

Plan ćwiczeń

Ćwiczenia 1

- Zapis wskaźnikowy

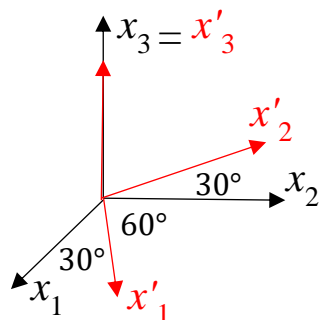
Przykład Iloczyn skalarny dowolnych wektorów

Ćwiczenia 2

- Transformacja współrzędnych tensora naprężenia

Przykład Dane są składowe σ w układzie $\{x_i\}$. Wyznaczyć składowe tego samego tensora σ' wyrażone w układzie $\{x'_i\}$.

$\{x_i\} \xrightarrow{\text{obrót o } 30^\circ \text{ wokół osi } x_3} \{x'_i\}$.



$$\sigma = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 11.25 & -6.49 & 0 \\ -6.49 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Naprężenia główne i kierunki główne

Przykład Pokazać, że: $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = \sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 + II_\sigma \sigma - III_\sigma$

Przykład Wyznaczyć naprężenia i kierunki główne

$$\sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = 4 \geq \sigma_2 = 1 \geq \sigma_3 = -2$$

$$\mathbf{n}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Przykład Ze wzorów transformacyjnych wyznaczyć naprężenie główne σ_1 dla danych z poprzedniego przykładu

$$\sigma_1 = (\mathbf{n}^1)^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^1 = 4$$

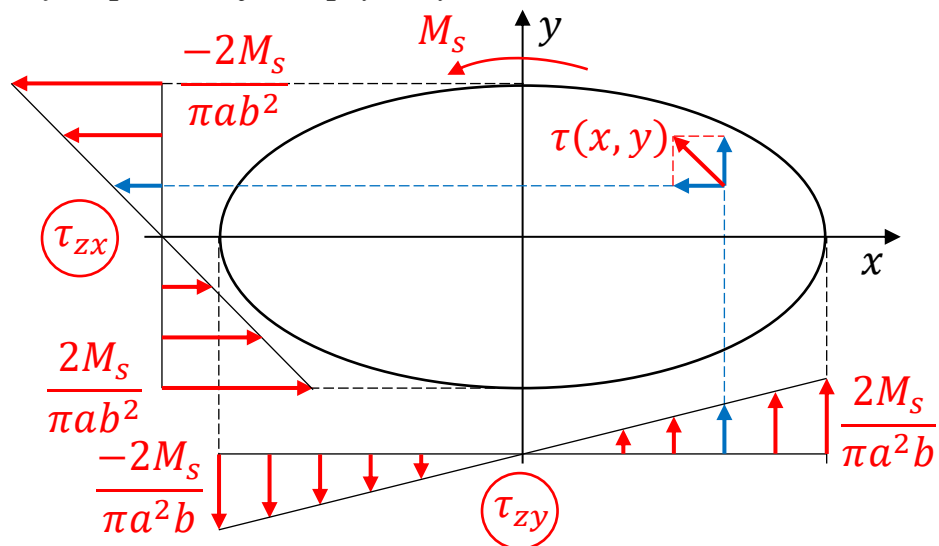
Ćwiczenia 3

- Teoria de Saint-Venanta – skręcanie prętów o dowolnym przekroju jako przykład wykorzystania ogólnych związków liniowej teorii sprężystości

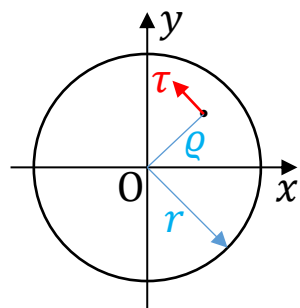
Ćwiczenia 4

- Teoria de Saint-Venanta – przykłady

Przykład Pręt o przekroju eliptycznym



Przykład Przekrój kołowy

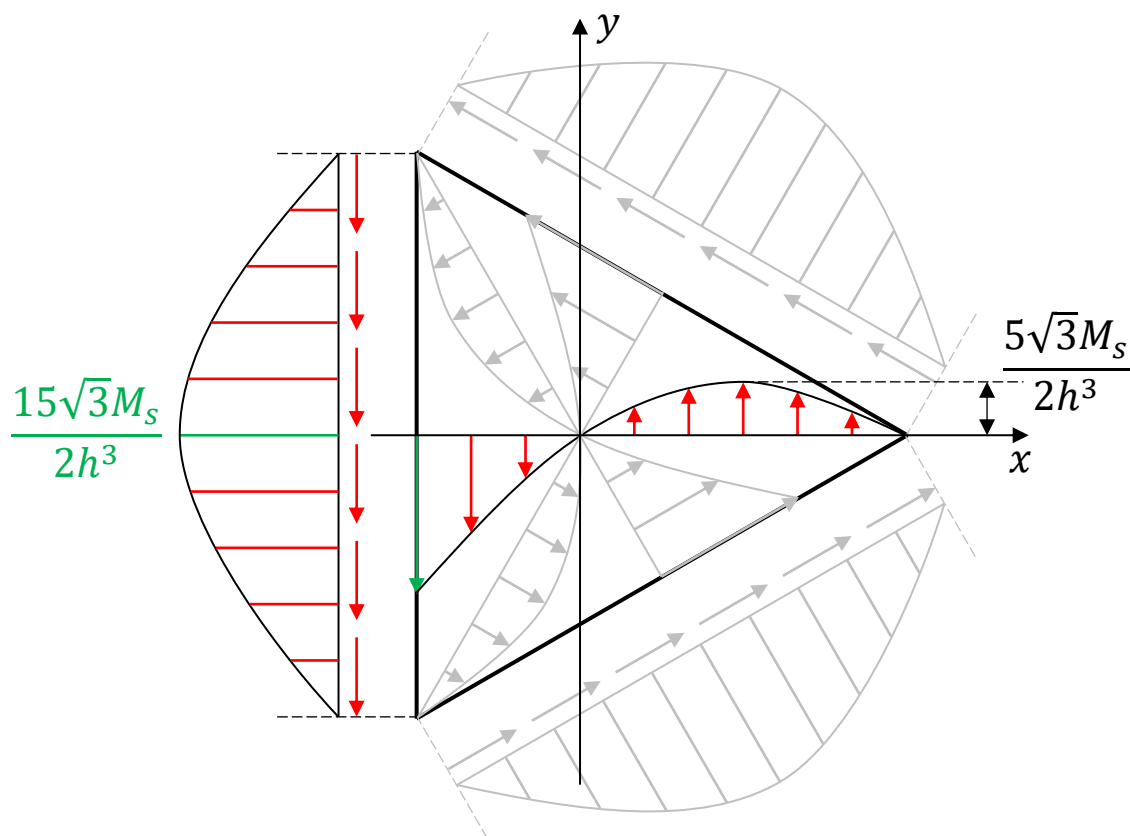


$$\gamma = \frac{M_s}{GI_0}$$

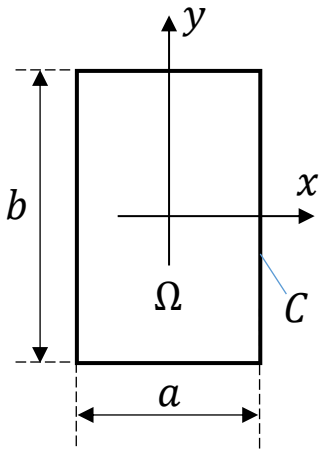
$$\tau(x, y) = \tau(\rho) = \frac{M_s \rho}{I_0}$$

$$w(x, y) = 0$$

Przykład Przekrój w kształcie trójkąta równobocznego



Przykład Przekrój prostokątny



$$\tau_{xz} = \frac{-G\gamma a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{a} \sinh \frac{(2n+1)\pi y}{a}$$

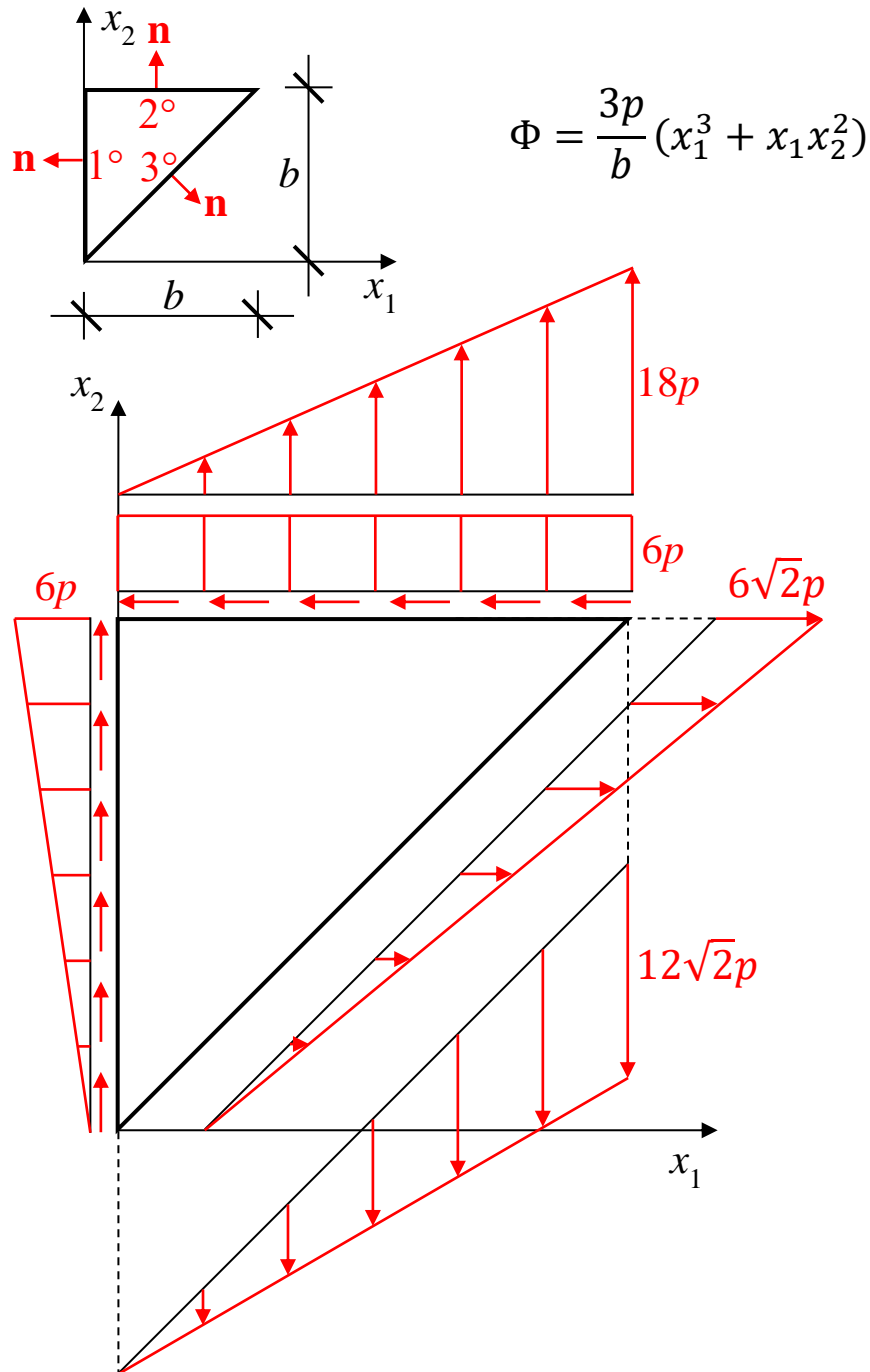
$$\tau_{yz} = G\gamma \left(2x - \frac{a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \cosh \frac{(2n+1)\pi y}{a} \right)$$

$$A_n = \frac{(-1)^n 8}{(2n+1)\pi \cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}$$

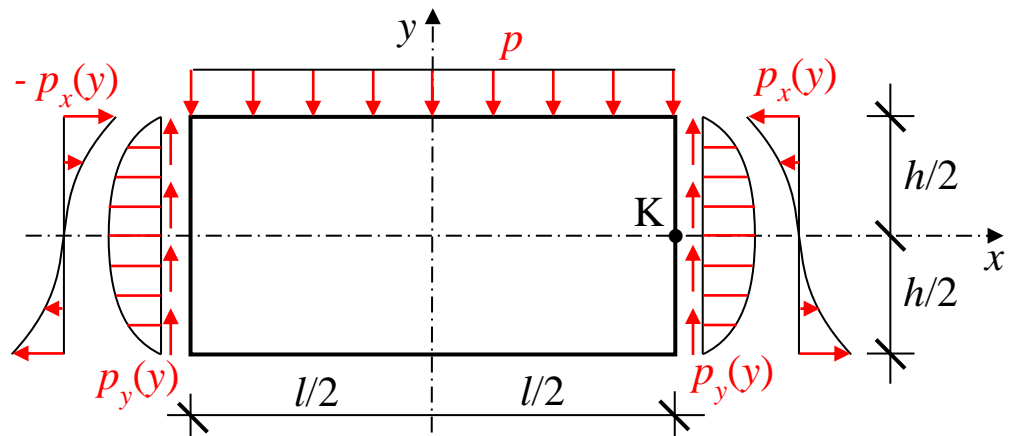
Ćwiczenia 5

- Funkcja naprężeń Airy'ego w rozwiązaniu zagadnień płaskich

Przykład Dla zadanej postaci funkcji Airy'ego wyznaczyć rozkład obciążeń powierzchniowych



Przykład Wyznaczyć funkcje opisujące rozkłady naprężeń w prostokątnej tarczy. Obciążenie powierzchniowe o stałej wartości p jest przyłożone do górnej krawędzi.

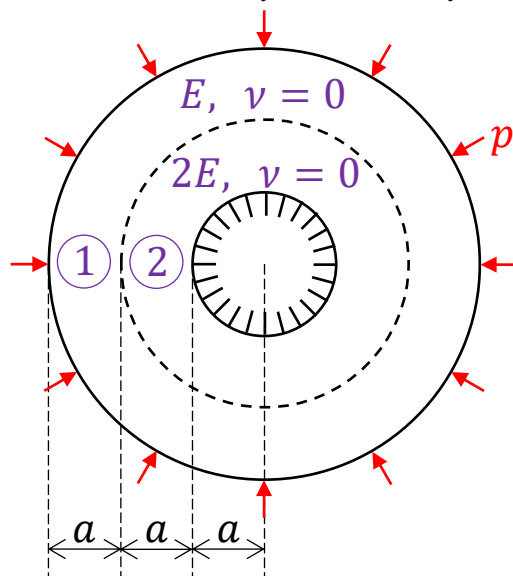


$$\sigma_x = -\frac{6p}{h^3} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{10} \right) y + \frac{6p}{h^3} x^2 y - \frac{4p}{h^3} y^3$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{2h^3} (h^3 + 3h^2 y - 4y^3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3p}{2h^3} (h^2 - 4y^2) x$$

Przykład Dwa materiały i kinematyczny warunek brzegowy



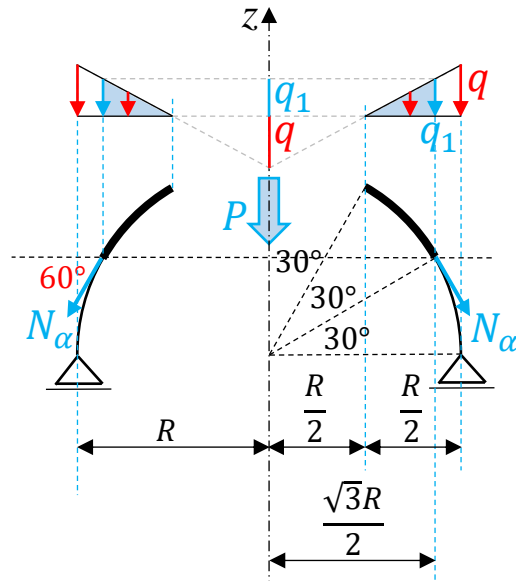
$$\begin{cases} \sigma_r^1 = -\frac{p}{145} \left(117 + 252 \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\varphi^1 = -\frac{p}{145} \left(117 - 252 \frac{a^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_r^2 = -\frac{144p}{145} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\varphi^2 = -\frac{144p}{145} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

Ćwiczenia 6

- Powłoki obrotowe z obciążeniem osiowosymetrycznym w stanie błonowym

Przykład Wyznaczyć siły błonowe w powłoce sferycznej w połowie długości południka dla obciążenia zadanego na plan

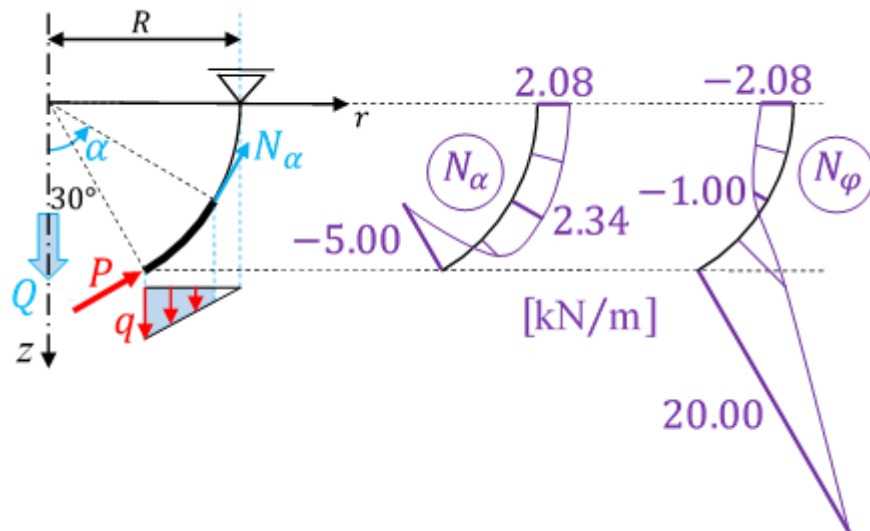


$$N_\alpha = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{9} qR$$

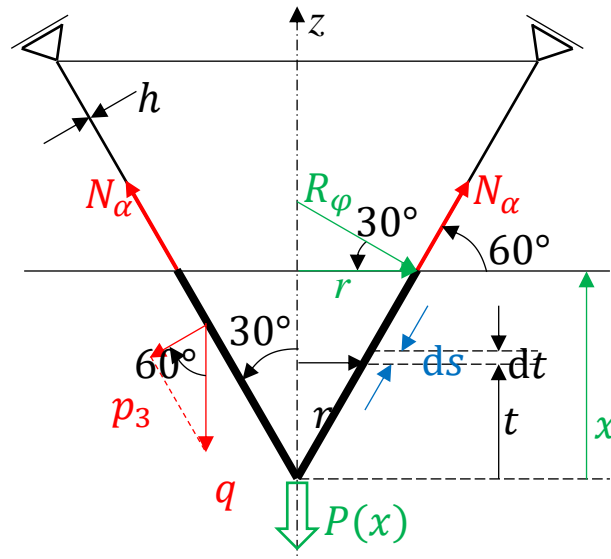
$$N_\phi = \frac{3\sqrt{3} - 7}{36} qR$$

Przykład Wyznaczyć rozkłady sił błonowych w powłoce sferycznej.

Dane: $R = 4\text{m}$, $P = 5\text{ kN/m}$, $q = 5\text{ kPa}$



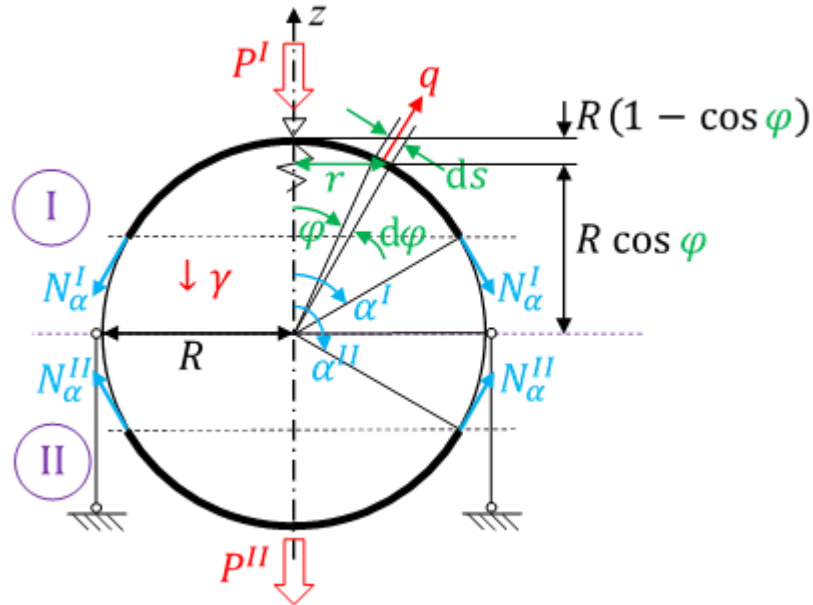
Przykład Powłoka stożkowa obciążona ciężarem własnym (γ – ciężar objętościowy materiału)



$$N_\alpha(x) = \frac{2}{3} \gamma h x$$

$$N_\phi(x) = \frac{1}{3} \gamma h x$$

Przykład Zbiornik sferyczny całkowicie wypełniony (γ – ciężar objętościowy cieczy)



$$N_{\alpha}^I(\alpha^I) = \frac{-\gamma R^2}{6 \sin^2 \alpha^I} (3 \cos^2 \alpha^I - 2 \cos^3 \alpha^I - 1)$$

$$N_{\varphi}^I(\alpha^I) = \gamma R^2 \left(1 - \cos \alpha^I + \frac{3 \cos^2 \alpha^I - 2 \cos^3 \alpha^I - 1}{6 \sin^2 \alpha^I} \right)$$

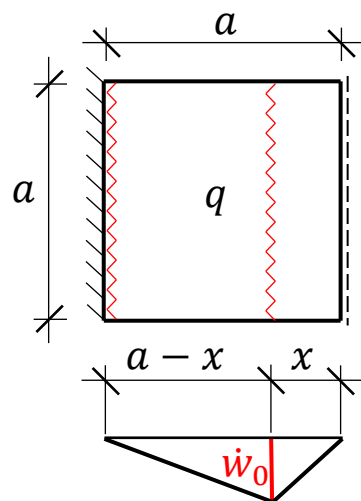
$$N_{\alpha}^{II}(\alpha^{II}) = \frac{\gamma R^2}{6 \sin^2 \alpha^{II}} (5 - 3 \cos^2 \alpha^{II} + 2 \cos^3 \alpha^{II})$$

$$N_{\varphi}^{II}(\alpha^{II}) = \gamma R^2 \left(1 - \cos \alpha^{II} - \frac{5 - 3 \cos^2 \alpha^{II} + 2 \cos^3 \alpha^{II}}{6 \sin^2 \alpha^{II}} \right)$$

Ćwiczenia 7

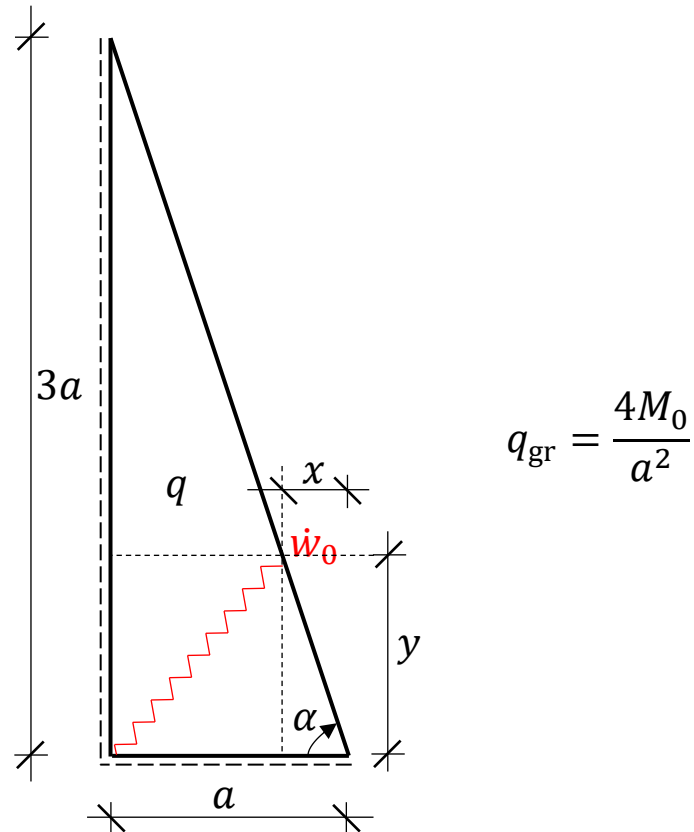
- Metoda kinematyczna oszacowania nośności granicznej płyt

Przykład Płyta kwadratowa ze stałym obciążeniem

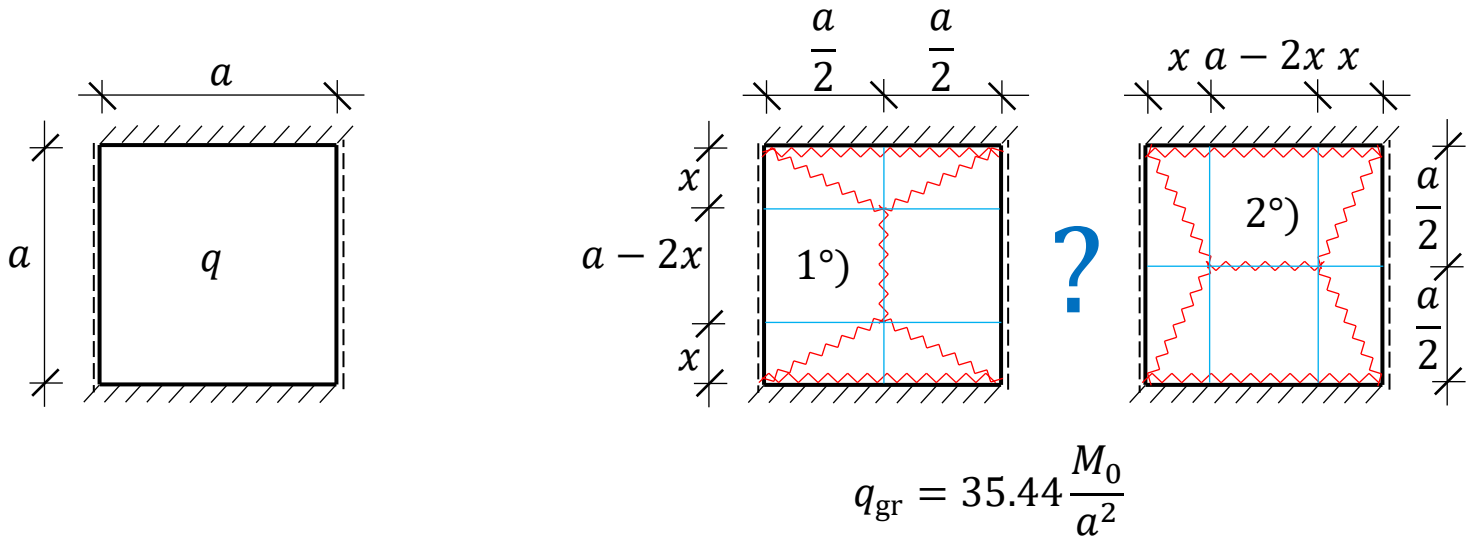


$$q_{gr} = 11.66 \frac{M_0}{a^2}$$

Przykład Płyta trójkątna ze stałym obciążeniem



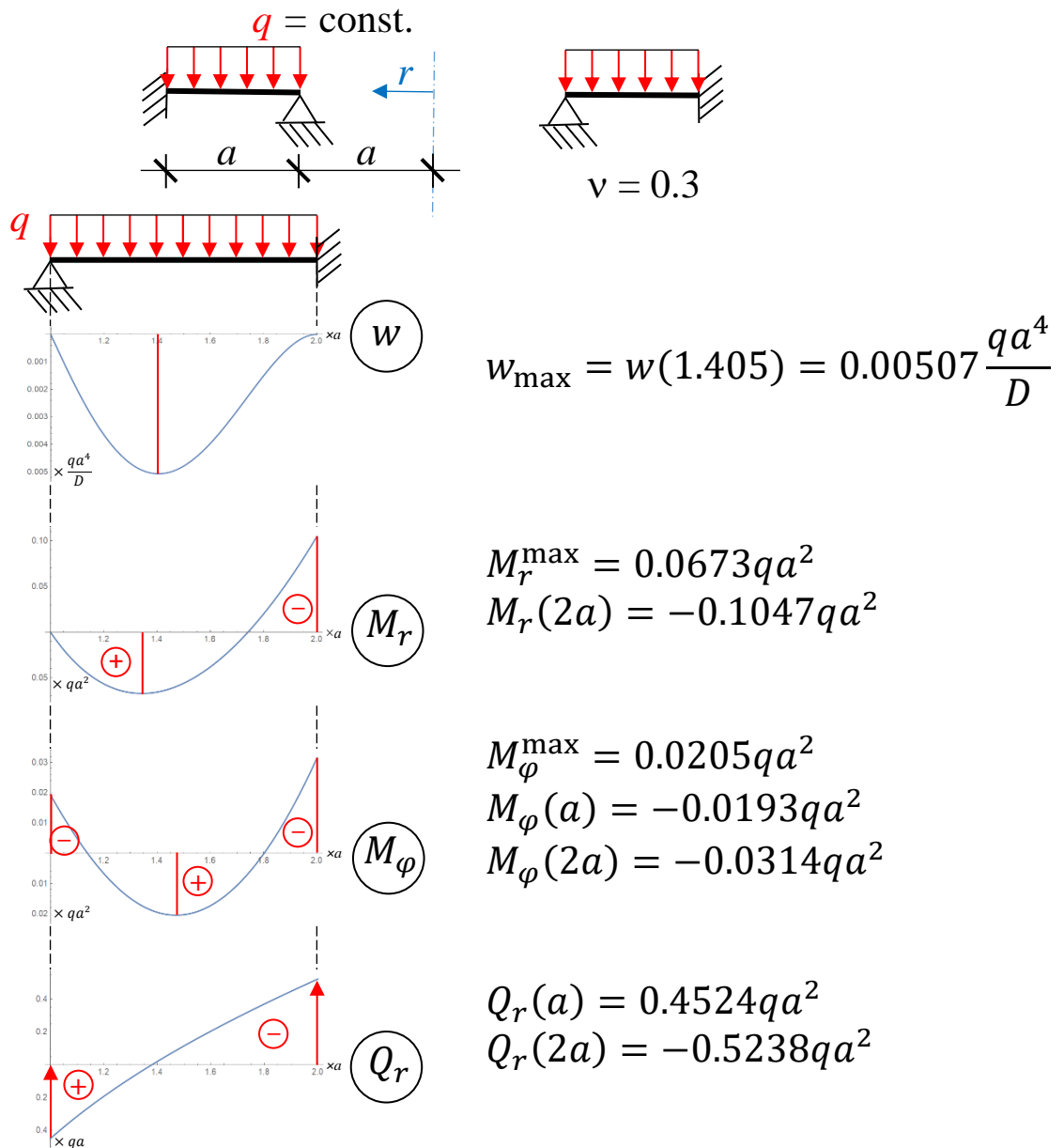
Przykład Płyta kwadratowa ze stałym obciążeniem



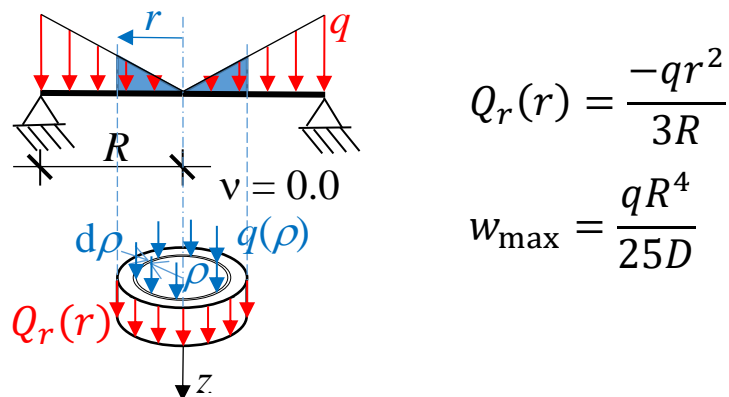
Ćwiczenia 8

- Płyty kołowe

Przykład Płyta pierścieniowa – zadanie statycznie niewyznaczalne



Przykład Płyta kołowa – zadanie statycznie wyznaczalne



Przykład Płyta kołowa – obciążona momentem brzegowym

