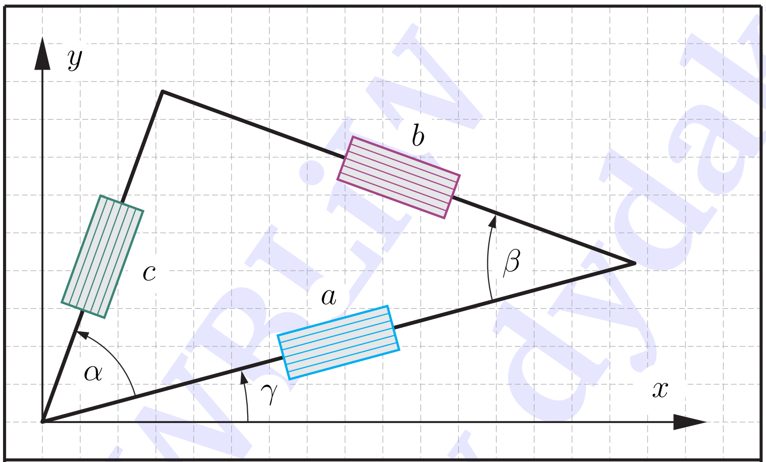
Zadanie 4. – rozwiązanie przykładowe

W wyniku pomiarów przeprowadzonych przy użyciu rozety tensometrycznej, uzyskano wartości odkształceń ε_a, ε_b oraz ε_c na kierunkach określonych osiami tensometrów. Wykorzystując wyniki tych pomiarów oraz podane stałe materiałowe E i ν wyznaczyć:

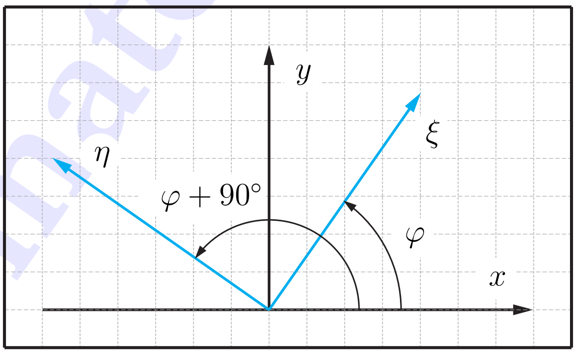
- składowe stanu odkształcenia ε_x, ε_y i γ_{xy} oraz naprężenia σ_x, σ_y i τ_{xy},
- kierunki główne stanu odkształcenia i wartości odkształceń głównych ε_1, ε_2.

Rozeta tensometryczna



$\alpha = 40°$; $\beta = 40°$; $\gamma = 0°$;
$\varepsilon_a = 1100 \cdot 10^{-6}$; $\varepsilon_b = 1500 \cdot 10^{-6}$; $\varepsilon_c = -40 \cdot 10^{-6}$;
$E = 70\,\mathrm{GPa}$; $\nu = 0{,}33$;

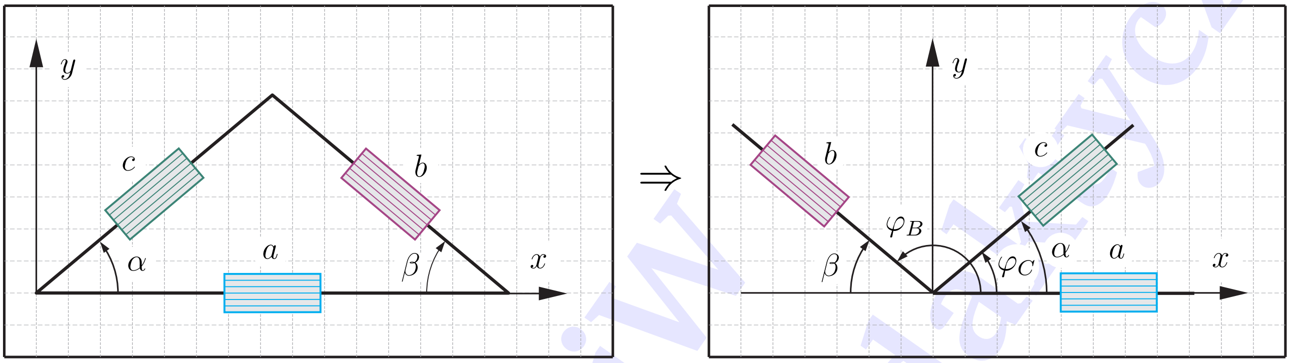
Wzory transformacyjne przy obrocie układu współrzędnych o kąt φ:



$$\begin{cases} \varepsilon_\xi = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \\ \varepsilon_\eta = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \\ \gamma_{\xi\eta} = \gamma_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Położenia osi tensometrów a, b oraz c można przedstawić jako osie powstałe w efekcie obrotów osi x układu współrzędnych odpowiednio o kąty $\varphi_a = \gamma = 0°$, $\varphi_b = 180° - \beta + \gamma = 140°$ i $\varphi_c = \gamma + \alpha = 40°$:



Wyznaczone na drodze eksperymentu wielkości ε_a, ε_b oraz ε_c można traktować jako składowe stanu odkształcenia określone w układach obróconych względem osi układu OXY. Muszą one więc spełniać następujące równania, zapisane zgodnie z wzorami transformacyjnymi:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cdot\cos(2\varphi_a) + \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot\sin(2\varphi_a) \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cdot\cos(2\varphi_b) + \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot\sin(2\varphi_b) \\ \varepsilon_c = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cdot\cos(2\varphi_c) + \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot\sin(2\varphi_c) \end{cases}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych sin i cos dla kątów $2\varphi_a = 0°$, $2\varphi_c = 80°$ i $2\varphi_b = 280°$:

$$\sin(0°) = 0 \qquad \sin(80°) = 0{,}9848 \qquad \sin(280°) = -0{,}9848$$
$$\cos(0°) = 1 \qquad \cos(80°) = 0{,}1736 \qquad \cos(280°) = 0{,}1736$$

Po podstawieniu:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot 0 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cdot 0{,}1736 + \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot(-0{,}9848) \\ \varepsilon_c = \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cdot 0{,}1736 + \frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot 0{,}9848 \end{cases}$$

Po uwzględnieniu, że $\varepsilon_a = \varepsilon_x$

$$\begin{cases} \varepsilon_b = 0{,}5868\cdot\varepsilon_a + 0{,}4132\cdot\varepsilon_y - 0{,}4924\cdot\gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = 0{,}5868\cdot\varepsilon_a + 0{,}4132\cdot\varepsilon_y + 0{,}4924\cdot\gamma_{xy} \end{cases}$$

Dodając równania stronami obliczymy

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c = 1{,}1736\cdot\varepsilon_a + 0{,}8264\cdot\varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_b+\varepsilon_c-1{,}1736\cdot\varepsilon_a}{0{,}8264} = 204{,}5\cdot 10^{-6}$$

a po odjęciu stronami otrzymamy

$$\varepsilon_b - \varepsilon_c = -0{,}9848 \cdot \gamma_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{0{,}9848} = -1563{,}8 \cdot 10^{-6}$$

Ostatecznie wartości odkształceń ε_x, ε_y oraz γ_{xy}:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 1100 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_y = 204{,}5 \cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} = -1563{,}8 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

Wyznaczenie kierunków odkształceń głównych:

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{-1563{,}8 \cdot 10^{-6}}{(1100 - 204{,}5) \cdot 10^{-6}}$$

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = -1{,}746 \ \Rightarrow \ \varphi_0 = -30{,}1^\circ$$

Wyznaczenie wartości odkształceń głównych:

$$\varepsilon_{1,2} = \tfrac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \tfrac{1}{2} \cdot (1100 + 204{,}5) \cdot 10^{-6} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[(1100 - 204{,}5) \cdot 10^{-6}]^2 + (-1563{,}8 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 652{,}3 \cdot 10^{-6} \pm 900{,}9 \cdot 10^{-6} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \varepsilon_1 = 1553 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = -249 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

Wyznaczenie wartości naprężeń σ_x, σ_y oraz $\tau_x y$:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{1 - 0{,}33^2} \cdot (1100 + 0{,}33 \cdot 204{,}5) \cdot 10^{-6} = 91{,}7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{1 - 0{,}33^2} \cdot (204{,}5 + 0{,}33 \cdot 1100) \cdot 10^{-6} = 44{,}6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{2 \cdot (1 + 0{,}33)} \cdot (-1563{,}8) \cdot 10^{-6} = -41{,}2 \text{ MPa}$$