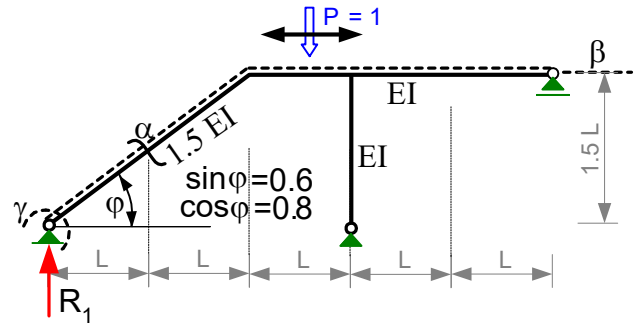


## 1. SPORZĄDZENIE LINII WPŁYWU SIŁ I PRZEMIESZCZEŃ W RAMIE HIPERSTATYCZNEJ

### 1.1. DANE WYJŚCIOWE DO OBLICZEŃ

Dana jest rama jak na rysunku. Wyznaczyć linie wpływu sił przekrojowych w przekroju  $\alpha$ , reakcji  $R_1$  i przemieszczeń w miejscach i kierunkach  $\beta$  oraz  $\gamma$ .



### 1.2. SPOSÓB BEZPOŚREDNI

Sposób ten, w przypadku wyznaczania wielkości statycznych (sił przekrojowych lub reakcji), nazywany jest sposobem statycznym.

Polega on na tym, że odczytuje się szukane wielkości dla różnych ustawień siły jednostkowej tak by móc sporządzić wykresy zależności szukanych wielkości od położenia siły jednostkowej.

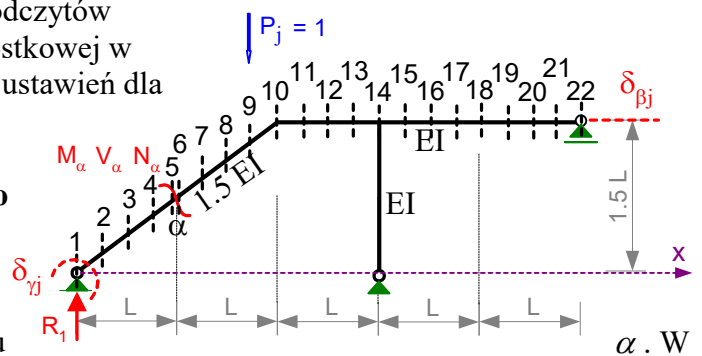
W rozwiązywanym zadaniu dokonano odczytów szukanych wielkości dla 22 ustawień siły jednostkowej w punktach zaznaczonych na rysunku obok (po 5 ustawień dla każdego przedziału co  $0.25 L$ ).

Należy pamiętać, że każdego rozwiązania dokonujemy od obciążenia tylko jedną siłą jednostkową ustawioną w określonym miejscu.

Ustawienia 5 i 6 są różne tylko w odniesieniu do siły tnącej i osiowej w przekroju

obliczeniach komputerowych ustawienia 5 i 6 jako ustawienia nieskończenie bliskie przekroju  $\alpha$  z jego lewej i prawej strony mogą być zrealizowane poprzez jedno ustawienie w przekroju  $\alpha$  i odczyt odpowiednich sił przekrojowych nieskończenie blisko z lewej i prawej strony siły, przy czym gdy odczytujemy siły przekrojowe w punkcie z prawej strony siły odpowiada to ustawieniu nr 5 to jest ustawieniu siły z lewej strony przekroju a gdy odczytujemy siły przekrojowe w punkcie z lewej strony siły odpowiada to ustawieniu nr 6 to jest ustawieniu siły z prawej strony przekroju.

Wyniki zestawiono w tabeli poniżej. Wykresy przedstawiono w punkcie 1.4.



Położenie siły		$M_\alpha^j = M_\alpha(x)$	$V_\alpha^j = V_\alpha(x)$	$N_\alpha^j = N_\alpha(x)$	$R_1^j = R_1(x)$	$\delta_{\beta j} = \delta_\beta(x)$	$\delta_{\gamma j} = \delta_\gamma(x)$
j	x						
1	0	0	0	0	1	0	0
2	0.25	0.1279	-0.0977	0.0192	0.9103	0.0297	0.1353
3	0.5	0.2574	-0.1941	0.0397	0.8209	0.0579	0.225
4	0.75	0.3901	-0.288	0.063	0.7318	0.083	0.2753
5	1	0.5276	-0.3779	0.0906	0.6433	0.1035	0.2927
6			0.4221	-0.5094			
7	1.25	0.4215	0.3372	-0.4764	0.5556	0.1178	0.2835
8	1.5	0.3235	0.2588	-0.4363	0.4688	0.1244	0.254
9	1.75	0.2351	0.1881	-0.3879	0.3832	0.1217	0.2108
10	2	0.158	0.1264	-0.3298	0.299	0.1083	0.16
11	2.25	0.0948	0.0758	-0.2601	0.2167	0.0829	0.108
12	2.5	0.0472	0.0378	-0.1799	0.1382	0.0509	0.0602
13	2.75	0.0155	0.0124	-0.0923	0.0653	0.0205	0.0223
14	3	0	0	0	0	0	0
15	3.25	-0.0061	-0.0049	0.0768	-0.0499	-0.0106	-0.0104
16	3.5	-0.0097	-0.0078	0.1228	-0.0799	-0.0169	-0.0167
17	3.75	-0.0113	-0.009	0.1427	-0.0928	-0.0196	-0.0194
18	4	-0.0111	-0.0089	0.1404	-0.0913	-0.0193	-0.0191
19	4.25	-0.0095	-0.0076	0.1206	-0.0785	-0.0166	-0.0164
20	4.5	-0.0069	-0.0056	0.0878	-0.0571	-0.0121	-0.0119
21	4.75	-0.0036	-0.0029	0.0461	-0.03	-0.0063	-0.0063
22	5	0	0	0	0	0	0
Mnożnik	L	L				$L^3/EI$	$L^2/EI$

### 1.3. SPOSÓB WYKORZYSTUJĄCY TWIERDZENIA O WZAJEMNOŚCI

#### 1.3.1. PODSTAWY TEORETYCZNE

Sposób ten, w przypadku wyznaczania wielkości statycznych (sił przekrojowych lub reakcji), nazywany jest sposobem kinematycznym.

Sposób ten wykorzystuje, wynikające z zasady prac wirtualnych, twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń  $r_{ij} = -\delta_{ji}$  w przypadku wyznaczania linii wpływu wielkości statycznych

i twierdzenie o wzajemności przemieszczeń  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  w przypadku wyznaczania linii wpływu przemieszczeń.

#### 1.3.2. SPOSÓB KINEMATYCZNY SPORZĄDZANIA LINII WPŁYWU WIELKOŚCI STATYCZNYCH

Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń  $r_{ij} = -\delta_{ji}$  stwierdza, że dowolna wielkość statyczna ( $r_{ij}$ ) traktowana jako reakcja w miejscu  $i$  kierunku  $i$  wywołana siłą jednostkową przyłożoną w miejscu  $j$  kierunku  $j$  jest równa ze znakiem przeciwnym przemieszczeniu ( $-\delta_{ji}$ ) w miejscu  $i$  kierunku  $j$  wywołanemu jednostkowym przemieszczeniem wymuszonym w miejscu  $i$  kierunku  $i$  ( $\Delta_i = 1$ ). Uwzględniając, że  $-\delta_{ij}|_{\Delta_i=1} = \delta_{ij}|_{\Delta_i=-1}$  z twierdzenia tego wynika, że dowolna wielkość statyczna ( $r_{ij}$ ) traktowana jako reakcja w miejscu  $i$  kierunku  $i$  wywołana siłą jednostkową przyłożoną w miejscu  $j$  kierunku  $j$  jest równa przemieszczeniu ( $\delta_{ji}$ ) w miejscu  $i$  kierunku  $j$  wywołanemu jednostkowym przemieszczeniem wymuszonym z przeciwnym zwrotem w miejscu  $i$  kierunku  $i$  ( $\Delta_i = -1$ ).

Wynika stąd, że zamiast wyznaczać wielkość statyczną ( $r_{ij}$ ) w miejscu  $i$  od ustawień siły jednostkowej w miejscach  $j$  można wyznaczać przemieszczenia  $\delta_{ji}$  w punktach  $j$  (rzędne linii ugięcia „toru siły jednostkowej) od przemieszczenia  $\Delta_i = -1$  wymuszonego w miejscu  $i$  kierunku szukanej wielkości statycznej ze zwrotem przeciwnym do przyjętego zwrotu tej wielkości ( $r_{ij}$ ).

Zatem aby wyznaczyć linię wpływu reakcji  $R_1$  wymuszamy jednostkowe

przemieszczenie podpory  $\Delta_{R_1} = 1$  ze zwrotem przeciwnym niż przyjęty zwrot reakcji (rysunek obok) i odczytujemy rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) „toru siły jednostkowej”, które są rzędnymi linii wpływu reakcji

$$R_1 \equiv r_{R_1j} = -\delta_{jR_1} = v_{jR_1}.$$

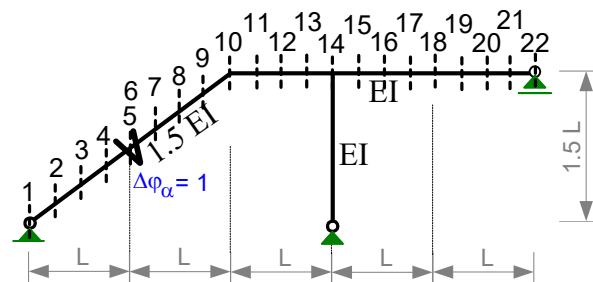
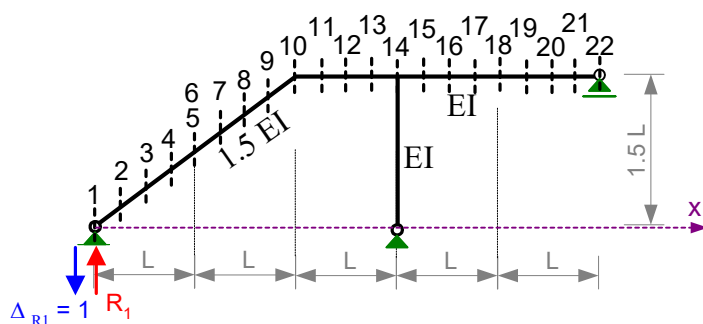
Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 1.3.4.

Aby wyznaczyć linię wpływu momentu

zginającego w przekroju  $\alpha$  wymuszamy wzajemny obrót w przekroju  $\alpha$   $\Delta\varphi_\alpha = 1$  ze zwrotem przeciwnym niż przyjęte jako dodatnie momenty zginające (rysunek obok - jako dodatni przyjęto moment zginający, który rozciąga włókna dolne) i odczytujemy rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) toru siły

jednostkowej, które są rzędnymi linii wpływu momentu zginającego  $M_\alpha \equiv r_{\alpha j} = -\delta_{j\alpha} = v_{j\alpha}$ .

Jeśli program komputerowy nie daje możliwości wymuszenia wzajemnego obrotu przekrojów to wymuszenie to można zastąpić równoważnym obciążeniem statycznym. W tym celu należy wstawić przegub w przekroju  $\alpha$ , przyłożyć po obu jego stronach (w przekrojach 5 i 6) momenty jednostkowe



## LINIE WPŁYWU – przykład 3 – Obliczenia komputerowe

(rysunek obok) i odczytać kąty obrotu tych przekrojów.

Wynoszą one:  $\delta_{\alpha 5} = -4.5520L^2 / EI$

$$\text{ i } \delta_{\alpha 6} = 3.5497L^2 / EI .$$

Wzajemny obrót przekrojów 5 i 6 wynosi, więc

$$\delta_{\alpha\alpha} = -\delta_{\alpha 5} + \delta_{\alpha 6} = (-(-4.5520) + 3.5497)L^2 / EI =$$

$$= 8.1017L^2 / EI$$

Momenty  $M_\alpha = -1/\delta_{\alpha\alpha} = -EI/8.1017/L^2 = -0.123431EI/L^2$  stanowią obciążenie statyczne, które spowoduje wzajemny obrót  $\Delta_\alpha = -1$ . Jako obciążenie statyczne

równoważne wymuszeniu kinematycznemu  $\Delta_\alpha = -1$  należy, więc przyłożyć momenty

$$M_\alpha = 0.123431EI/L^2 \text{ ze zwrotami przeciwnymi niż}$$

zwroty momentów jednostkowych (rysunek obok) i odczytać rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) toru siły jednostkowej, które są rzędnymi linii wpływu momentu zginającego. Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 1.3.4.

Dla kontroli należy sprawdzić, czy wzajemny obrót przekrojów przy przegubie wynosi

$\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha 5} - \Delta_{\alpha 6} = 1$  (minus przed jedynką został uwzględniony poprzez zmianę zwrotów momentów przyłożonych jako obciążenie). W rozwiązywanym zadaniu otrzymano:

$$\Delta_{\alpha 5} = 0.56186, \quad \Delta_{\alpha 6} = -0.43814, \quad \Delta_\alpha = \Delta_{\alpha 5} - \Delta_{\alpha 6} = 0.56186 - (-0.43814) = 1.$$

### Aby wyznaczyć linię wpływu siły tnącej w przekroju $\alpha$

wymuszamy wzajemny przesuw poprzeczny w przekroju  $\alpha$

$\Delta h_\alpha = 1$  ze zwrotem przeciwnym niż dodatnie zwroty sił

tnących (rysunek obok) i odczytujemy rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) toru siły jednostkowej, które są rzędnymi linii wpływu siły tnącej  $V_\alpha \equiv r_{\alpha j} = -\delta_{j\alpha} = v_{j\alpha}$ .

Jeśli program komputerowy nie daje możliwości wymuszenia wzajemnego przesuwu poprzecznego przekrojów to wymuszenie to można zastąpić równoważnym obciążeniem statycznym.

W tym celu należy wstawić połączenie umożliwiające wzajemny przesuw poprzeczny, przyłożyć po obu stronach (przekroje 5 i 6) jednostkowe siły poprzeczne (rysunek obok) i odczytać przesunięcia poprzeczne (prostopadłe do osi pręta) przekrojów 5 i 6. Wynoszą one:

$$\delta_{\alpha 5} = 5.9809L^3 / EI \quad \text{ i } \quad \delta_{\alpha 6} = -6.6788L^3 / EI .$$

Wzajemne przesunięcie poprzeczne przekrojów 5 i 6 wynosi, więc

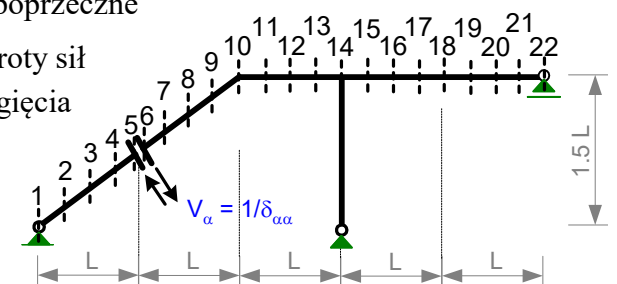
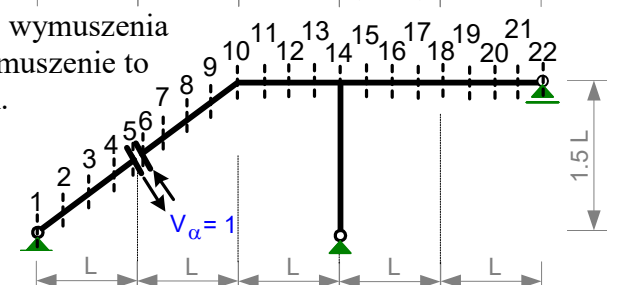
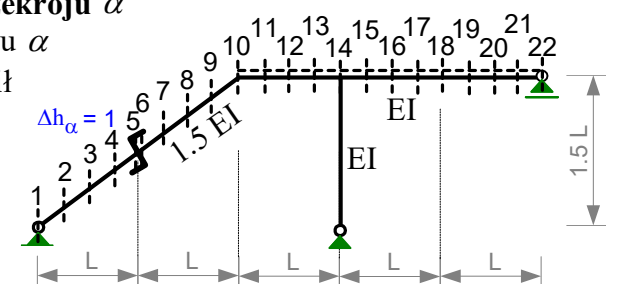
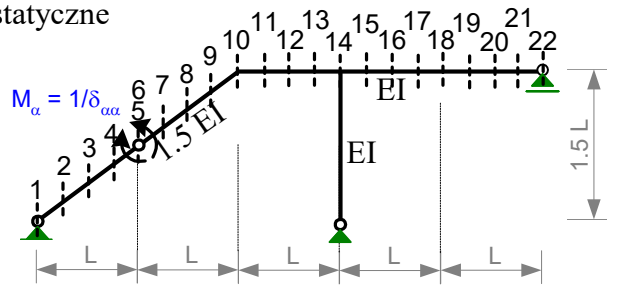
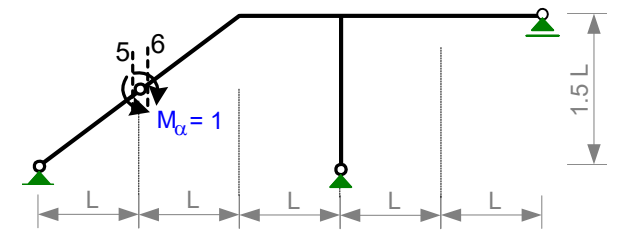
$$\delta_{\alpha\alpha} = \delta_{\alpha 5} - \delta_{\alpha 6} = (5.9809 - (-6.6788))L^3 / EI = 12.6597L^3 / EI .$$

Siły poprzeczne  $V_\alpha = -1/\delta_{\alpha\alpha} = -EI/12.6597/L^3 = -0.07899EI/L^3$  stanowią obciążenie statyczne, które spowoduje wzajemny przesuw  $\Delta h_\alpha = -1$ . Jako obciążenie statyczne równoważne wymuszeniu kinematycznemu  $\Delta_\alpha = -1$  należy, więc przyłożyć siły poprzeczne

$$V_\alpha = 0.083599EI/L^3 \text{ ze zwrotami przeciwnymi niż zwroty sił}$$

jednostkowych (rysunek obok) i odczytać rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) toru siły jednostkowej, które są rzędnymi linii wpływu siły tnącej w przekroju  $\alpha$ .

Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 1.3.4.



Dla kontroli należy sprawdzić, czy wzajemny przesuw poprzeczny przekrojów 5 i 6 wynosi

$$\Delta_\alpha = -\Delta_{\alpha 5} + \Delta_{\alpha 6} = 1 \quad (\text{minus został uwzględniony poprzez zmianę zwrotów sił}).$$

W rozwiązywanym zadaniu otrzymano:

$$\Delta_{\alpha 5} = -0.4724, \quad \Delta_{\alpha 6} = 0.5276,$$

$$\Delta_\alpha = -\Delta_{\alpha 5} + \Delta_{\alpha 6} = -(-0.4724) + 0.5276 = 1.$$

**Aby wyznaczyć linię wpływu siły osiowej w przekroju  $\alpha$**  wymuszamy skrócenie pręta  $\Delta L_\alpha = -1$  w przekroju  $\alpha$  (rysunek obok) i odczytujemy rzędne linii ugięcia, które są rzędnymi linii wpływu.

Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 1.3.4.

Jeśli program komputerowy nie daje możliwości

wymuszania skrócenia pręta to można to zastąpić równoważnym obciążeniem statycznym. W tym celu należy wstawić połączenie umożliwiające wzajemny przesuw

podłużny, przyłożyć po obu stronach (przekroje 5 i 6) jednostkowe siły podłużne (rysunek obok) i odczytać przesunięcia wzdłuż osi pręta przekrojów 5 i 6. Wynoszą one:  $\delta_{\alpha 5} = 0$  i  $\delta_{\alpha 6} = -2.3473L^3 / EI$ .

Wzajemne przesunięcie wzdłuż osi pręta przekrojów 5 i 6 wynosi, więc

$$\delta_{\alpha\alpha} = \delta_{\alpha 5} - \delta_{\alpha 6} = (0 - (-2.3473))L^3 / EI = 2.3473L^3 / EI.$$

Siły podłużne  $N_\alpha = -1 / \delta_{\alpha\alpha} = -EI / 2.3473 / L^3 = -0.4260EI / L^3$  stanowią obciążenie statyczne, które spowoduje wzajemny przesuw  $\Delta L_\alpha = -1$ . Jako obciążenie statyczne równoważne wymuszeniu

kinematycznemu  $\Delta_\alpha = -1$  należy, więc przyłożyć

siły podłużne  $N_\alpha = 0.426EI / L^3$  ze zwrotami

przeciwnymi niż zwroty sił jednostkowych (rysunek obok) i odczytać rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) toru siły jednostkowej, które są rzędnymi linii wpływu siły osiowej w przekroju  $\alpha$ .

Dla kontroli należy sprawdzić, czy wzajemny

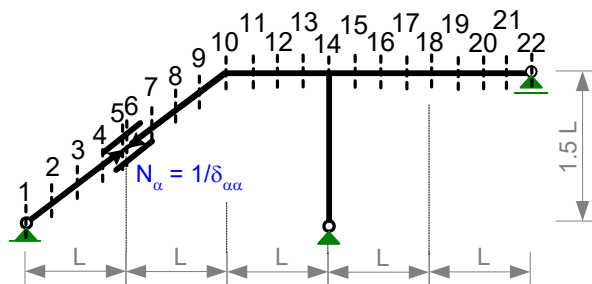
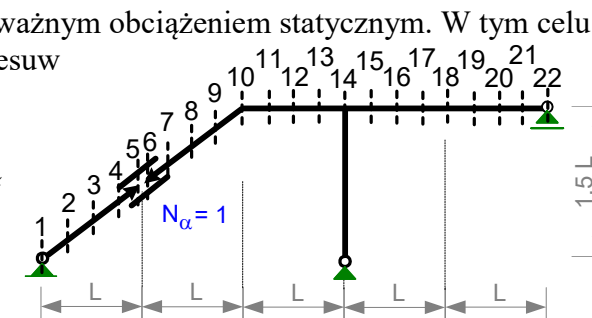
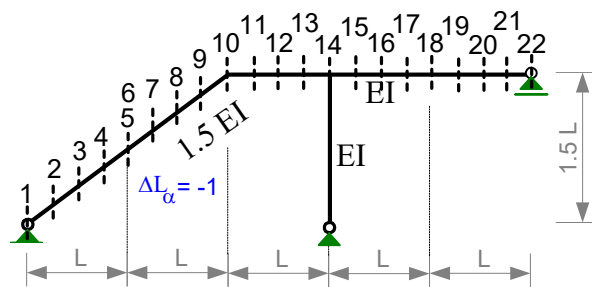
przesuw podłużny przekrojów 5 i 6 wynosi  $\Delta_\alpha = -\Delta_{\alpha 5} + \Delta_{\alpha 6} = 1$  (minus został uwzględniony poprzez zmianę zwrotów sił). W rozwiązywanym zadaniu otrzymano:

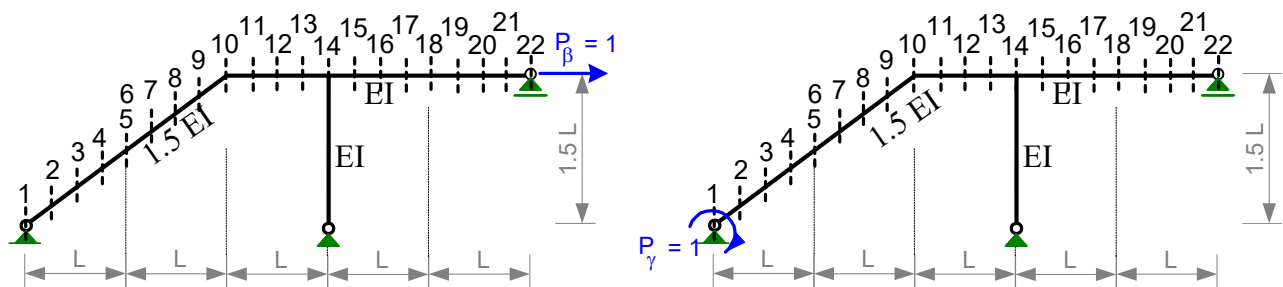
$$\Delta_{\alpha 5} = 0, \quad \Delta_{\alpha 6} = 1, \quad \Delta_\alpha = -\Delta_{\alpha 5} + \Delta_{\alpha 6} = -0 + 1 = 1.$$

### 1.3.3. WYZNACZENIE LINII WPLYWU PRZEMIESZCZEŃ

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  stwierdza, że przemieszczenie ( $\delta_{ij}$ ) w miejscu i kierunku  $i$  wywołana siłą jednostkową przyłożoną w miejscu i kierunku  $j$  jest równa przemieszczeniu ( $\delta_{ji}$ ) w miejscu i kierunku  $j$  wywołanemu jednostkową siłą przyłożoną w miejscu i kierunku  $i$ . Wynika stąd, że zamiast wyznaczać przemieszczenie w określonym miejscu i kierunku  $i$  od ustawień siły jednostkowej w punktach  $j$  można wyznaczać przemieszczenia w punktach  $j$  od siły jednostkowej przyłożonej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia  $i$  (rysunki poniżej).

W rozwiązywanym zadaniu rzędne linii wpływu przemieszczenia  $\delta_{\beta j}$  otrzymamy odczytując rzędne  $\delta_{j\beta}$  to jest rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczenia) w punktach 1-22 od obciążenia siłą jednostkową przyłożoną w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia  $P_\beta = 1$ . Analogicznie rzędne linii wpływu przemieszczenia  $\delta_{\gamma j}$  otrzymamy odczytując rzędne  $\delta_{j\gamma}$  to jest rzędne linii ugięcia w punktach 1-22 od obciążenia siłą jednostkową  $P_\gamma = 1$  (rysunki poniżej).





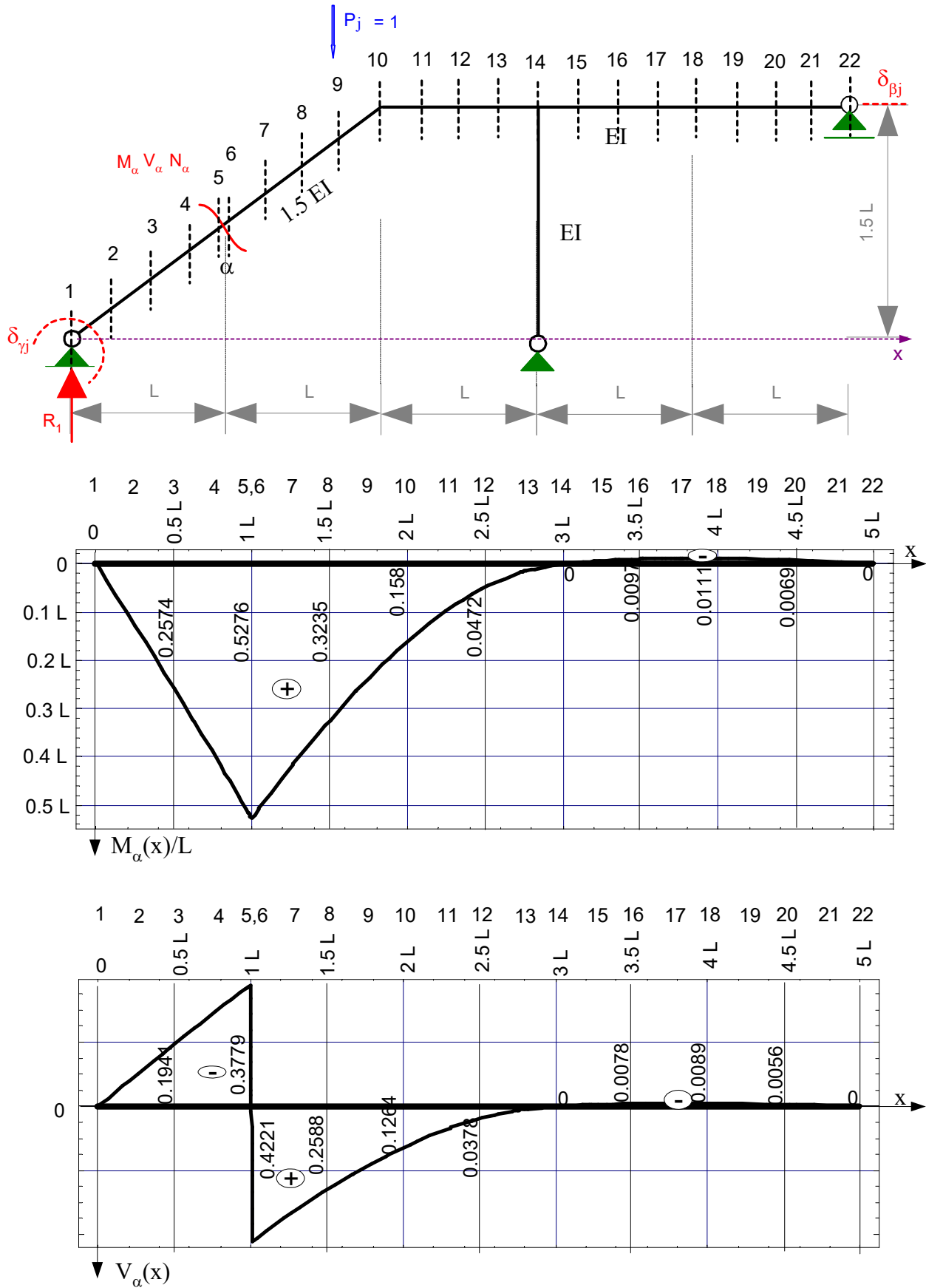
Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 1.3.4.

### 1.3.4. ZESTAWIENIE WYNIKÓW ROZWIĄZAŃ Z WYKORZYSTANIEM TWIERDZEŃ O WZAJEMNOŚCI

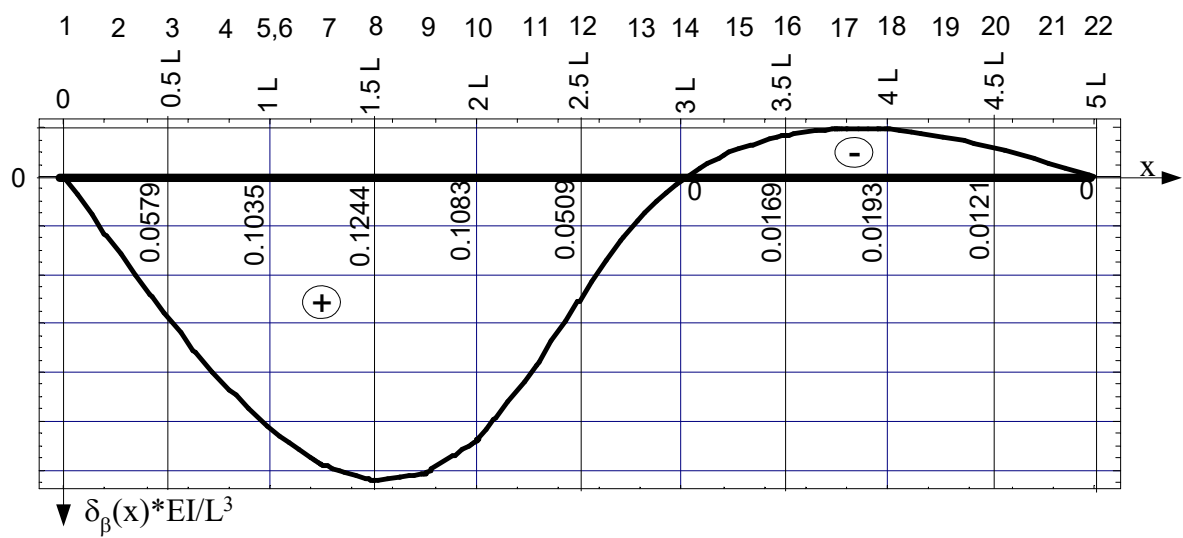
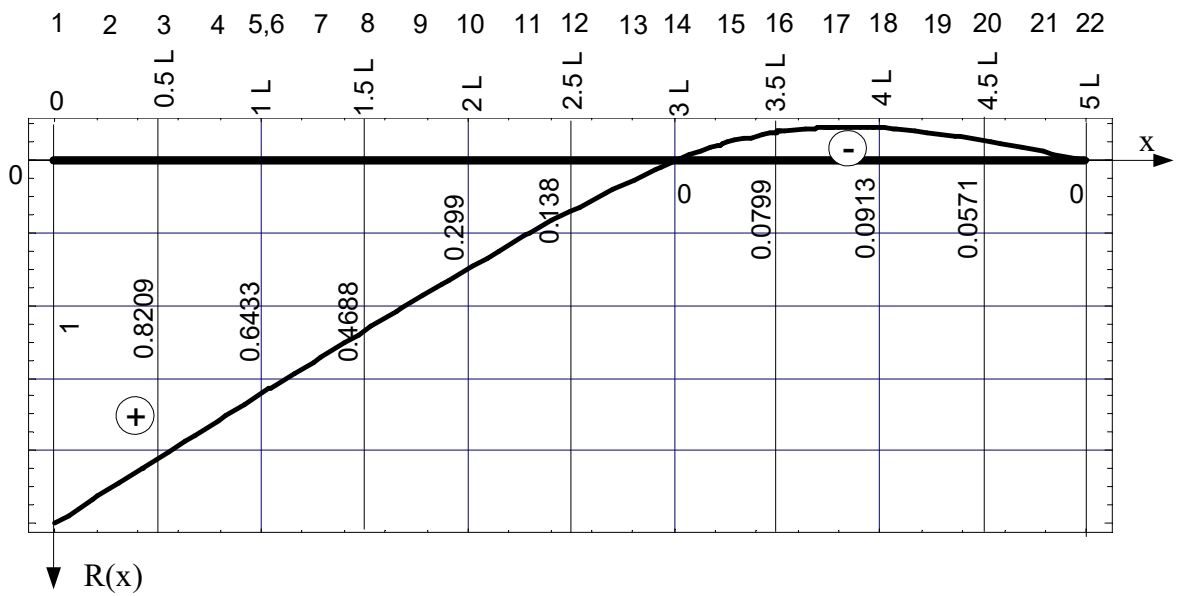
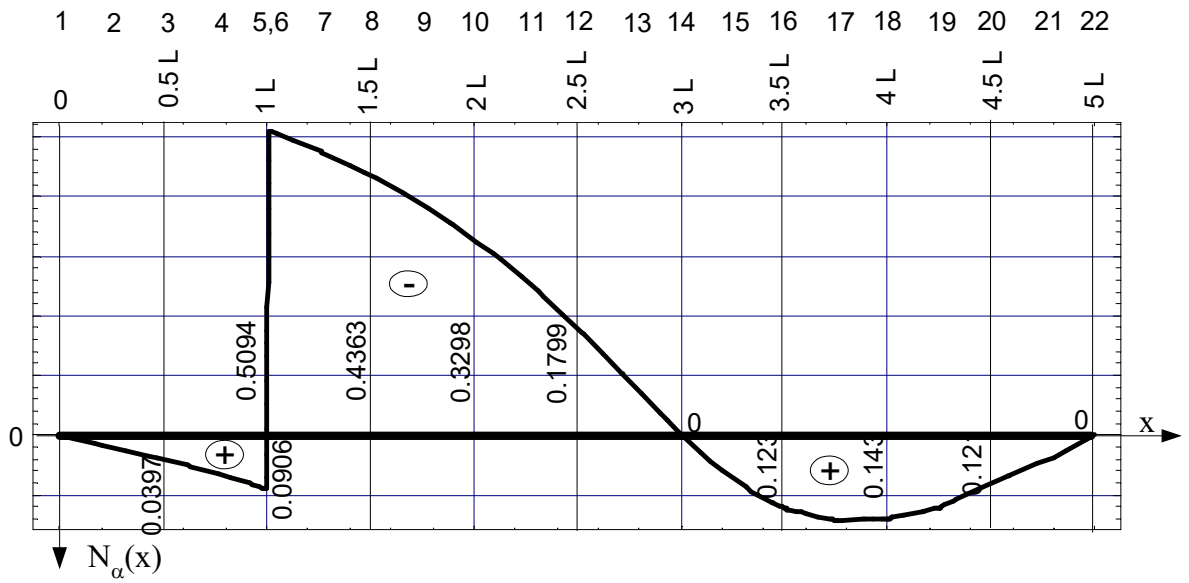
W tabeli poniżej zestawiono wartości rzędnych linii wpływu uzyskane z wykorzystaniem twierdzeń o wzajemności. Są one, oczywiście, identyczne jak wartości uzyskane sposobem bezpośrednim punkt 1.2).

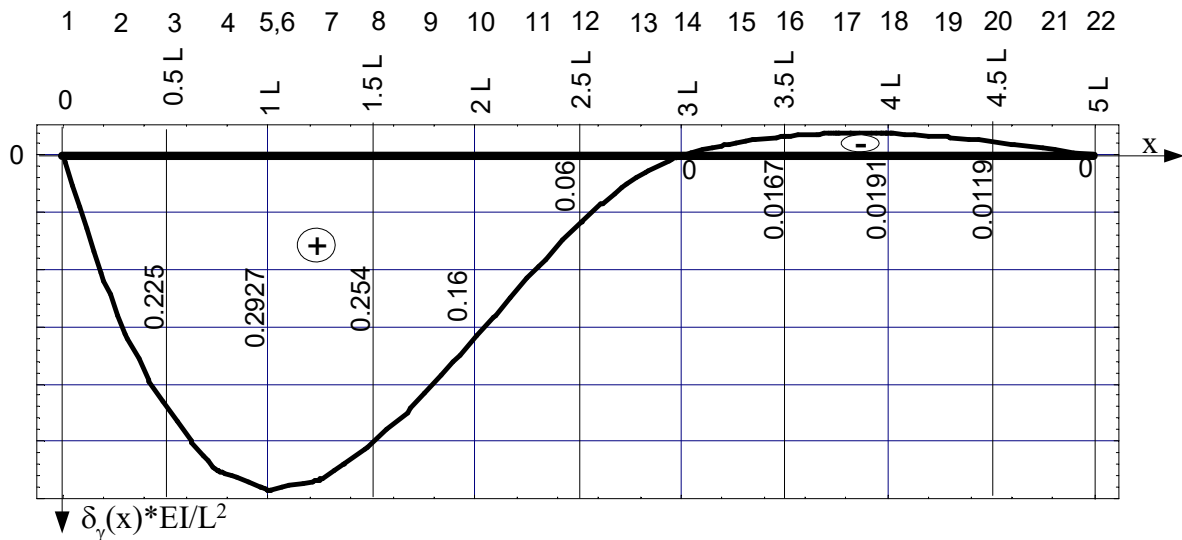
Punkty odczytu rzędnych		$M_{\alpha}^j = M_{\alpha}(x)$	$V_{\alpha}^j = V_{\alpha}(x)$	$N_{\alpha}^j = N_{\alpha}(x)$	$R^j = R(x)$	$\delta_{\beta j} = \delta_{\beta}(x)$	$\delta_{\gamma j} = \delta_{\gamma}(x)$
j	x	= $v_{j\alpha}$	= $v_{j\alpha}$	= $v_{j\alpha}$	= $v_{j\Delta r}$	= $v_{j\beta}$	= $v_{j\gamma}$
1	0	0	0	0	1	0	0
2	0.25	0.1279	-0.0977	0.0192	0.9103	0.0297	0.1353
3	0.5	0.2574	-0.1941	0.0397	0.8209	0.0579	0.225
4	0.75	0.3901	-0.288	0.063	0.7318	0.083	0.2753
5	1	0.5276	-0.3779	0.0906	0.6433	0.1035	0.2927
6			0.4221	-0.5094			
7	1.25	0.4215	0.3372	-0.4764	0.5556	0.1178	0.2835
8	1.5	0.3235	0.2588	-0.4363	0.4688	0.1244	0.254
9	1.75	0.2351	0.1881	-0.3879	0.3832	0.1217	0.2108
10	2	0.158	0.1264	-0.3298	0.299	0.1083	0.16
11	2.25	0.0948	0.0758	-0.2601	0.2167	0.0829	0.108
12	2.5	0.0472	0.0378	-0.1799	0.1382	0.0509	0.0602
13	2.75	0.0155	0.0124	-0.0923	0.0653	0.0205	0.0223
14	3	0	0	0	0	0	0
15	3.25	-0.0061	-0.0049	0.0768	-0.0499	-0.0106	-0.0104
16	3.5	-0.0097	-0.0078	0.1228	-0.0799	-0.0169	-0.0167
17	3.75	-0.0113	-0.009	0.1427	-0.0928	-0.0196	-0.0194
18	4	-0.0111	-0.0089	0.1404	-0.0913	-0.0193	-0.0191
19	4.25	-0.0095	-0.0076	0.1206	-0.0785	-0.0166	-0.0164
20	4.5	-0.0069	-0.0056	0.0878	-0.0571	-0.0121	-0.0119
21	4.75	-0.0036	-0.0029	0.0461	-0.03	-0.0063	-0.0063
22	5	0	0	0	0	0	0
Mnożnik	L	L				$L^3/EI$	$L^2/EI$
$\delta_{\alpha 5}$		-4.5520	5.9809	0.0000			
$\delta_{\alpha 6}$		3.5497	-6.6788	-2.3473			
$\delta_{\alpha \alpha}$		8.1017	12.6597	2.3473			
$1/\delta_{\alpha \alpha}$		<b>0.123431</b>	<b>0.078991</b>	<b>0.426021</b>			
$-1/\delta_{\alpha \alpha}$		<b>-0.123431</b>	<b>-0.078991</b>	<b>-0.426021</b>			
$\Delta_{\alpha 5}$		0.56186	-0.47244	0.00000			
$\Delta_{\alpha 6}$		-0.43814	0.52756	1.00000			
$\Delta_{\alpha}$		1.00000	-1.00000	-1.00000			

1.4. WYKRESY



LINIE WPŁYWU – przykład 3 – Obliczenia komputerowe

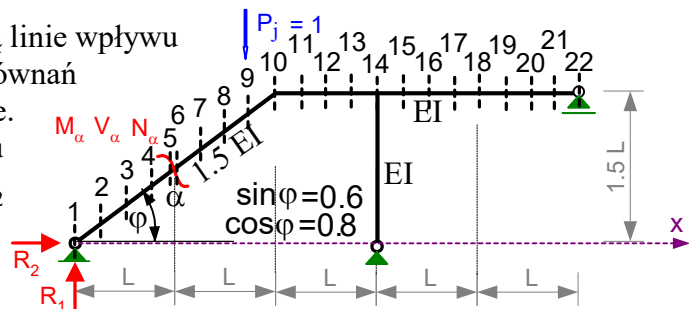




### 1.5. SPOSÓB STATYCZNY POŚREDNI SPORZĄDZANIA LINII WPŁYWU SIŁ PRZEKROJOWYCH

Sposób ten znajduje zastosowanie, gdy znane są linie wpływu wielkości statycznych, poprzez które można z równań równowagi wyrazić szukane wielkości statyczne. Dla wyznaczenia sił przekrojowych w przekroju  $\alpha$  wystarczająca jest znajomość reakcji  $R_1$  i  $R_2$  (rysunek obok).

Z równań równowagi części ramy po lewej stronie przekroju  $\alpha$  wynika, że



$$M_\alpha(x) = \bar{M}_\alpha^1 \cdot R_1(x) + \bar{M}_\alpha^2 \cdot R_2(x) + \bar{M}_\alpha^j(x),$$

$$V_\alpha(x) = \bar{V}_\alpha^1 \cdot R_1(x) + \bar{V}_\alpha^2 \cdot R_2(x) + \bar{V}_\alpha^j(x), \quad N_\alpha(x) = \bar{N}_\alpha^1 \cdot R_1(x) + \bar{N}_\alpha^2 \cdot R_2(x) + \bar{N}_\alpha^j(x)$$

gdzie  $\bar{M}_\alpha^1 = L$ ,  $\bar{M}_\alpha^2 = -0.75L$ ,  $\bar{V}_\alpha^1 = \cos \varphi = 0.8$ ,  $\bar{V}_\alpha^2 = -\sin \varphi = -0.6$ ,

$\bar{N}_\alpha^1 = -\sin \varphi = -0.6$  i  $\bar{N}_\alpha^2 = -\cos \varphi = -0.8$  - momenty, siły tnące i osiowe w przekroju  $\alpha$

od jednostkowych wartości reakcji  $R_1$  i  $R_2$ ,

$$\bar{M}_\alpha^j(x) = \begin{cases} -(L-x) & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju } \alpha \\ 0 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju } \alpha \end{cases},$$

$$\bar{V}_\alpha^j(x) = \begin{cases} -\cos \varphi = -0.8 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju } \alpha \\ 0 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju } \alpha \end{cases}$$

$$\bar{N}_\alpha^j(x) = \begin{cases} \sin \varphi = 0.6 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju } \alpha \\ 0 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju } \alpha \end{cases}$$

- moment zginający, siła tnąca i osiowa w przekroju  $\alpha$  od siły jednostkowej ustawionej w punkcie  $j$ .  
 $R_1(x)$  i  $R_2(x)$  - linie wpływu reakcji  $R_1$  i  $R_2$  wyznaczone dowolnym sposobem.

W tabeli poniżej zestawiono dane i wyniki obliczeń linii wpływu sił przekrojowych w przekroju  $\alpha$  na podstawie związków przedstawionych powyżej.



Położenie siły		$R_1^j = R_1(x)$	$R_2^j = R_2(x)$	$\overline{M}_\alpha^j$	$M_\alpha^j = M_\alpha(x)$	$\overline{V}_\alpha^j$	$V_\alpha^j = V_\alpha(x)$	$\overline{N}_\alpha^j$	$N_\alpha^j = N_\alpha(x)$
j	x								
1	0	1	0	-1	0	-0.8	0	0.6	0
2	0.25	0.9103	0.0433	-0.75	0.1278	-0.8	-0.0977	0.6	0.0192
3	0.5	0.8209	0.0847	-0.5	0.2574	-0.8	-0.1941	0.6	0.0397
4	0.75	0.7318	0.1223	-0.25	0.3901	-0.8	-0.2879	0.6	0.0631
5	1	0.6433	0.1543	0	0.5276	-0.8	-0.3779	0.6	0.0906
6						0	0.4221	0	-0.5094
7	1.25	0.5556	0.1788	0	0.4215	0	0.3372	0	-0.4764
8	1.5	0.4688	0.1938	0	0.3235	0	0.2588	0	-0.4363
9	1.75	0.3832	0.1975	0	0.2351	0	0.1881	0	-0.3879
10	2	0.299	0.188	0	0.1580	0	0.1264	0	-0.3298
11	2.25	0.2167	0.1626	0	0.0948	0	0.0758	0	-0.2601
12	2.5	0.1382	0.1213	0	0.0472	0	0.0378	0	-0.1800
13	2.75	0.0653	0.0663	0	0.0156	0	0.0125	0	-0.0922
14	3	0	0	0	0	0	0	0	0
15	3.25	-0.0499	-0.0585	0	-0.0060	0	-0.0048	0	0.0767
16	3.5	-0.0799	-0.0936	0	-0.0097	0	-0.0078	0	0.1228
17	3.75	-0.0928	-0.1088	0	-0.0112	0	-0.0090	0	0.1427
18	4	-0.0913	-0.107	0	-0.0111	0	-0.0088	0	0.1404
19	4.25	-0.0785	-0.0919	0	-0.0096	0	-0.0077	0	0.1206
20	4.5	-0.0571	-0.0669	0	-0.0069	0	-0.0055	0	0.0878
21	4.75	-0.03	-0.0351	0	-0.0037	0	-0.0029	0	0.0461
22	5	0	0	0	0	0	0	0	0
Mnożnik	L			L	L				

Jak widać, otrzymane wyniki są z dokładnością do 0.0001 identyczne z wynikami uzyskanymi poprzednio.

## 2. SPORZĄDZENIE LINII WPŁYWU SIŁ I PRZEMIESZCZEŃ W RAMIE IZOSTATYCZNEJ

Przedstawione powyżej sposoby wyznaczania rzędnych linii wpływu dotyczą zarówno układów hiperstatycznych jak i izostatycznych. Różnica polega jedynie na tym, że linie wpływu wielkości statycznych w układach izostatycznych składają się z odcinków prostych i do ich narysowania wystarczy wyznaczyć tylko wartości na granicach przedziałów. Przy ich wyznaczaniu można też przyjmować dowolne sztywności prętów gdyż nie mają one żadnego wpływu na wartości sił w układach izostatycznych.

### 2.1. DANE WYJŚCIOWE DO OBLICZEŃ

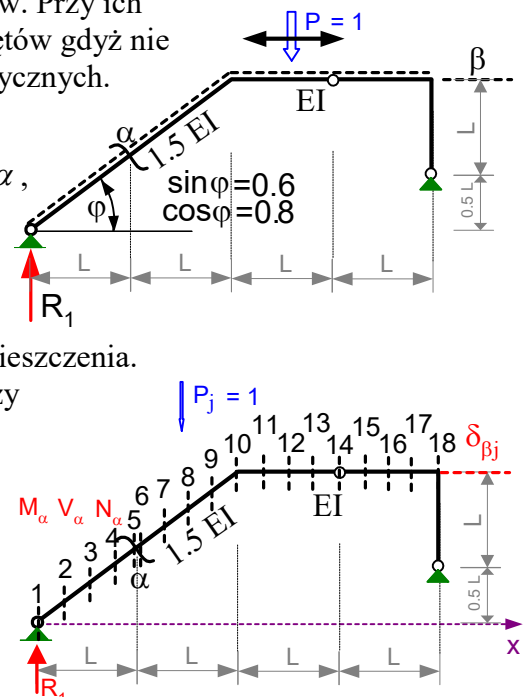
Wyznaczyć linie wpływu sił przekrojowych w przekroju  $\alpha$ , reakcji  $R_1$  i przemieszczenia w miejscu i kierunkach  $\beta$ .

### 2.2. SPOSÓB BEZPOŚREDNI

Na rysunku obok zilustrowano ustawienia siły jednostkowej (1-18) w celu wyznaczenia linii wpływu przemieszczenia. Wyznaczając linię wpływu przemieszczenia konieczne należy uwzględnić odpowiednie sztywności prętów.

Linia wpływu reakcji  $R_1$  składa się z 2 odcinków (1-14 i 14-18) wystarczy, więc dokonać odczytów dla ustawień 1, 14 i 18. Linie wpływu sił przekrojowych w przekroju  $\alpha$  składają się z 3 odcinków (1-5, 6-14 i 14-18) wystarczy, więc dokonać odczytów dla ustawień 1, 5, 6, 14 i 18.

Wyniki zestawiono w tabeli poniżej.



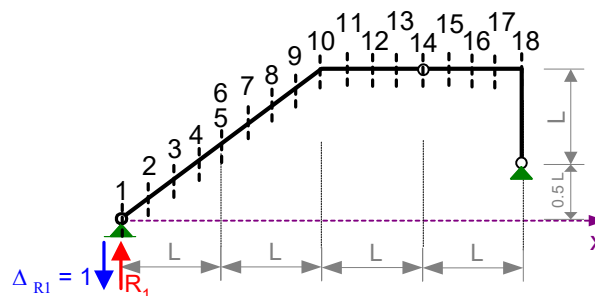
Położenie siły		$M_\alpha^j = M_\alpha(x)$	$V_\alpha^j = V_\alpha(x)$	$N_\alpha^j = N_\alpha(x)$	$R_1^j = R_1(x)$	$\delta_{\beta j} = \delta_\beta(x)$
j	x					
1	0	0	0	0	1	0
2	0.25					0.0516
3	0.5					0.1010
4	0.75					0.1462
5	1	0.6111111111	-0.3111111111	0.0906		0.1847
6			0.4888888889	-0.5094		
7	1.25					0.2146
8	1.5					0.2336
9	1.75					0.2396
10	2					0.2305
11	2.25					0.2034
12	2.5					0.1608
13	2.75					0.1077
14	3	-0.166666667	-0.133333333	-0.644444444	0.555555556	0.0494
15	3.25					0.0240
16	3.5					0.0039
17	3.75					-0.0059
18	4	0	0	0	0	0
Mnożnik	L	L				$L^3/EI$

### 2.3. SPOSÓB WYKORZYSTUJĄCY TWIERDZENIA O WZAJEMNOŚCI

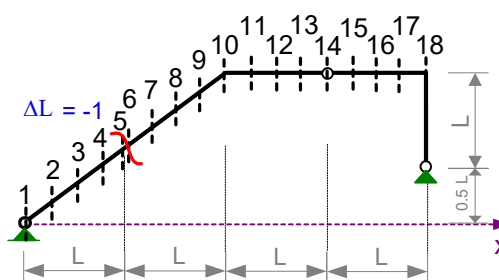
#### 2.3.1. SPOSÓB KINEMATYCZNY SPORZĄDZANIA LINII WPŁYWU WIELKOŚCI STATYCZNYCH

Uwzględniając fakt, że programy komputerowe z reguły pozwalają na wymuszanie przemieszczeń podpór, czasami na wymuszanie zmian długości prętów i z reguły nie dają możliwości wymuszania zmian kątów i przesunięć poprzecznych w przekrojach prętów rozwiązanie tym sposobem ograniczymy do linii wpływu reakcji  $R_1$  i siły osiowej w przekroju  $\alpha$ .

**W celu wyznaczenia linii wpływu reakcji  $R_1$**  wymuszamy jednostkowe przemieszczenie podpory  $\Delta_{R1} = 1$  ze zwrotem przeciwnym niż przyjęty zwrot reakcji (rysunek obok) i odczytujemy rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczeń) „toru siły jednostkowej”, które są rzędnymi linii wpływu reakcji  $R_1 \equiv r_{R1j} = -\delta_{jR1} = v_{jR1}$ . Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 2.3.3.



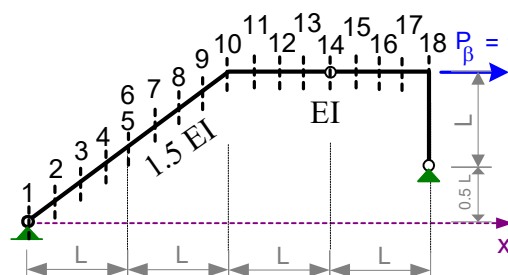
**W celu wyznaczenia linii wpływu siły osiowej w przekroju  $\alpha$**  wymuszamy skrócenie pręta  $\Delta L_\alpha = -1$  w przekroju  $\alpha$  (rysunek obok) i odczytujemy rzędne linii ugięcia, które są rzędnymi linii wpływu. Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 2.3.3.



#### 2.3.2. WYZNACZENIE LINII WPŁYWU PRZEMIESZCZENIA

W celu wyznaczenia linii wpływu przemieszczenia  $\delta_{\beta j}$  obciążamy ramę siłą jednostkową  $P_\beta = 1$  (rysunki obok) i odczytujemy rzędne  $\delta_{j\beta}$  to jest rzędne linii ugięcia (składowe pionowe przemieszczeń) w punktach 1-18.

Wyniki zestawiono w tabeli w punkcie 2.3.3.

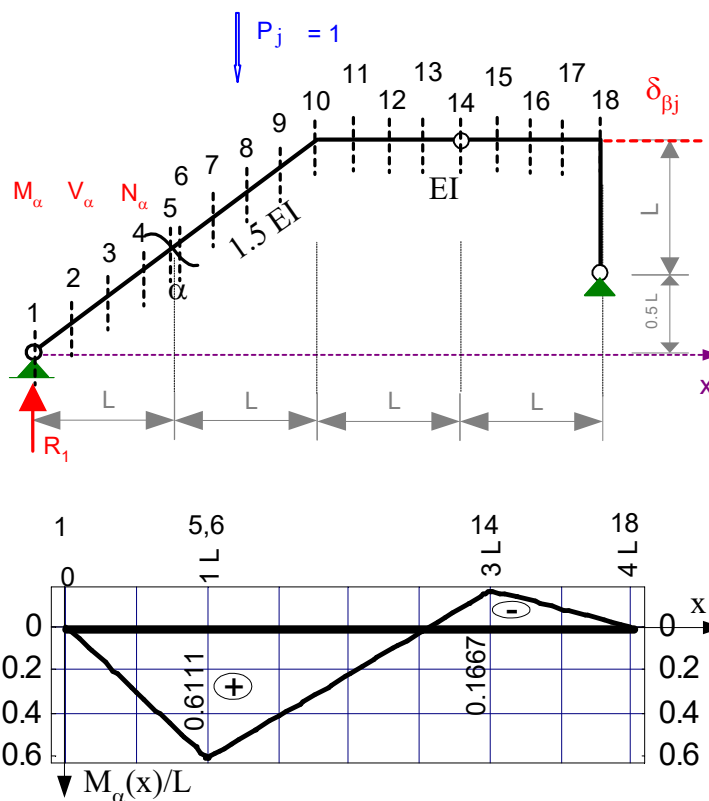


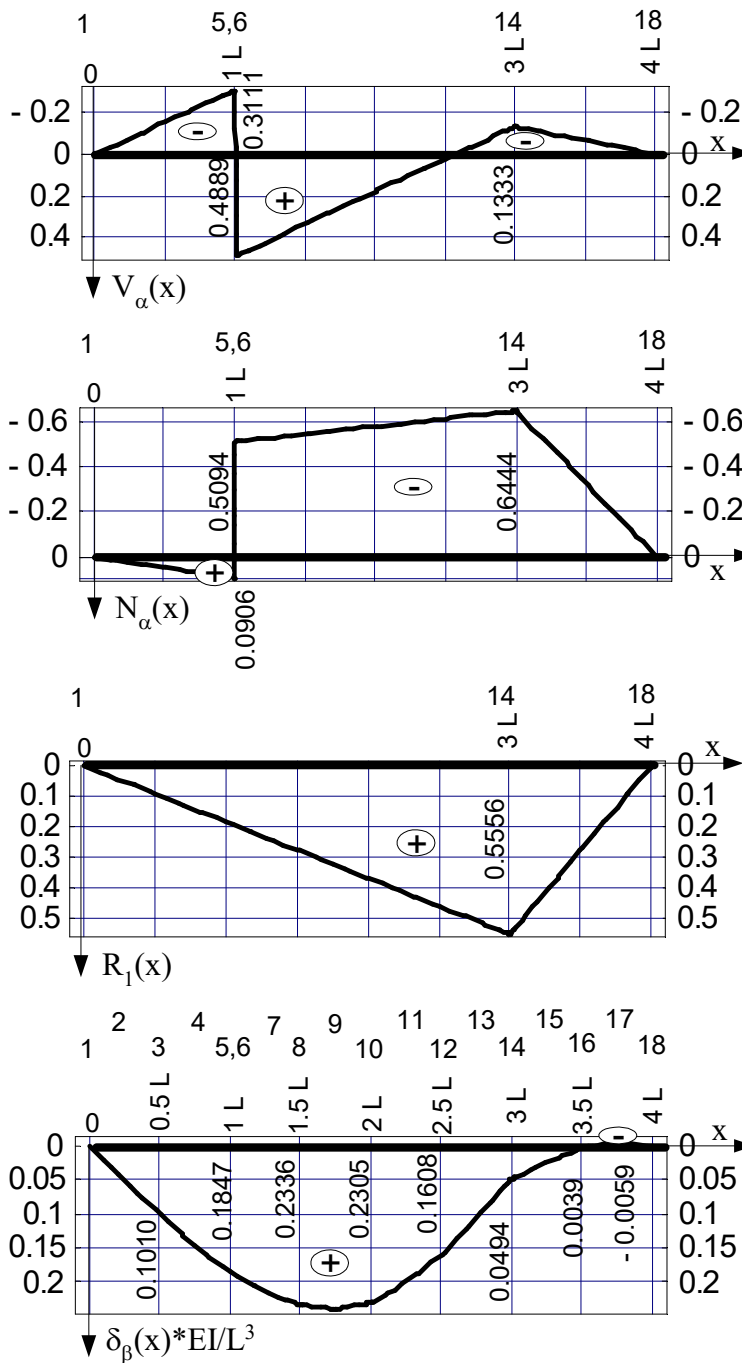
### 2.3.3. ZESTAWIENIE WYNIKÓW ROZWIĄZAŃ Z WYKORZYSTANIEM TWIERDZEŃ O WZAJEMNOŚCI

W tabeli poniżej zestawiono wartości rzędnych linii wpływu uzyskane z wykorzystaniem twierdzeń o wzajemności. Są one, oczywiście, identyczne jak wartości uzyskane sposobem bezpośrednim.

Punkty odczytu rzędnych		$N_{\alpha}^j = N_{\alpha}(x)$ $= v_{j\alpha}$	$R_1^j = R(x)$ $= v_{j\Delta r}$	$\delta_{\beta_j} = \delta_{\beta}(x)$ $= v_{j\beta}$
j	x			
1	0	0	1	0
2	0.25		0.3125	0.0516
3	0.5		0.625	0.1010
4	0.75		0.9375	0.1462
5	1	0.0906		0.1847
6		-0.5094		
7	1.25			0.2146
8	1.5			0.2336
9	1.75			0.2396
10	2			0.2305
11	2.25			0.2034
12	2.5			0.1608
13	2.75			0.1077
14	3	-0.64444444	0.55555556	0.0494
15	3.25			0.0240
16	3.5			0.0039
17	3.75			-0.0059
18	4	0	0	0
Mnożnik	L			$L^3/EI$

### 2.4. WYKRESY





## 2.5. SPOSÓB STATYCZNY POŚREDNI SPORZĄDZANIA LINII WPŁYWU SIŁ PRZEKROJOWYCH

Postępujemy analogicznie jak w punkcie 1.5.

Z równań równowagi części ramy po lewej stronie przekroju  $\alpha$  wynika, że

$$M_\alpha(x) = \bar{M}_\alpha^1 \cdot R_1(x) + \bar{M}_\alpha^2 \cdot R_2(x) + \bar{M}_\alpha^j(x),$$

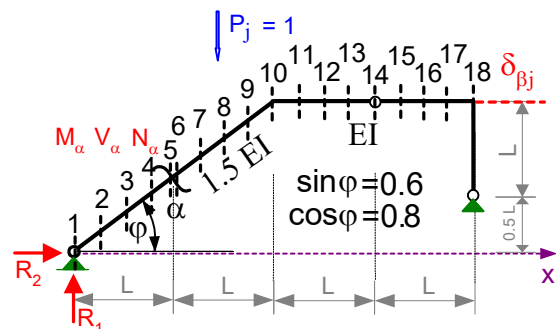
$$V_\alpha(x) = \bar{V}_\alpha^1 \cdot R_1(x) + \bar{V}_\alpha^2 \cdot R_2(x) + \bar{V}_\alpha^j(x),$$

$$N_\alpha(x) = \bar{N}_\alpha^1 \cdot R_1(x) + \bar{N}_\alpha^2 \cdot R_2(x) + \bar{N}_\alpha^j(x)$$

gdzie  $\bar{M}_\alpha^1 = L$ ,  $\bar{M}_\alpha^2 = -0.75L$ ,  $\bar{V}_\alpha^1 = \cos\varphi = 0.8$ ,

$$\bar{V}_\alpha^2 = -\sin\varphi = -0.6,$$

$$\bar{N}_\alpha^1 = -\sin\varphi = -0.6 \text{ i } \bar{N}_\alpha^2 = -\cos\varphi = -0.8,$$



LINIE WPŁYWU – przykład 3 – Obliczenia komputerowe

$$\overline{M}_\alpha^j(x) = \begin{cases} -(L-x) & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju } \alpha \\ 0 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju } \alpha \end{cases}$$

$$\overline{V}_\alpha^j(x) = \begin{cases} -\cos \varphi = -0.8 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju } \alpha \\ 0 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju } \alpha \end{cases}$$

$$\overline{N}_\alpha^j(x) = \begin{cases} \sin \varphi = 0.6 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju } \alpha \\ 0 & \text{gdy siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju } \alpha \end{cases}$$

W tabeli poniżej zestawiono dane i wyniki obliczeń linii wpływu sił przekrojowych w przekroju  $\alpha$  na podstawie związków przedstawionych powyżej.

Położenie siły		$R_1^j = R_1(x)$	$R_2^j = R_2(x)$	$\overline{M}_\alpha^o$	$M_\alpha^j = M_\alpha(x)$	$V_\alpha^o$	$\overline{V}_\alpha^j = V_\alpha(x)$	$\overline{N}_\alpha^o$	$N_\alpha^j = N_\alpha(x)$
j	x								
1	0	1	0	-1	0	-0.8	0	0.6	0
2	0.25								
3	0.5								
4	0.75								
5	1	0.777777778	0.222222222	0	0.6111	-0.8	-0.3111	0.6	-0.0444
6						0	0.4889	0	-0.6444
7	1.25								
8	1.5								
9	1.75								
10	2								
11	2.25								
12	2.5								
13	2.75								
14	3	0.333333333	0.666666667	0	-0.1667	0	-0.1333	0	-0.7333
15	3.25								
16	3.5								
17	3.75								
18	4	0	0	0	0	0	0	0	0
Mnożnik	L			L	L				

Jak widać, otrzymane wyniki są identyczne z wynikami uzyskanymi poprzednio.