Politechnika Wrocławska

Wydział Budownictwa lądowego i Wodnego

Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej

ANALIZA KINEMATYCZNA UKŁADÓW PŁASKICH

Opracowała dr inż. Monika Podwórna

Wrocław, marzec 2018 r

Tarcza – jest to zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości są ustalone.

Stopień swobody - niezależny parametr, za pomocą którego opisujemy położenie tarczy sztywnej na płaszczyźnie. Aby znać dokładne położenie tarczy sztywnej na płaszczyźnie wystarczy znać położenie dowolnego odcinka należącego do tarczy. Położenie tego odcinka może być opisane za pomocą dwóch współrzędnych dowolnego punktu i kąta, który jest kątem nachylenia tego odcinka - *pojedyncza tarcza sztywna posiada na płaszczyźnie trzy stopnie swobody.*

Punkt swobodny na płaszczyźnie ma **dwa stopnie swobody** - potrzebne są dwie informacje geometryczne do określenia zmiany położenia punktu.

Tarcza swobodna na płaszczyźnie ma **trzy stopnie swobody** - potrzebne są trzy informacje geometryczne do określenia zmiany położenia tarczy.

Tarcza podstawowa (fundament, ostoja) jest szczególnym przypadkiem tarczy swobodnej. Uważamy ją za układ odniesienia dla konstrukcji. Przyjmujemy, że jest ona nieruchoma, więc pozbawiona stopni swobody.

Więź elementarna – najprostszy ideowy model łącznika. Jest to pręt prosty opatrzony na końcach przegubami.

Pojedyncza tarcza sztywna posiada na płaszczyźnie trzy stopnie swobody. Jeżeli tych tarcz będzie t to będą one posiadały $3t$ stopni swobody.

Jeżeli liczba tarcz związanych przegubem i wynosi t_i, to przegub ma **krotność** $k_i=t_i-1$ oraz zastępuje on $e_i=2k_i=2(t_i-1)$ więzi elementarnych.

Warunek ilościowy

Jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym.

t – liczba tarcz

e – liczba więzi

e* = 3 *t

GN układów płaskich

1) $e = 3t$ - GN – warunek konieczny geometrycznej niezmienności układu płaskiego
2) $e > 3t$ - GN – warunek konieczny geometrycznej niezmienności układu przesztywnionego
3) $e < 3t$ - GZ – warunek dostateczny geometrycznej zmienności

Układ płaski nazywamy ***statycznie wyznaczalnym*** (SW), jeśli reakcje można wyznaczyć, posługując się tylko równaniami równowagi statycznej. *Pojęcie SW odnosi się do układów GN*.

SW układów płaskich

1) $e = 3t$, GN $\Rightarrow$ SW – układ statycznie wyznaczalny
2) $e > 3t$, GN $\Rightarrow$ SN – układ statycznie niewyznaczalny
   $n_g = e - 3t$ – stopień statycznej niewyznaczalności układu płaskiego
3) $e < 3t$ $\Rightarrow$ GZ
   $n_g = 3t - e$ – stopień geometrycznej zmienności układu płaskiego

Jeśli $n_g = 1$, to układ nazywamy *mechanizmem o jednym stopniu swobody*.

Warunek jakościowy

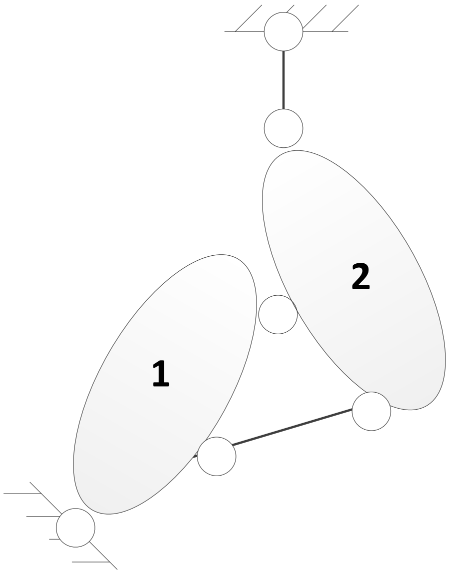
Twierdzenie o dwóch tarczach

Dwie tarcze połączone za pomocą trzech więzi elementarnych, jednocześnie nierównoległych i jednocześnie niezbieżnych tworzą jedną tarczę

Twierdzenie Aronholdta (o trzech tarczach)

Układ złożony z trzech tarcz, w których każda para połączona jest za pomocą dwóch więzi elementarnych, tworzy jedną tarczę jeżeli środki wzajemnego obrotu tych tarcz nie leżą na jednej prostej.

Przeprowadzić analizę kinematyczną układów:



t = 2

e = 6

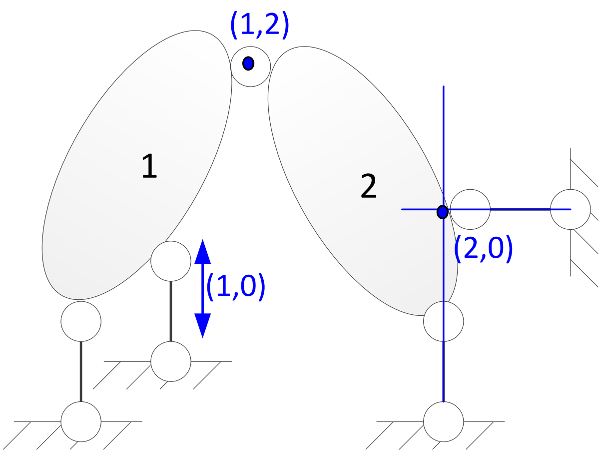
e = 3 t

(1 – 2) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $(1-2)_{2T}$

[(1 – 2) – 0] tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach

$[\,(1-2)_{2T} - 0\,]_{2T} = 0$

Układ GN SW



t = 2

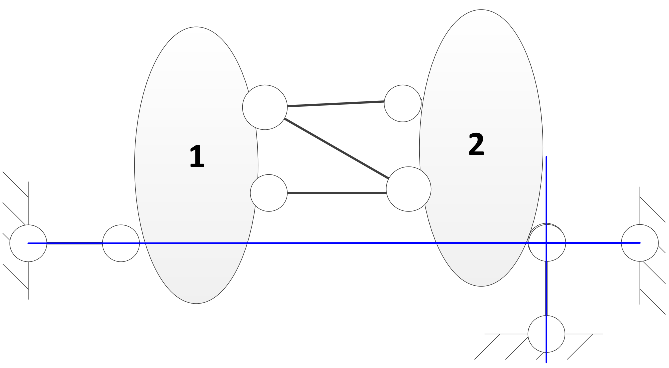
e = 6

e = 3 t

(1 – 2 - 0) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o trzech tarczach - $(1-2-0)_{3T}$

$(1-2-0)_{3T} = 0$

Układ GN SW



t = 2

e = 6

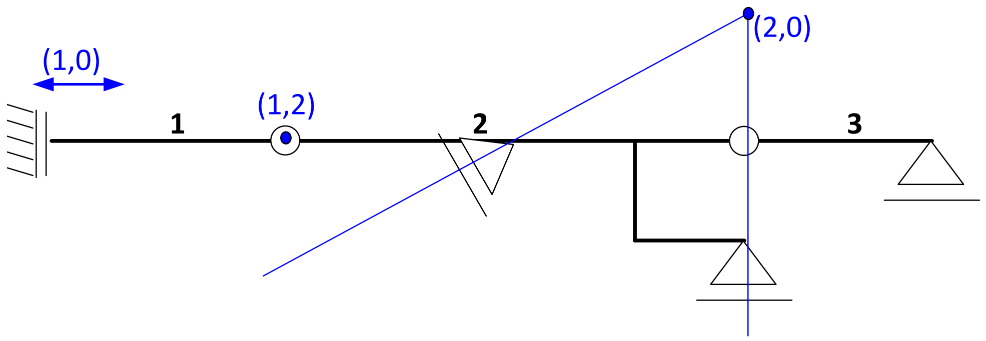
e = 3 t

(1 – 2) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $(1-2)_{2T}$

[(1 – 2) – 0] NIE tworzy jednej tarczy

(więzi zbieżne)

Układ GZ

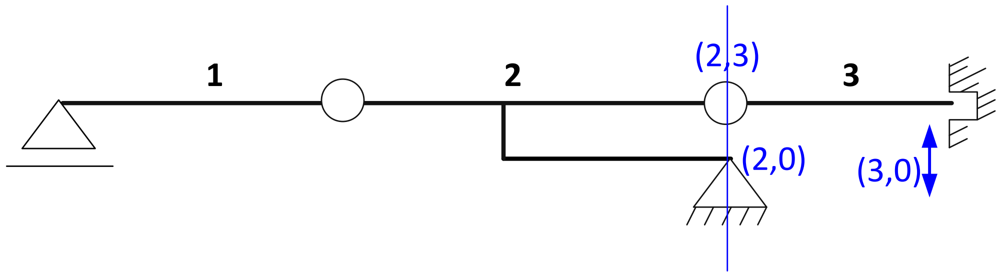


t = 3,   e = 9,   e = 3 t

(1 – 2 - 0) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o trzech tarczach - $(1 – 2 -0)_{3T}$

[(1 – 2 - 0) -3] tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $[(1 – 2 - 0) -3]_{2T}$

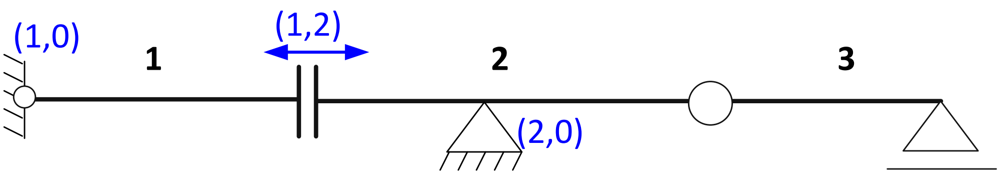
$[(1 – 2 - 0)_{3T} -3]_{2T} =0$,   **Układ GN SW**



t = 3,   e = 9,   e = 3 t

(2 – 3 - 0) NIE tworzy jednej tarczy (środki obrotu leżą na jednej prostej)

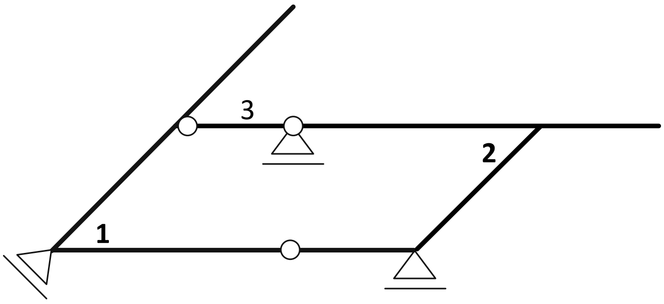
Układ GZ



t = 3,   e = 9,   e = 3 t

(1 – 2 - 0) NIE tworzy jednej tarczy (środki obrotu leżą na jednej prostej)

Układ GZ



$t = 2, \quad e = 6, \qquad e = 3t$

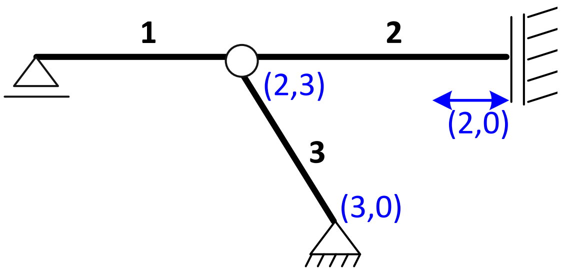
$[(1-2)_{2T} - 0\,]_{2T} = 0,$

lub

$t = 3, \quad e = 9, \qquad e = 3t$

$[(1-2-3)_{3T} - 0\,]_{2T} = 0$

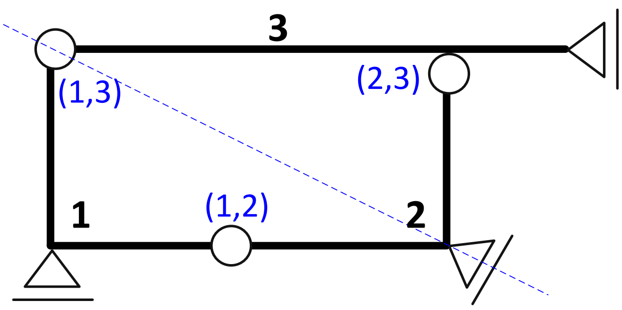
Układ GN SW



$t = 3, \quad e = 9, \qquad e = 3t$

$[(0-2-3)_{3T} - 1\,]_{2T} = 0$

Układ GN SW

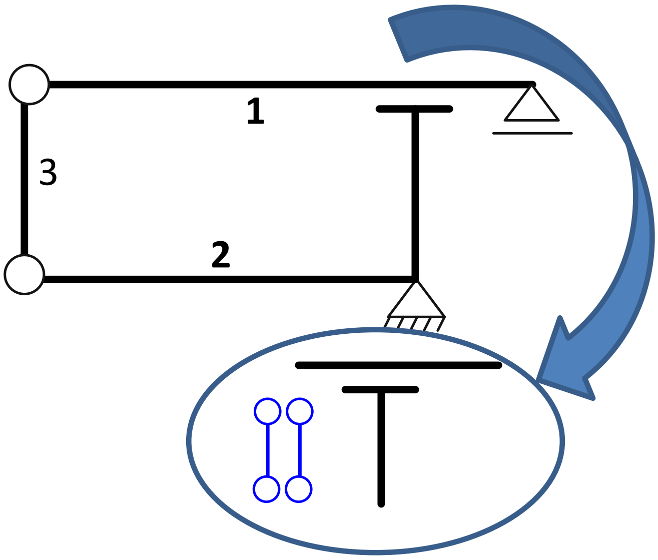


$t = 3, \quad e = 9, \qquad e = 3t$

$[(1-2-3)_{3T} - 0\,]$

NIE tworzy jednej tarczy (3 więzi zbieżne)

Układ GZ



$t = 2, \quad e = 6, \qquad e = 3t$

(1 – 2) NIE tworzy jednej tarczy

(3 więzi zbieżne)

lub

$t = 3, \quad e = 9, \qquad e = 3t$

(1 – 2 - 3) NIE tworzy jednej tarczy

(3 środki obrotu leżą na jednej prostej)

Układ GZ

<u>Ilościowy warunek geometrycznej niezmienności układów kratowych:</u>

p – liczba prętów kratownicy

w – liczba węzłów kratownicy

r – liczba więzi podporowych

$$\boxed{r + p = 2w}$$

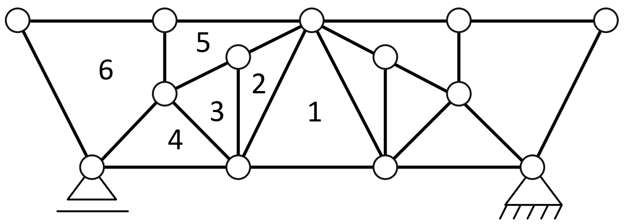
Jeśli $r + p < 2w$

to układ jest ***geometrycznie zmienny o stopniu zmienności*** $s \geq 2w - (r + p)$

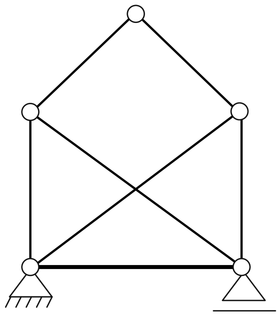
Jeśli $r + p > 2w$

to układ jest ***geometrycznie niezmienny o stopniu przesztywnienia*** $n = r + p - 2w$

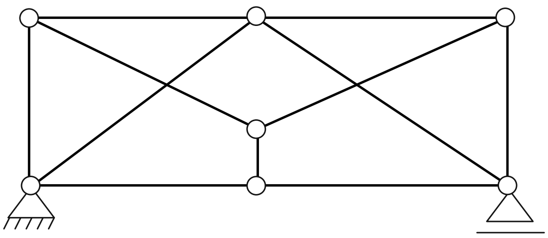
Przykłady układów geometrycznie niezmiennych statycznie wyznaczalnych:



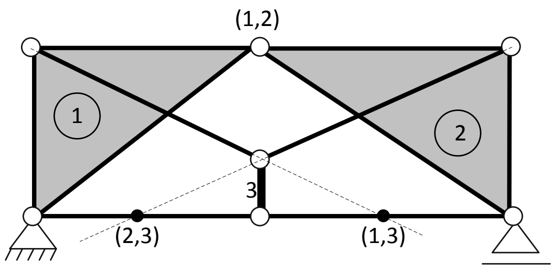
budowa trójkątna kratownicy

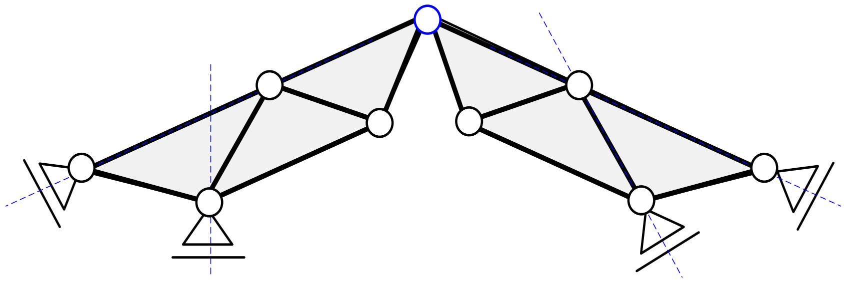


Pręt z pasa dolnego jest jako baza i z jego końców wyprowadzono dwa nierównoległe pręty do przecięcia się, czyli tak utworzony nowy węzeł tworzy wraz z bazą jedną tarczę, itd



=

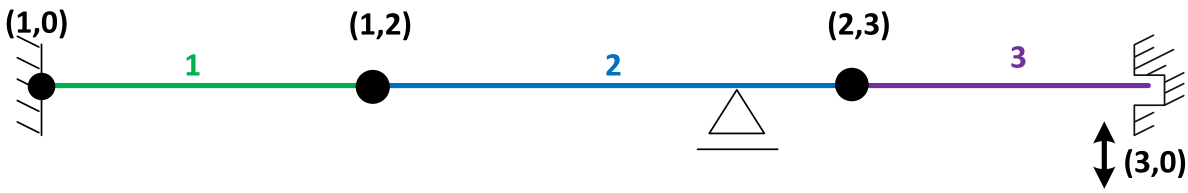




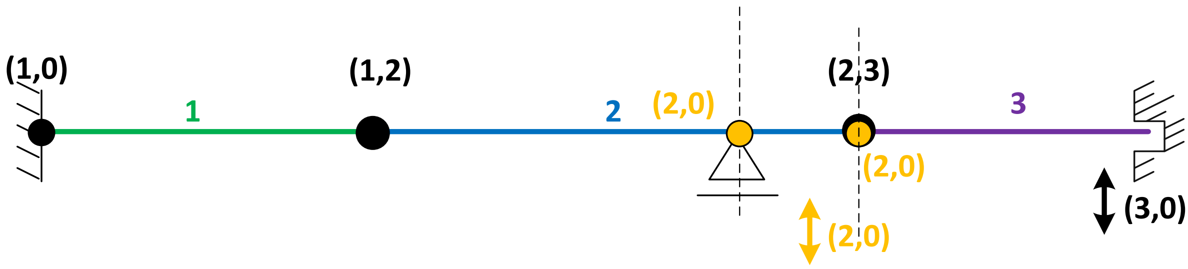
Dwie tarcze tworzące układ trójprzegubowy.

Analizę poniższej belki wieloprzęsłowej nie można przeprowadzić z wykorzystaniem twierdzenia o dwóch / trzech tarczach.

Zakładamy, że układ jest mechanizmem. Poszukujemy środków wzajemnego obrotu tarcz:



Środek (2,0) poszukujemy trzema sposobami – 3 kombinacje z wykorzystaniem tarczy 1, 3 oraz więzi podporowej.



Stąd wniosek, że tarcza druga jest nieruchoma – brak jednoznacznie wyznaczonego środka obrotu tarczy względem fundamentu. Jeżeli tarcza druga jest nieruchoma, to zarówno pierwsza, jak i trzecia również nie ma możliwości ani przesuwu ani obrotu.

Układ GN, SW