta(x)$, co pozwala nam wyznaczyć siły wewnętrzne w skręcanym pręcie cienkościennym:

$$M_S(x) = G K_s \theta'(x) \quad \text{moment czystego skręcania}$$

$$B(x) = -E I_\omega \theta''(x) \quad \text{bimoment}$$

$$M_\omega(x) = -E I_\omega \theta'''(x) \quad \text{moment giętno-skrętny}$$

dla schematu statycznego rozwiązywanej belki otrzymujemy:

$$M_S = \frac{m}{\alpha} \left[\alpha \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{\sinh \left(\alpha \left(\frac{l}{2} - x \right) \right)}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$B = \frac{m}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\cosh \left(\alpha \left(\frac{l}{2} - x \right) \right)}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$M_\omega = \frac{m}{\alpha} \cdot \frac{\sinh \left(\alpha \left(\frac{l}{2} - x \right) \right)}{\cosh \frac{\alpha l}{2}}$$

$$\alpha = 1,761 \frac{1}{\text{m}} \quad l = 5 \text{ m} \quad m = 0,515 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Dla skontrolovania poprawności wyznaczenia momentów skręcających M_S i M_ω możemy wyznaczyć (i narysować wykres) całkowity moment skręcający M_x .

$$M_x = M_S + M_\omega$$

Wartości sił wewnętrznych:

dla $x = 0 \text{ m}$

$$M_S = \frac{0,515 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}}{1,761 \frac{1}{\text{m}}} \left[1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 0 \right) - \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 0 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0,9951 \text{ kNm}$$

$$B = \frac{0,515 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}}{1,761^2 \frac{1}{\text{m}^2}} \left[1 - \frac{\cosh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 0 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0 \text{ kNm}^2$$

$$M_\omega = \frac{0,515 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}}{1,761 \frac{1}{\text{m}}} \cdot \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 0 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} = 0,2924 \text{ kNm}$$

dla $x = \beta l = 0,35 \cdot 5 = 1,75$ m

$$M_S = \frac{0,515}{1,761} \left[1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 1,75 \right) - \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 1,75 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0,3738 \text{ kNm}$$

$$B = \frac{0,515}{1,761^2} \left[1 - \frac{\cosh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 1,75 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0,1579 \text{ kNm}^2$$

$$M_\omega = \frac{0,515}{1,761} \cdot \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 1,75 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} = 0,0125 \text{ kNm}$$

dla $x = \frac{1}{2} l = 2,5$ m

$$M_S = \frac{0,515}{1,761} \left[1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 2,5 \right) - \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 2,5 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0 \text{ kNm}$$

$$B = \frac{0,515}{1,761^2} \left[1 - \frac{\cosh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 2,5 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0,1620 \text{ kNm}^2$$

$$M_\omega = \frac{0,515}{1,761} \cdot \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 2,5 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} = 0 \text{ kNm}$$

dla $x = l = 5$ m

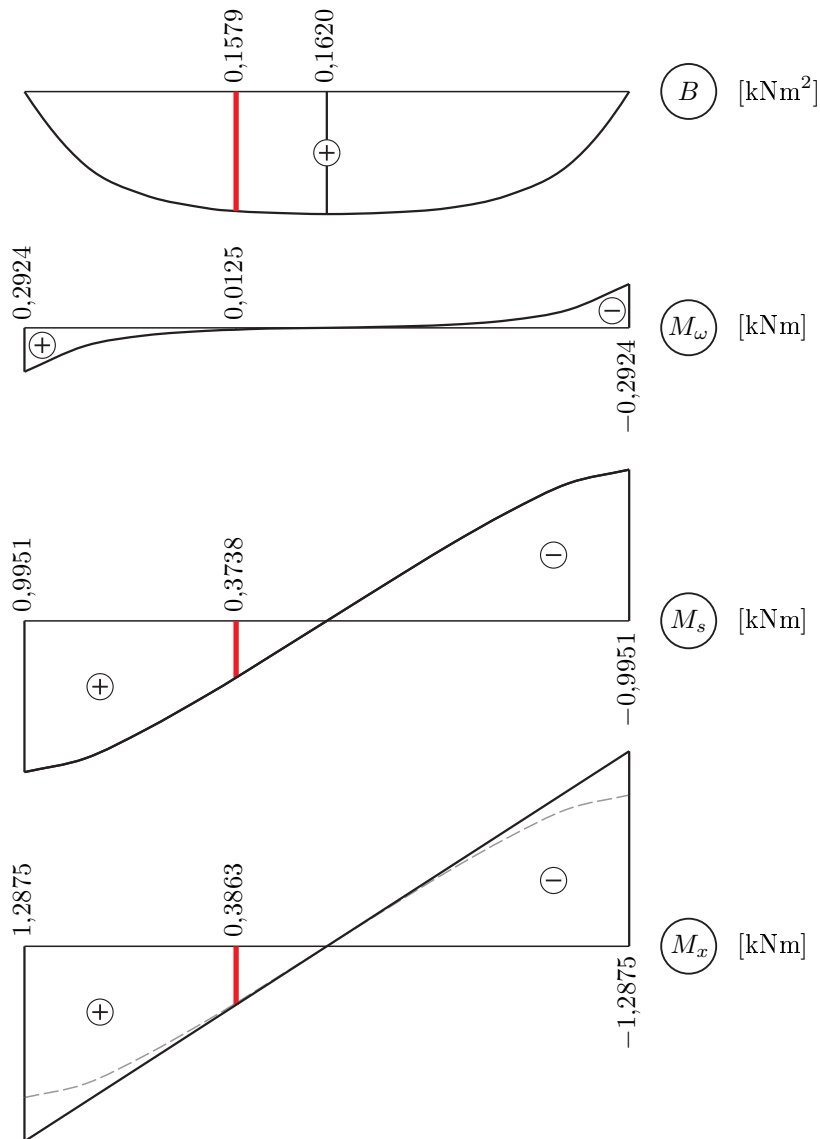
$$M_S = \frac{0,515}{1,761} \left[1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 5 \right) - \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 5 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = -0,9951 \text{ kNm}$$

$$B = \frac{0,515}{1,761^2} \left[1 - \frac{\cosh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 5 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} \right] = 0 \text{ kNm}^2$$

$$M_\omega = \frac{0,515}{1,761} \cdot \frac{\sinh \left(1,761 \cdot \left(\frac{5}{2} - 5 \right) \right)}{\cosh \frac{1,761 \cdot 5}{2}} = -0,2924 \text{ kNm}$$

x	B	M_S	M_ω	M_x
0,0 l	0,0	0,9951	0,2924	1,2875
0,1 l	0,0972	0,9089	0,1211	1,0300
0,2 l	0,1374	0,7225	0,0500	0,7725
0,3 l	0,1539	0,4949	0,0202	0,5150
0,35 l	0,1579	0,3738	0,0125	0,3863
0,4 l	0,1603	0,2503	0,0072	0,2575
0,5 l	0,1620	0,0	0,0	0,0
0,6 l	0,1603	-0,2503	-0,0072	-0,2575
0,7 l	0,1539	-0,4949	-0,0202	-0,5150
0,8 l	0,1374	-0,7225	-0,0500	-0,7725
0,9 l	0,0972	-0,9089	-0,1211	-1,0300
1,0 l	0,0	-0,9951	-0,2924	-1,2875

2.2.3. Wykresy sił wewnętrznych w skręcanym pręcie cienkościennym



3. Naprężenia

3.1. Naprężenia normalne w przekroju a-a

$$\sigma_x^{(i)} = \underbrace{\frac{M_y}{I_y} \cdot z^{(i)} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y^{(i)}}_{\sigma_M} + \underbrace{\frac{B}{I_\omega} \cdot \omega^{(i)}}_{\sigma_\omega}$$

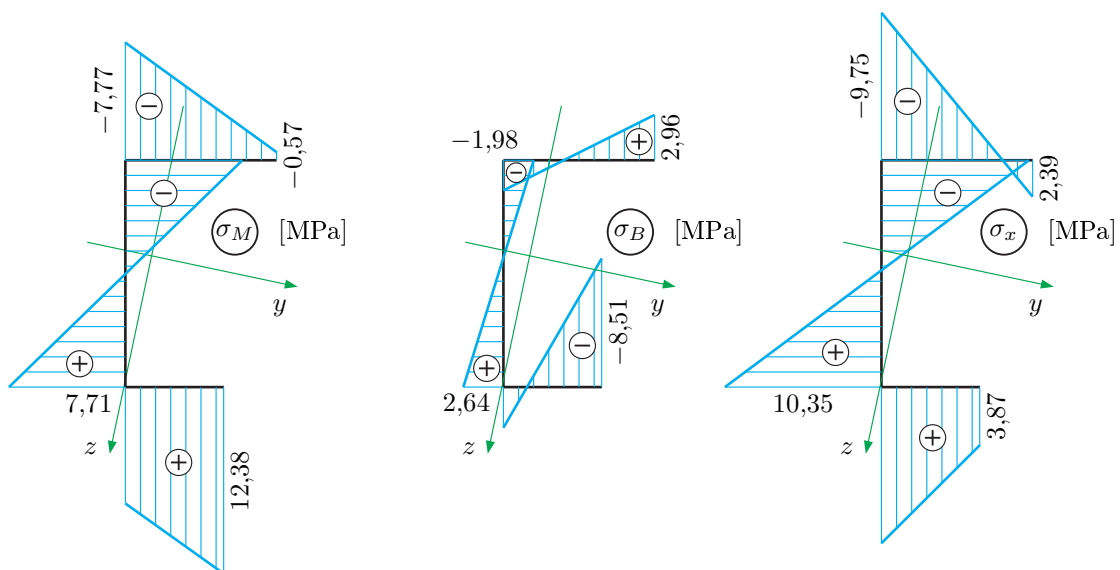
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}}{19402 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \cdot (-15,79) \cdot 10^{-2} \text{ m} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}}{3849 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \cdot (13,55) \cdot 10^{-2} \text{ m} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3} \text{ MNm}^2}{428855 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6} \cdot (80,46) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = -0,57 + 2,96 = 2,39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19402 \cdot 10^{-8}} \cdot (-11,65) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3849 \cdot 10^{-8}} \cdot (-6,01) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428855 \cdot 10^{-12}} \cdot (-53,70) \cdot 10^{-4} = -7,77 - 1,98 = -9,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(3)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19402 \cdot 10^{-8}} \cdot (17,70) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3849 \cdot 10^{-8}} \cdot (0,20) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428855 \cdot 10^{-12}} \cdot (71,73) \cdot 10^{-4} = 7,71 + 2,64 = 10,35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(4)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19401 \cdot 10^{-8}} \cdot (15,01) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3849 \cdot 10^{-8}} \cdot (12,92) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428854 \cdot 10^{-12}} \cdot (-231,07) \cdot 10^{-4} = 12,38 - 8,51 = 3,87 \text{ MPa}$$

punkt	$y^{(i)}$	$z^{(i)}$	$\omega^{(i)}$	$\sigma_M^{(i)}$	$\sigma_\omega^{(i)}$	$\sigma_x^{(i)}$
(1)	13,55	-15,79	80,46	-0,57	2,96	2,39
(2)	-6,01	-11,65	-53,70	-7,77	-1,98	-9,75
(3)	0,20	17,70	71,73	7,71	2,64	10,35
(4)	12,92	15,01	-231,07	12,38	-8,51	3,87



3.2. Naprężenia styczne w punkcie C

$$\tau_S = \frac{M_S}{K_S} \cdot \delta = \frac{0,3738 \text{ kNm}}{332,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \cdot 0,03 \text{ m} = 3\,369 \text{ kPa} = 3,37 \text{ MPa}$$

$$\tau_{M+\omega} = - \left[\frac{T_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot \delta} + \frac{T_y \cdot \bar{S}_z}{I_z \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot \bar{S}_\omega}{I_\omega \cdot \delta} \right] =$$

$$= - \left[\frac{2,20 \text{ kN} \cdot 635,50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{19\,402 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot 0,03 \text{ m}} + \frac{0,47 \text{ kN} \cdot 91,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{3\,849 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot 0,03 \text{ m}} + \frac{0,0124 \text{ kNm} \cdot 82,28 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4}{428\,855 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6 \cdot 0,03 \text{ m}} \right] =$$

$$= - [284,1 + 34,7 + 0,8] = -319,6 \text{ kPa} = -0,32 \text{ MPa}$$

