SPORZĄDZANIE LINII WPŁYWU WIELKOŚCI STATYCZNYCH SPOSOBEM KINEMATYCZNYM

Sposób kinematyczny sporządzania linii wpływu wielkości statycznych polega na wykorzystaniu twierdzenia o wzajemności reakcji i przemieszczeń (tw. Rayleigha), które brzmi:

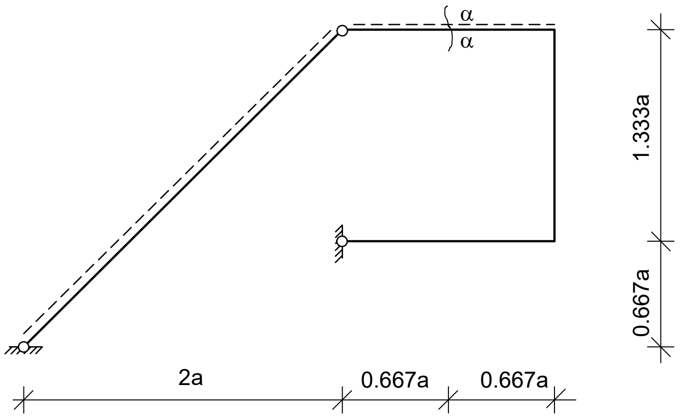
> reakcja r_{ji} w punkcie "j" wywołana siłą jednostkową działającą w punkcie "i" jest równa co do wartości i różna co do znaku przemieszczeniu δ_{ij} w punkcie "i" na kierunku działania siły wywołanemu przemieszczeniem jednostkowym zadanym w punkcie "j" na kierunku reakcji.

$$r_{ji} = -\delta_{ij}$$

Tok postępowania przy sporządzanie linii wpływu sposobem kinematycznym jest następujący:

1. Utworzenie mechanizmu odpowiadającego określonej wielkości statycznej (usunięcie więzi odpowiadającej poszukiwanej wielkości statycznej, zastąpienie jej poszukiwaną wielkością statyczną, określenie tarcz mechanizmu, wyznaczenie środków chwilowego obrotu tarcz względem siebie i względem fundamentu z wykorzystaniem twierdzenie o trzech tarczach Aronholdta.
2. Narysowanie wykresu przesunięć toru siły jednostkowej (równoległych do siły jednostkowej składowych przemieszczeń punktów toru siły jednostkowej),
3. narysowanie linii odniesienia odpowiadającej fundamentowi, prostopadłej do siły obciążającej,
4. narysowanie wykresu przesunięć (równoległych do siły jednostkowej składowych przemieszczeń punktów toru siły jednostkowej),
5. określenie znaków i rzędnych linii wpływu z wykorzystaniem zasady prac przygotowanych (wirtualnych).

Przykład 1. W układzie trójprzegubowym jak na rys. 1 sporządzić linię wpływu momentu zginającego w przekroju α



Rys. 1.

Przecinamy więź odpowiadającą momentowi zginającemu wstawiając przegub w przekroju α i zastępujemy ją momentami (Rys.2). Oznaczamy tarcze. Wyznaczamy środki obrotu tarcz między sobą i z fundamentem. Środek obrotu tarczy 2 z 0 wyznaczamy wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 0 są tarcze 1 i 3. Z twierdzenia o trzech tarczach dla tarcz 2, 1, 0 wynika, że jeśli wzajemny ruch tych tarcz jest możliwy to biegun chwilowego obrotu (2,0) leży na prostej przechodzącej przez punkty (2,1) i (1,0), zaś z twierdzenia o trzech tarczach dla tarcz 2, 3, 0 wynika, że biegun chwilowego obrotu (2,0) leży na prostej przechodzącej przez punkty (2,3) i (3,0). Jeśli więc jest możliwy wzajemny ruch tarcz 2 i 0 to biegun chwilowego obrotu tych tarcz względem siebie (2,0) leży na przecięciu dwu prostych: prostej przechodzącej przez punkty (0,1) i (1,2) i prostej poprowadzonej przez punkty (0,3) i (2,3). Skrótowo będziemy to zapisywać następująco:

$$\left(2 \;\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\; 0\right) \Rightarrow (2,0)$$

Rysujemy poziomą linię odniesienia (odpowiadającą tarczy 0). Rzutujemy na nią środki obrotu (1,0), (2,0), (3,0). Uwzględniając, że mechanizm ma jeden stopień swobody nadajemy obrót tarczy 1 i rysujemy prostą 1 o dowolnym nachyleniu przez punkt (1,0) odpowiadającą tarczy 1 po obrocie. Położenie prostych odpowiadających pozostałym tarczom jest już jednoznacznie określone przez bieguny chwilowego obrotu, które rzutujemy na odpowiednie proste i rysujemy kolejne proste..

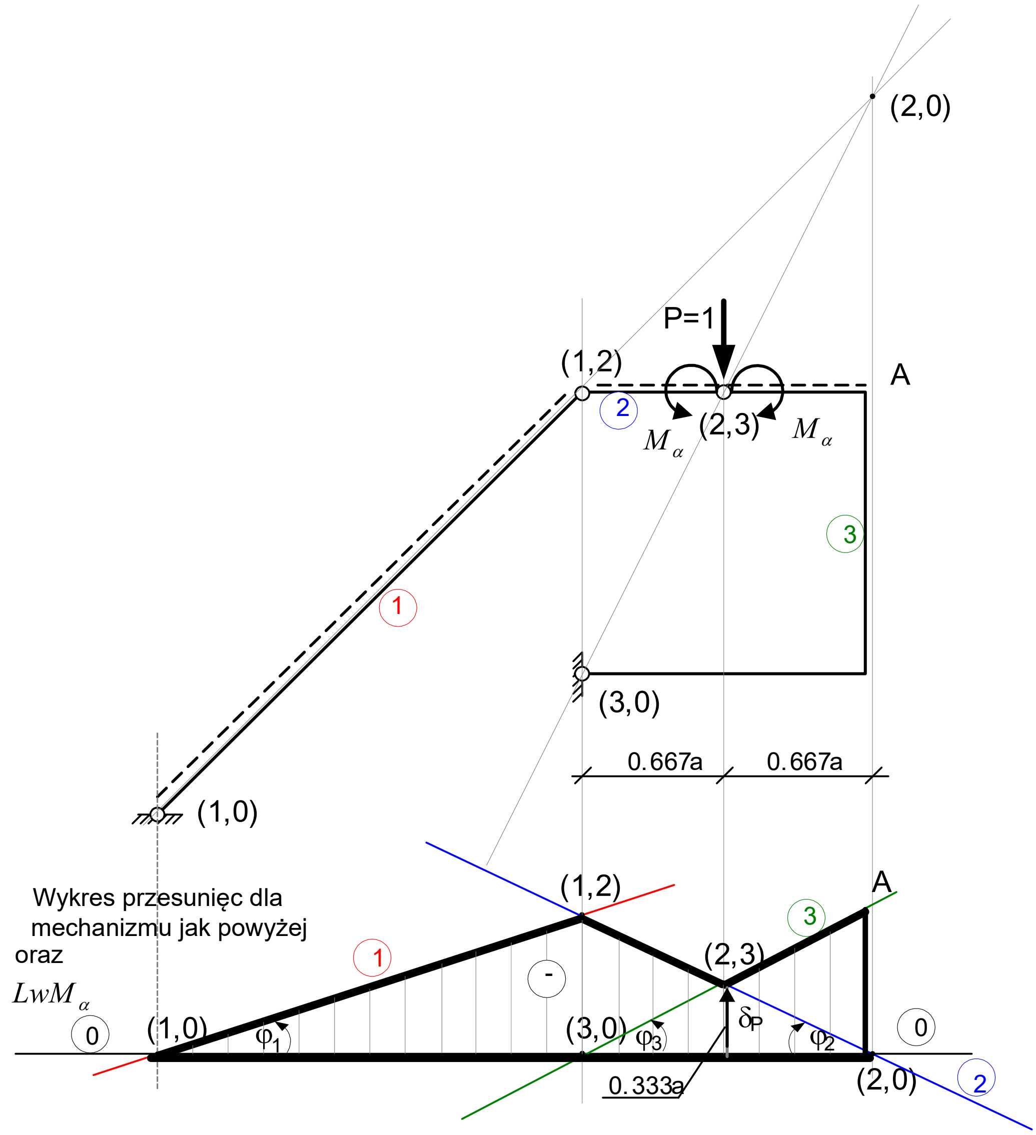
Po zrzutowaniu punktu (1,2) na prostą 1 rysujemy przez punkty (2,0) i (1,2) prostą 2 odpowiadającą tarczy 2. Podobnie, po zrzutowaniu punktu (2,3) na prostą 2, rysujemy przez punkty (3,0) i (2,3) prostą 3 odpowiadającą tarczy 3. Zaznaczamy odcinki prostych odpowiadające torowi siły jednostkowej. Są to: odcinek prostej 1 między punktami (1,0) i (1,2), odcinek prostej 2 między punktami (1,2) i (2,3) oraz odcinek prostej 3 między punktami (2,3) i A (punkt stanowiący rzut końca toru siły jednostkowej na prostą 3). W ten sposób otrzymaliśmy wykres przesunięć toru siły jednostkowej (wykres, którego rzędnymi są rzuty przesunięć poszczególnych punktów na kierunek siły jednostkowej). Wykres ten ma kształt szukanej linii wpływu momentu zginającego. Aby określić rzędnie i znaki linii wpływu wypisujemy równanie zasady prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej (na ogół w punkcie załamania linii wpływy). Rozpatrywanym przypadku wygodnie jest wybrać ustawienie w punkcie (2,3). Pracę wykonują momenty M_α na kątach obrotu φ_2 (tarczy 2) i φ_3 (tarczy 3) oraz siła jednostkowa na przesunięciu punktu jej przyłożenia. Równanie prac przygotowanych ma postać: $-M_\alpha \cdot \varphi_2 - M_\alpha \cdot \varphi_3 - 1 \cdot \delta_P = 0$.

Aby równanie rozwiązać określamy związki między przemieszczeniami występującymi w równaniu.

$$\varphi_2 = \frac{\delta_P}{0.667a}, \qquad \varphi_3 = \frac{\delta_P}{0.667a}.$$

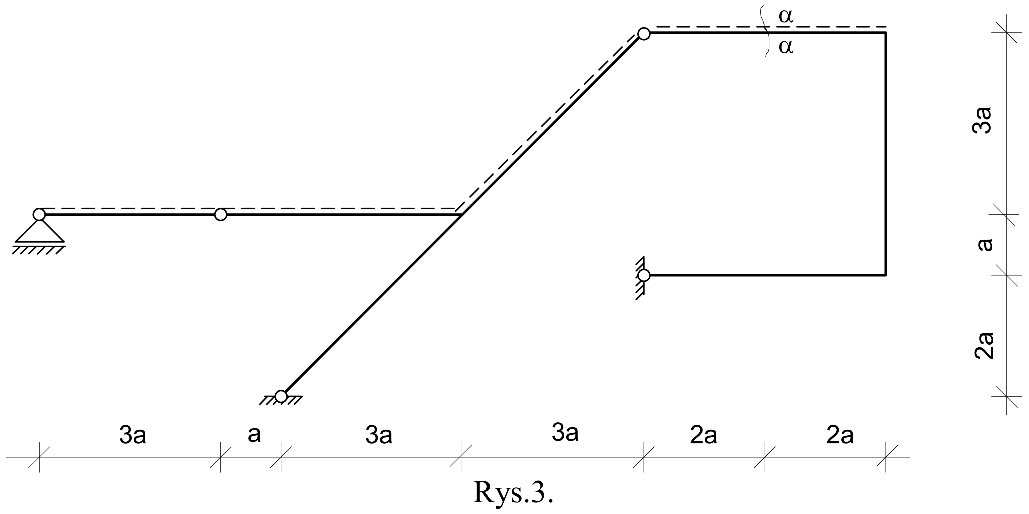
Po ich podstawieniu do równania otrzymujemy: $-M_\alpha \cdot \frac{\delta_P}{0.667a} - M_\alpha \cdot \frac{\delta_P}{0.667a} - 1 \cdot \delta_P = 0$

i skąd $M_\alpha = M_{\alpha,(2,3)} = -0.333a$ dla ustawienia siły jednostkowej w punkcje (2,3). Oznacza to, że rzędne nad prostą odniesienia są ujemne. Wartości innych rzędnych wyznaczamy wykorzystujac twierdzenie Tallesa. Przykładowo rzędną odpowiadajacą ustawieniu siły jednostkowej w punkcie (1,2) wyznaczymy ze związku: $\frac{M_{\alpha,(1,2)}}{2 \cdot 0.667a} = \frac{M_{\alpha,(2,3)}}{0.667a}$. Ma ona wartość $M_{\alpha,(1,2)} = 2 \cdot M_{\alpha,(2,3)} = -0.666a$.



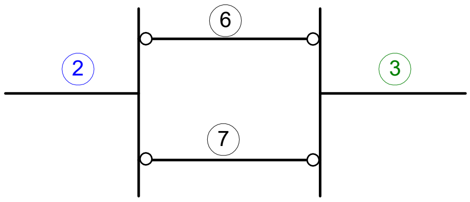
Rys. 2.

Przykład 2. W układzie trójprzegubowym jak na rys. 3 sporządzić linię wpływu siły tnącej w przekroju α.



Rys.3.

Zastępujemy podporę przegubowo-przesuwną więzią elementarną. W przekroju α zastępujemy siłami V_α więź odpowiadającą siłom tnącym, co przekształca układ dany w mechanizm. Mechanizm wraz z oznaczonymi tarczami i środkami chwilowego obrotu pokazano na rys. 5. Połączenie między tarczami 2 i 3 zaznaczone na rys. 5 schematycznie jest połączeniem jak na rys. 4.



Rys.4.

Z twierdzenia o trzech tarczach dla tarcz 2, 6 i 3 oraz 2, 7 i 3 otrzymujemy, że biegun chwilowego obrotu tarcz 2 i 3 względem siebie leży na przecięciu prostych przechodzacych przez punkty (2,6) i (6,3) oraz (2,7) i (7,3) czyli w nieskończoności (proste te są równoległe) na prostej prostopadłej do kierunku działania siły tnącej.

$$\left(2\ \begin{smallmatrix}6\\7\end{smallmatrix}\ 3\right) \Rightarrow (2,3)$$

Analogicznie wyznaczamy środki obrotu (2,0) przez tarcze 1 i 3, oraz (4,0) przez tarcze 1 i 5.

$$\left(2\ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\ 0\right) \Rightarrow (2,0) \qquad \left(4\ \begin{smallmatrix}1\\5\end{smallmatrix}\ 0\right) \Rightarrow (4,0)$$

Można pominąć wyznaczenie położenia środka obrotu tarczy 4 względem 0. Do narysowania przesunięć tej tarczy wystarczy informacja, że środek ten musi leżeć na pionowej prostej przechodzącej przez punkty (5,0) i (4,5), wiadomo więc w którym miejscu będzie jego rzut na osi odniesienia. Rysujemy oś odniesienia i rzutujemy na nią punkty obrotu tarcz z ostoją. Rysujemy prostą 2 odpowiadajacą tarczy 2 obracając ją o dowolny kąt wokół jej środka obrotu (2,0). Następnie rzutujemy na tę prostą środek obrotu (1,2) i rysujemy przez ten punkt i punkt (1,0) prostą 1 odpowiadającą tarczy 1. Prosta 3 jest równoległa do prostej 2, ponieważ ich punkt wspólny leży w nieskończoności (wzajemny środek obrotu (2,3) leży w nieskończoności). Rysujemy więc przez punkt (3,0) prostą 3 równoległą do prostej 2. Prostą 4 odpowiadającą tarczy 4 prowadzimy przez punkt (4,0) zrzutowany na prostą odniesienia (0) i punkt (4,1) zrzutowany na prostą 1. Wykres przesunięć o kształcie takim jak kształt linii wpływu otrzymamy zaznaczając na prostych odcinki odpowiadajace torowi siły jednostkowej. Są to: odcinek między punktami (4,0) i (4,1) na prostej 4, odcinek między punktami (4,1) i (1,2) na prostej 1, odcinek między punktami (1,2) i α na prostej 2, odcinek między punktami α i A na prostej 3.

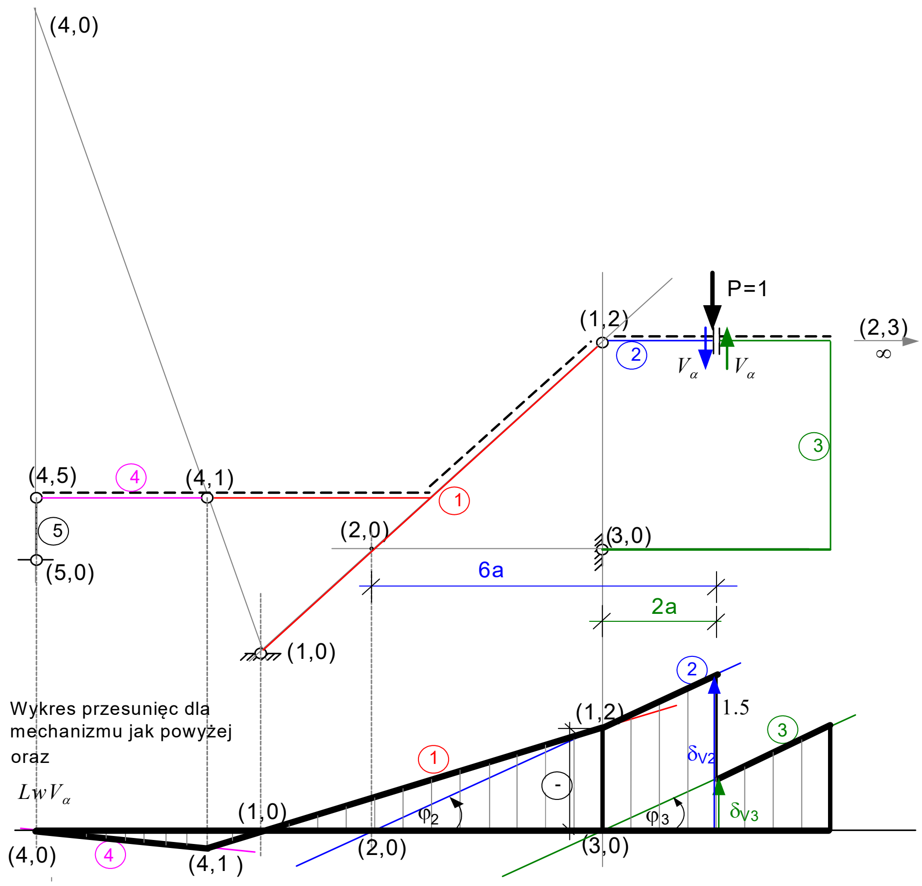
W celu wyznaczenia rzędnej linii wpływu wykorzystamy równanie prac przygotowanych. Dla wyznaczenia rzędnej dla tarczy 2 przy przekroju α ustawimy tam siłę jednostkową.

Równanie prac przygotowanych $\quad -V_\alpha \cdot \delta_{V2} + V_\alpha \cdot \delta_{V3} - 1 \cdot \delta_{V2} = 0$

Z faktu, ze biegun obrotu tarcz 2 i 3 leży w nieskończoności wynika, że proste 2 i 3 są do siebie równoległe, a stąd wynika, że ich kąty obrotu są sobie równe $(\varphi_2 = \varphi_3)$.

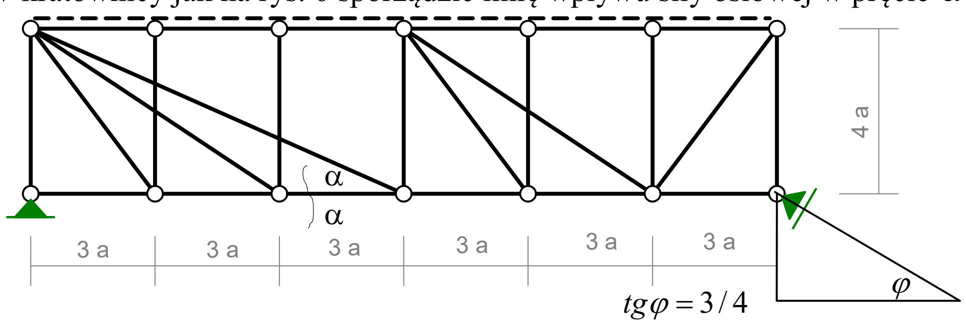
Wykorzystując powyższe otrzymujemy zależności $\quad \varphi_2 = \dfrac{\delta_{V2}}{6a} = \varphi_3 = \dfrac{\delta_{V3}}{2a}$,

skąd $\delta_{V3} = \delta_{V2}/3$, równanie przyjmuje postac $-V_\alpha \cdot \delta_{V2} + V_\alpha \cdot \delta_{V2}/3 - 1 \cdot \delta_{V2} = 0$ a jego rozwiazanie daje wartość $V_\alpha = -1.5$. Oznacza to, że rzędne nad prostą odniesienia są ujemne a pod nia dodatnie. Inne rzędne można wyznaczyć wykorzystując tw. Tallesa.



Rys.5.

Przykład 3. W kratownicy jak na rys. 6 sporządzić linię wpływu siły osiowej w pręcie α.



Rys. 6

Zastępujemy podporę przegubowo-przesuwną więzią elementarną. Pręt α zastępujemy siłami N_α. Grupujemy pręty tworzące tarcze i numerujemy te tarcze (rys. 7) i opisujemy istniejące bieguny obrotu tarcz względem siebie: (1,0), (4,0), (2,4), (1,3), (2,3), (1,2).

Z twierdzenia o trzech tarczach wyznaczamy bieguny chwilowego obrotu (2,0) i (3,0)

$$\left(2\ \begin{matrix}1\\4\end{matrix}\ 0\right) \Rightarrow (2,0) \qquad \left(3\ \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\ 0\right) \Rightarrow (3,0)$$

Rysujemy oś odniesienia i rzutujemy na nią punkty obrotu tarcz z fundamentem. Rysujemy prostą 1 odpowiadającą tarczy 1 obróconą o dowolny kąt wokół jej środka obrotu (1,0). Następnie rzutujemy na tę prostą środek obrotu (1,3) i rysujemy przez ten punkt i punkt (3,0) prostą 3 odpowiadającą tarczy 3, na prostą 3 rzutujemy punkt (2,3) i przez ten punkt oraz punkt (2,0) rysujemy prostą 2 odpowiadającą tarczy 2. Wykres przesunięć o kształcie takim jak kształt linii wpływu otrzymamy zaznaczając na prostych odcinki odpowiadajace torowi siły jednostkowej. Są to: odcinek między punktami (1,0) i (1,3) na prostej 1, odcinek między punktami (1,3) i (2,3) na prostej 3, odcinek między punktami (2,3) i A na prostej 2.

W celu wyznaczenia rzędnej linii wpływu odpowiadającą ustawieniu siły jednostkowej w punkcie (2,3) ustawiamy tam siłę. Równanie prac przygotowanych ma postać

$$N_\alpha \cdot \delta_{N1} + N_\alpha \cdot \delta_{N2} + 1 \cdot \delta_P = 0$$

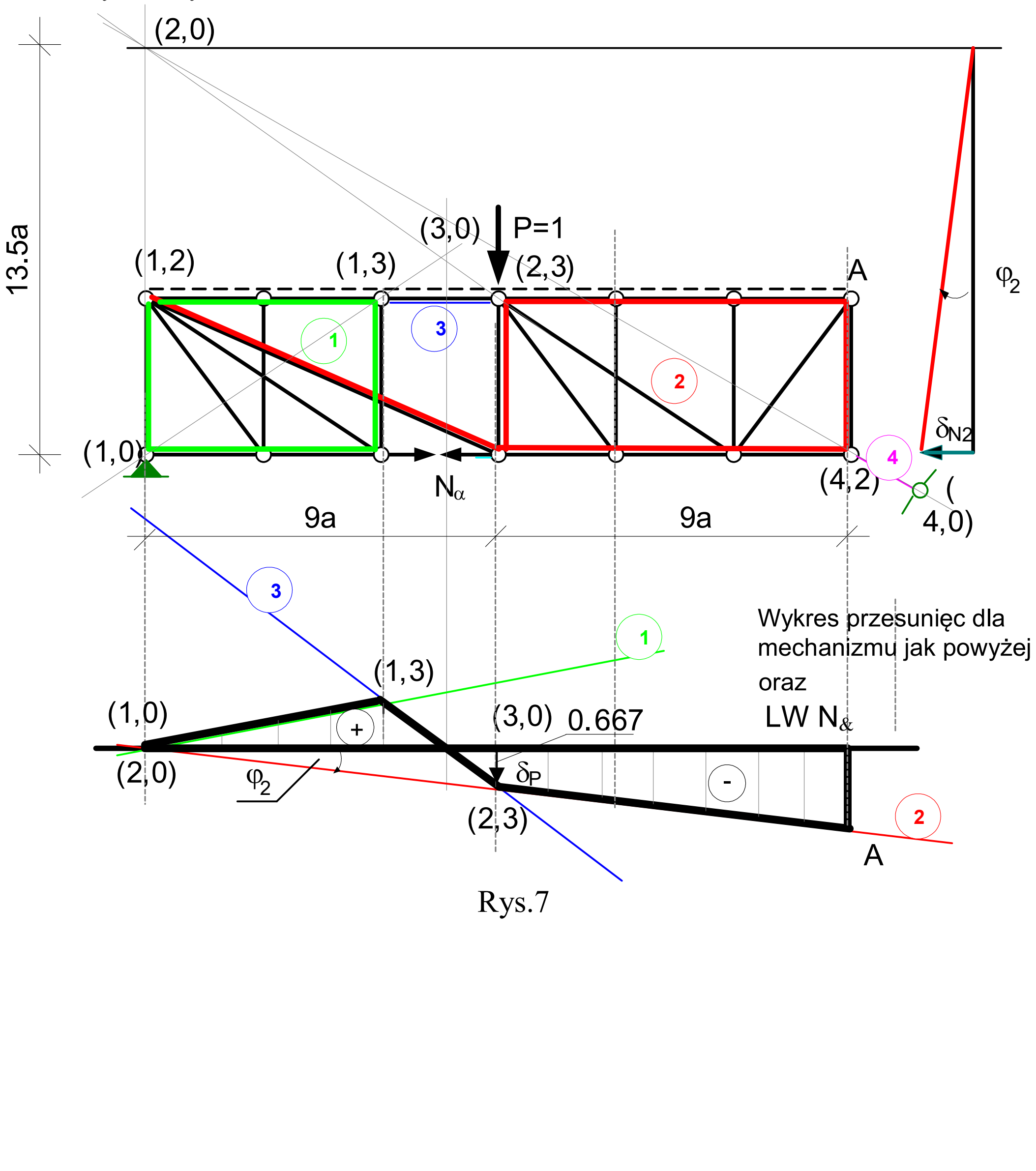
gdzie δ_P, δ_{N1}, δ_{N2} przesunięcia w miejscach i kierunkach działania odpowiednio siły N_α działającej na tarczy 1, siły N_α działającej na tarczy 2 i siły jednostkowej w punkcie (2,3).

Uwzględniając fakt, że $\delta_{N1} = 0$, $\varphi_2 = \dfrac{\delta_P}{9a} = \dfrac{\delta_{N2}}{13.5a}$

otrzymujemy $\delta_{N2} = \dfrac{13.5}{9}\delta_P$ $\qquad N_\alpha \cdot \dfrac{13.5}{9}\delta_p + \delta_p = 0$,

Stąd $N_\alpha = N_{\alpha,(2,3)} = -\dfrac{9}{13.5} = -0.667$,

co oznacza, że rzędne pod linią odniesienia są ujemne a nad tą linią są dodatnie. Wartości innych rzędnych można wyznaczy z tw. Tallesa.



Rys.7