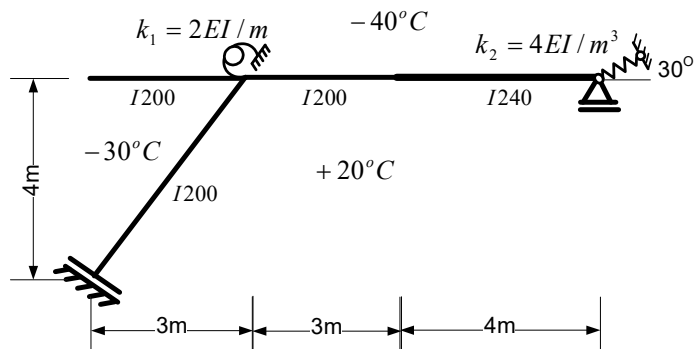


## ROZWIĄZANIE RAMY METODĄ PRZEMIESZCZEŃ OD ZMIANY TEMPERATURY

Ramę pokazaną na rysunku rozwiązać metodą przemieszczeń i dokonać kontroli rozwiązania.



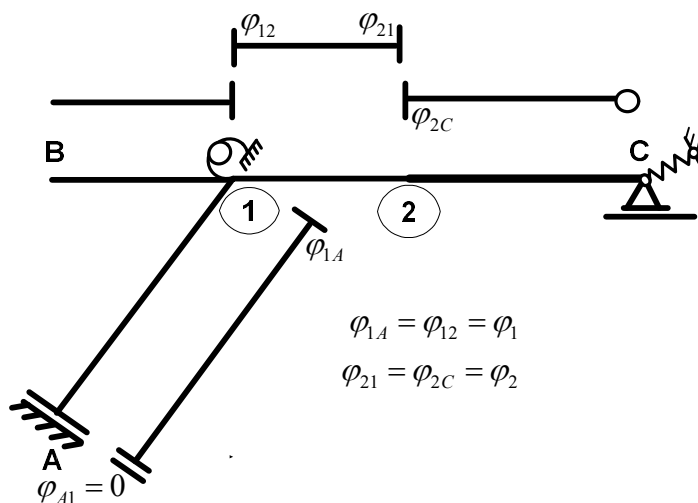
### 1. WYZNACZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

#### 1.1 PODZIAŁ NA ELEMENTY I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW $n_\varphi$

Na rys. obok przedstawiono podział układu na elementy, dla których dane są wzory transformacyjne.

Zaznaczono 5 kątów

( $\varphi_{A1}, \varphi_{1A}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{2C}$ ), które wystąpiły by w tych wzorach gdyby zostały one wypisane. Jak widać wszystkie te kąty określone są przez 2 kąty obrotu węzłów ( $\varphi_1, \varphi_2$ ), co oznacza, że  $n_\varphi = 2$ .



#### 1.2 WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW $n_\delta$

a) Model przegubowy przedstawiono na rysunku obok. Więzi oznaczone liniami przerywanymi odbierają stopnie swobody przesuwu, które zostają uwzględnione w współczynnikach wzorów transformacyjnych (dotyczy to elementu wspornikowego 1B i elementu „s-ł” 1A).

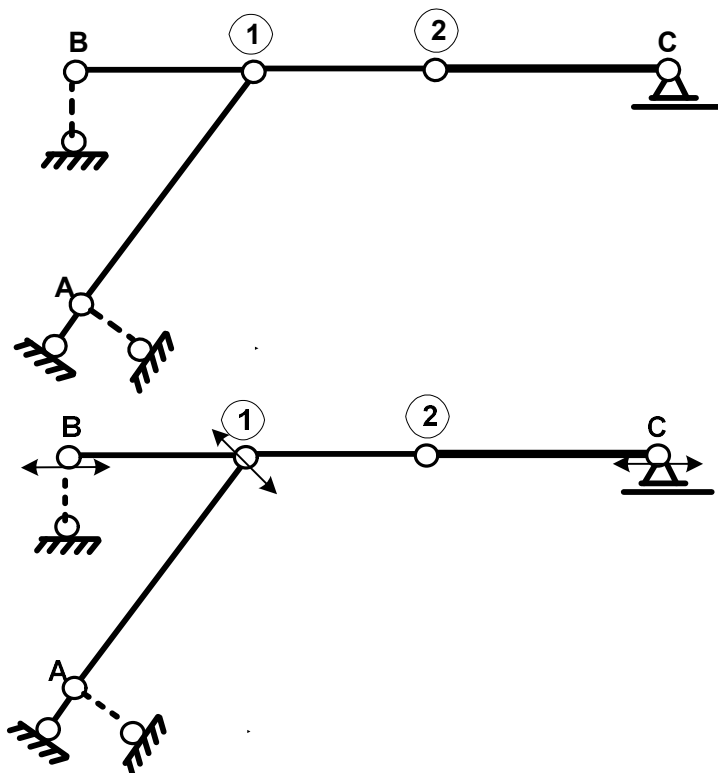
b) Oszacowanie

$$n_\delta \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 8 - 7 - 7 = 2,$$

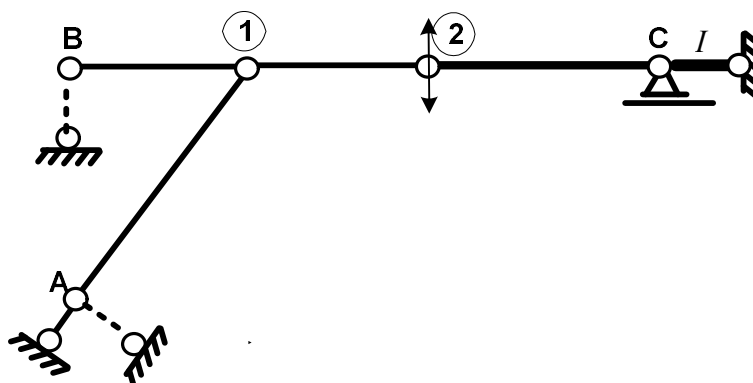
$n_\delta \geq 2$ . Wynika stąd, że model przegubowy ma co najmniej 2 stopnie swobody przesuwu (aby stał się geometrycznie niezmienny należy dodać, co najmniej 2 więzi).

c) Analiza kinematyczna

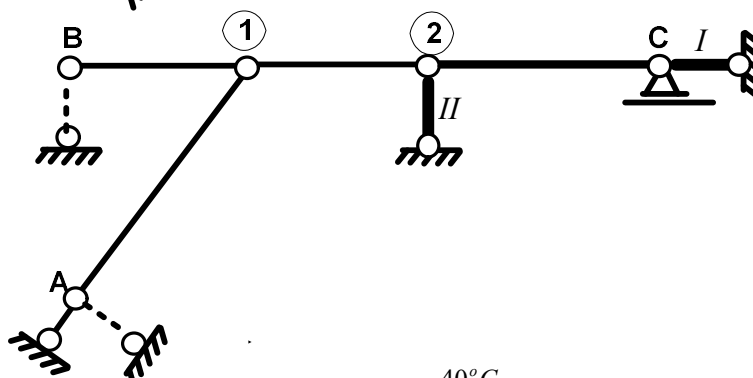
Na rys. obok pokazano model przegubowy z zaznaczonymi, strzałkami, możliwymi kierunkami przesunięć węzłów. Węzeł 2 także ma możliwość przesuwania się, ale kierunek możliwości przesuwu tego węzła nie jest jeszcze określony.



Na rys. obok pokazano model przegubowy z dodaną więzią I, która wyeliminowała zaznaczone powyżej możliwe przesunięcia oraz zaznaczono możliwy jeszcze kierunek przesunięcia węzła 2.

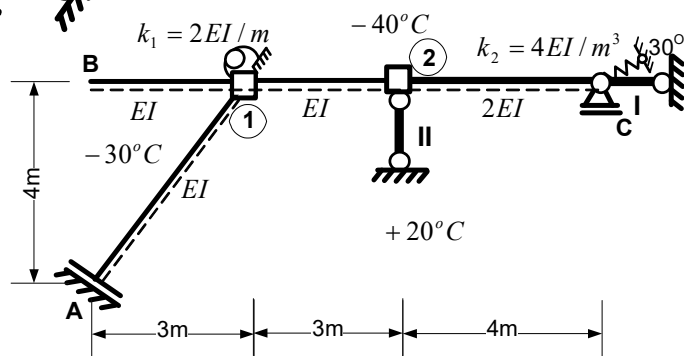


Na rys. obok pokazano model przegubowy z dodanymi 2 więziami I, II, których dodanie sprawiło, że model przegubowy stał się geometrycznie niezmienny, co oznacza, że  $n_\delta = 2$ .



## 2. UKŁAD PODSTAWOWY

Wykorzystując oznaczenia przyjęte w układzie podstawowym, danym przyrostom temperatury przypiszemy odpowiednie oznaczenia oraz znaki:



$$\Delta T_{w_{A1}} = 20^\circ C, \quad \Delta T_{p_{A1}} = -30^\circ C, \quad \Delta T_{A1} = \Delta T_{w_{A1}} - \Delta T_{p_{A1}} = (20 - (-30))^\circ C = 50^\circ C,$$

$$\Delta T_{o_{A1}} = (\Delta T_{w_{A1}} + \Delta T_{p_{A1}}) / 2 = (20 + (-30)) / 2^\circ C = -5^\circ C, \quad \Delta L_{A1}^T = \alpha_T \cdot \Delta T_{o_{A1}} \cdot L_{A1} = \alpha_T \cdot (-5)^\circ C \cdot 5m = -25 \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C \cdot m$$

$$\Delta T_{w_{B1}} = -30^\circ C, \quad \Delta T_{p_{B1}} = -40^\circ C, \quad \Delta T_{B1} = \Delta T_{w_{B1}} - \Delta T_{p_{B1}} = (-30 - (-40))^\circ C = 10^\circ C,$$

$$\Delta T_{o_{B1}} = (\Delta T_{w_{B1}} + \Delta T_{p_{B1}}) / 2 = (-30 + (-40)) / 2^\circ C = -35^\circ C, \quad \Delta L_{B1}^T = \alpha_T \cdot \Delta T_{o_{B1}} \cdot L_{B1} = \alpha_T \cdot (-35)^\circ C \cdot 3m = -105 \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C \cdot m,$$

$$\Delta T_{w_{12}} = 20^\circ C, \quad \Delta T_{p_{12}} = -40^\circ C, \quad \Delta T_{12} = \Delta T_{w_{12}} - \Delta T_{p_{12}} = (20 - (-40))^\circ C = 60^\circ C,$$

$$\Delta T_{o_{12}} = (\Delta T_{w_{12}} + \Delta T_{p_{12}}) / 2 = (20 + (-40)) / 2^\circ C = -10^\circ C, \quad \Delta L_{12}^T = \alpha_T \cdot \Delta T_{o_{12}} \cdot L_{12} = \alpha_T \cdot (-10)^\circ C \cdot 3m = -30 \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C \cdot m,$$

$$\Delta T_{w_{2C}} = 20^\circ C, \quad \Delta T_{p_{2C}} = -40^\circ C, \quad \Delta T_{2C} = \Delta T_{w_{2C}} - \Delta T_{p_{2C}} = (20 - (-40))^\circ C = 60^\circ C.$$

$$\Delta T_{o_{2C}} = (\Delta T_{w_{2C}} + \Delta T_{p_{2C}}) / 2 = (20 + (-40)) / 2^\circ C = -10^\circ C, \quad \Delta L_{2C}^T = \alpha_T \cdot \Delta T_{o_{2C}} \cdot L_{2C} = \alpha_T \cdot (-10)^\circ C \cdot 4m = -40 \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C \cdot m,$$

W celu wykonywania obliczeń bez konieczności wstawiania wartości za sztywności prętów  $EI_{ij}$  i sztywności więzi sprężystych przyjmiemy sztywność porównawczą  $EI$ .

$$EI = EI_{1200} = 205000000kN / m^2 \cdot 0.00002140m^4 = 4387kNm^2,$$

$$EI_{1240} = 205000000kN / m^2 \cdot 0.00004250m^4 = 8712.5kNm^2 = \frac{8712.5kNm^2}{4387kNm^2} \cdot EI = 2EI$$

## 3. ROZWIĄZANIA UKŁADU PODSTAWOWEGO

### 3.1 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA DANEGO

Momenty brzegowe  $M_{ij}^{oT}(\Delta T_{ij})$  od różnic przyrostów temperatury w włóknach (wpływ lokalny):

$$M_{A1}^{oT}(\Delta T_{A1}) = -(EI/h)_{A1} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_{A1} = -250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -M_{1A}^{oT}(\Delta T_{A1}),$$

$$M_{B1}^{oT}(\Delta T_{B1}) = M_{1B}^{oT}(\Delta T_{B1}) = 0,$$

$$M_{12}^{oT}(\Delta T_{12}) = -\frac{EI_{12}}{h_{12}} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_{12} = -\frac{EI}{0.2m} \cdot \alpha_T \cdot 60^\circ C = -300^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -M_{21}^{oT}(\Delta T_{12})$$

$$M_{2C}^{oT}(\Delta T_{2C}) = -1.5 \cdot \frac{EI_{2C}}{h_{2C}} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_{2C} = -\frac{1.5 \cdot 2EI}{0.24m} \cdot \alpha_T \cdot 60^\circ C = -750^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m, \quad M_{C2}^{oT}(\Delta T_{2C}) = 0$$

**Momenty brzegowe  $M_{ij}^{oT}(\Delta T_o)$  od zmian długości prętów  $\Delta L^T = L \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_o$  wywołanych zmianami temperatury zależne od zmian temperatury w osiach prętów  $\Delta T_o$  (wpływ globalny) są określone wzorem  $M_{ij}^{oT}(\Delta T_o) = -c_{ij} \cdot (EI/L)_{ij} \cdot \psi_{ij}^T$  ( $\psi_{ij}^T = \Delta_{ij}^T / L_{ij}$ ).**

W rozwiązywanym przykładzie  $M_{A1}^o(\Delta T_o) = M_{1A}^o(\Delta T_o) = M_{B1}^o(\Delta T_o) = M_{1B}^o(\Delta T_o) = 0$ , gdyż dla pręta wspornikowego i sztywno łożwowego  $\psi_{A1}^T = \psi_{B1}^T = 0$ . Więc różne od zera mogą być tylko  $M_{ij}^{oT}(\Delta T_o)$  dla prętów 12 i 2C. Różne od zera mogą też być zmiany długości więzi sprężystych. Wyznaczyć, więc trzeba  $\Delta L_{12}^T$  i  $\Delta L_{2C}^T$  oraz  $\Delta L_s^T$ . Cel ten zrealizujemy zadając przemieszczenia węzłów wywołujące przemieszczenia odpowiadające poszczególnym zmianom długości prętów. Zmiany długości prętów od zmian temperatury obliczono w pktcie 2. Przemieszczenia zadamy tak by odpowiadały wydłużeniom prętów dzięki czemu obliczone powyżej wartości będziemy uwzględniać wstawiając je z obliczonymi znakami.

### Zmianę długości pręta A1

$\Delta L_{A1}^T$  zrealizujemy zadając przemieszczenie węzła A wzdłuż osi pręta A1 o  $\Delta L_{A1}^T$  jak na rys obok (w b.p.p.o. zadano obrót w prawo). Jak wynika z rys obok:

$$\Delta_{12}(\Delta L_{A1}^T) = 1''2'' = y = \frac{5}{4} \cdot \Delta L_{A1}^T \Rightarrow$$

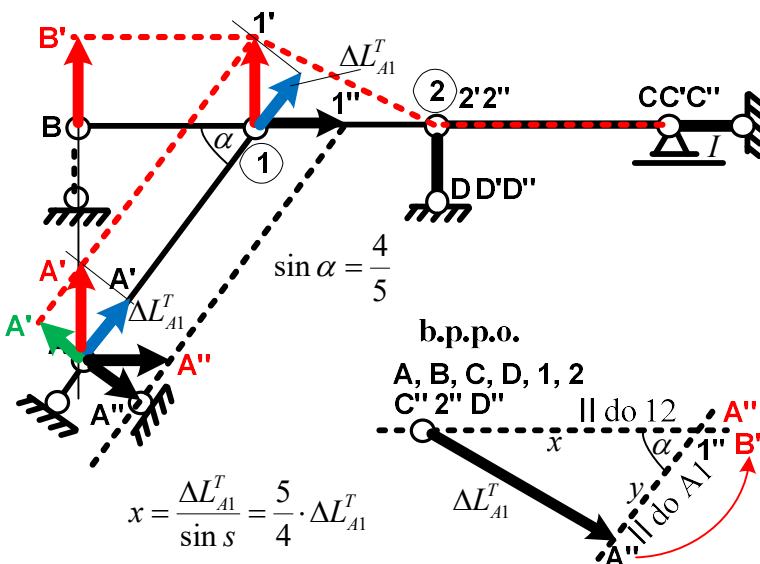
$$\psi_{12}(\Delta L_{A1}^T) = \frac{\Delta_{12}(\Delta L_{A1}^T)}{L_{12}} =$$

$$= \frac{5}{4 \cdot 3m} \cdot (-25^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T) =$$

$$= -10.41667^\circ C \cdot \alpha_T,$$

$$\Delta_{2C}(\Delta L_{A1}^T) = -2''C'' = 0 \Rightarrow \psi_{2C}(\Delta L_{A1}^T) = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej:  $\Delta L_{st}^{oT} = 0$ , gdyż podpora C w rzeczywistości nie zmienia położenia.



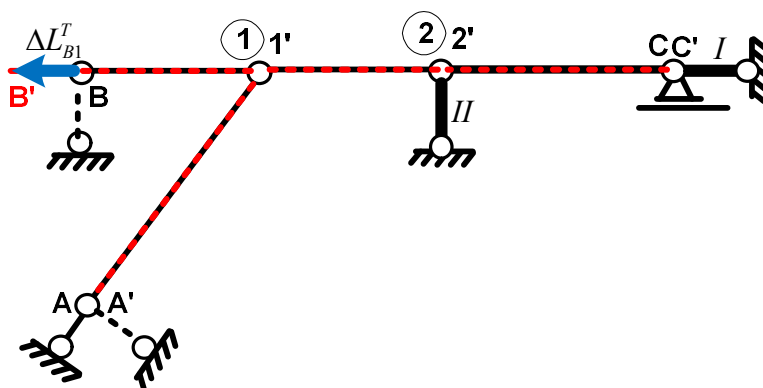
### Zmiana długości pręta B1

$\Delta L_{B1}^T$ , ze względu na brak podparcia węzła B wzdłuż osi pręta B1, nie ma wpływu na przemieszczenia węzłów poza węzłem B, jak to pokazano na rys obok.

$$\psi_{A1}(\Delta L_{B1}^T) = \psi_{B1}(\Delta L_{B1}^T) = 0,$$

$$\psi_{12}(\Delta L_{B1}^T) = \psi_{2C}(\Delta L_{B1}^T) = 0.$$

$$\Delta L_{st}^{oT} = 0$$



**Zmianę długości pręta 12**  $\Delta L_{12}^T$  zrealizujemy zadając przemieszczenie węzła C wzdłuż osi pręta 12 i 2C o  $\Delta L_{12}^T$ , jak na rys obok (w b.p.p.o. zadano obrót w prawo).

Jak wynika z rys:

$$\Delta_{12}(\Delta L_{12}^T) = 1''2'' = y = \frac{3}{4} \cdot \Delta L_{12}^T \Rightarrow$$

$$\psi_{12}(\Delta L_{12}^T) = \frac{\Delta_{12}(\Delta L_{12}^T)}{L_{12}} =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 3m} \cdot (-30^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T) = -7.5^\circ C \cdot \alpha_T,$$

$$\Delta_{2C}(\Delta L_{12}^T) = -2''C'' = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{2C}(\Delta L_{12}^T) = 0., \quad \Delta L_{st}^{oT} = 0$$

**Zmianę długości pręta 2C**

$\Delta L_{2C}^T$  zrealizujemy zadając przemieszczenie węzła C wzdłuż osi pręta 2C o  $\Delta L_{2C}^T$ , jak na rys obok (w b.p.p.o. zadano obrót w prawo).  
Jak wynika z rys:

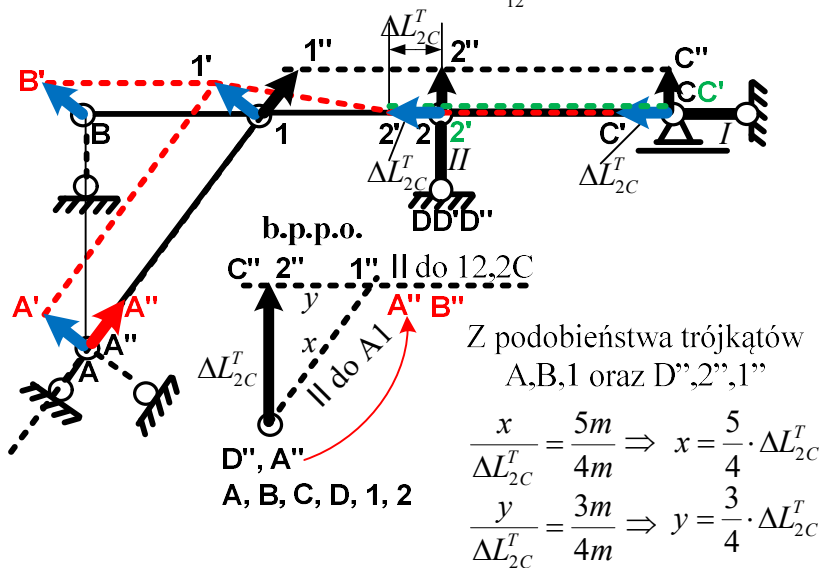
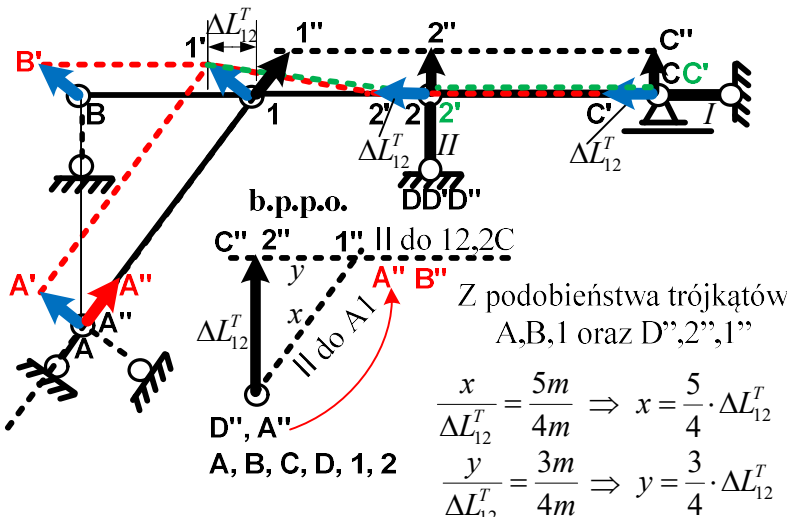
$$\Delta_{12}(\Delta L_{2C}^T) = 1''2'' = y = \frac{3}{4} \cdot \Delta L_{2C}^T \Rightarrow$$

$$\psi_{12}(\Delta L_{2C}^T) = \frac{\Delta_{12}(\Delta L_{2C}^T)}{L_{12}} =$$

$$\frac{3}{4 \cdot 3m} \cdot (-40^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T) = -10^\circ C \cdot \alpha_T$$

$$\Delta_{2C}(\Delta L_{2C}^T) = -2''C'' = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{2C}(\Delta L_{2C}^T) = 0., \quad \Delta L_{st}^{oT} = 0$$



**Kąty obrotu cięwi prętów od wszystkich  $\Delta T_{o_{ij}}$  obliczymy sumując te kąty od  $\Delta T_{o_{ij}}$  dla**

**poszczególnych prętów**  $\psi_{ij}(\Delta T_o) = \psi_{ij}(\Delta T_{o_{A1}}) + \psi_{ij}(\Delta T_{o_{B1}}) + \psi_{ij}(\Delta T_{o_{12}}) + \psi_{ij}(\Delta T_{o_{2C}})$

$$\psi_{A1}(\Delta T_o) = 0, \quad \psi_{B1}(\Delta T_o) = 0, \quad \psi_{2C}(\Delta T_o) = 0,$$

$$\psi_{12}(\Delta T_o) = -(10.41667 + 0 + 7.5 + 10)^\circ C \cdot \alpha_T = -27.91667^\circ C \cdot \alpha_T$$

**Momenty brzegowe od  $\Delta T_o$ :**

$$M_{12}^{oT}(\Delta T_o) = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot (-27.91667)^\circ C \cdot \alpha_T = 55.83334^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m} = M_{21}^o(\Delta T_o),$$

$$M_{A1}^{oT}(\Delta T_o) = M_{B1}^o(\Delta T_o) = M_{2C}^o(\Delta T_o) = 0.$$

**Momenty brzegowe od zmian temperatury**

Wzór:  $M_{ij}^{oT} = M_{ij}^{oT}(\Delta T_{ij}) + M_{A1}^{oT}(\Delta T_o)$

Obliczenia:  $M_{A1}^{oT} = (-250 + 0)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$

$$M_{1A}^{oT} = 250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = 250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m, \quad M_{B1}^{oT} = 0 + 0 = 0,$$

$$M_{12}^{oT} = (-300 + 55.83334)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -244.16666^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$$

$$M_{21}^{oT} = (300 + 55.83334)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = 355.83334^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$$

$$M_{2C}^{oT} = (-750 + 0)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -750^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m, \quad M_{C2}^{oT} = 0.$$

**Zmiana długości więzi sprężystej:**  $\Delta L_{st}^{oT} = 0$

Do wyznaczenia przesunięć węzłów od  $\Delta T_{o_{ij}}$  można też wykorzystać układ związków kinematycznych, na które składają się:

- związki między przemieszczeniami końców prętów a zmianami ich długości

$$u_p \cdot (-\cos \alpha_{pk}) + v_p \cdot (-\sin \alpha_{pk}) + u_k \cdot \cos \alpha_{pk} + v_k \cdot \sin \alpha_{pk} = \Delta L_{pk} = (\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot L)_{pk},$$

- warunki uwzględniające, że kąty obrotu cięciw a więc i wzajemne poprzeczne przesunięcia ich końców dla prętów: wspornikowego i sztywno łożwa są równe zero

$$\Delta_{pk} = u_p \cdot \sin \alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos \alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin \alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos \alpha_{pk} = 0,$$

które można przyjąć w postaci  $-u_p + u_k = \Delta L_{pk} \cdot \cos \alpha_{pk}$ ,  $-v_p + v_k = \Delta L_{pk} \cdot \sin \alpha_{pk}$ ,

- oraz warunki brzegowe:  $-0.6 \cdot u_A + 0.8 \cdot v_A = 0$  (stąd  $v_A = 0.75 \cdot u_A$ ),  $u_C = \delta_I = 0$ ,  $v_C = 0$ ,  $v_2 = \delta_{II} = 0$ .

Układ warunków oraz zestawienie wyników ich rozwiązania przedstawiono w poniższej tabeli (zaznaczono też kolejność wyznaczania zmiennych i z których równań zostały obliczone)

CHARAKTERYSTYKI PRĘTÓW					
Pręt	Lx	Ly	L	cos a	sin a
				Lx/L	Ly/L
A-1	3	-4	5	0.6	-0.8
B-1	3	0	3	1	0
1-2	3	0	3	1	0
2-C	4	0	4	1	0
Mnoż.	m	m	m		

WYDŁUŻENIA PRĘTÓW				
OD ZMIAN TEMPERATURY				
$\Delta T_w$	$\Delta T_p$	$\Delta T$	$\Delta T_o$	$\Delta L$
				$\Delta T_o \cdot L$
20	-30	50	-5	-25
-30	-40	10	-35	-105
20	-40	60	-10	-30
20	-40	60	-10	-40
°C				°C*m* $\alpha_T$

#### UKŁAD RÓWNAŃ

		A		B		1		2		C		
	Pręt	$u_A$	$v_A$	$u_B$	$v_B$	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_C$	$v_C$	
			0.75 $u_A$						0	0	0	War. wyjściowe
1	A-1	-0.6	0.8			0.6	-0.8					= $\Delta L_{A1}$
2	B-1			-1	0	1	0					= $\Delta L_{B1}$
3	1-2					-1	0	1	0			= $\Delta L_{12}$
4	2-C							-1	0	1	0	= $\Delta L_{2C}$
5	A-1	-1				1						= $0.6\Delta L_{A1}$
6	A-1		-1				1					= $-0.8\Delta L_{A1}$
7	B-1				-1		1					= 0
		85	63.75	175	83.75	70	83.75	40	0	0	0	Zest. wyników
		4	5	3	7	2	6	1		Kolejność obliczania zmiennych		
		z r.5	w.b.	z r.2	z r.7	z r.3	z r.6	z r.4		Z równania		

Rozwiązanie powyższego układu równań rozpisano poniżej:

1) z równania 4

$$-u_2 + u_c = \Delta L_{2C} \text{ po uwzględnieniu } u_c = 0$$

$$\text{otrzymujemy } u_2 = -\Delta L_{2C} = 40^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m$$

2) z równania 3

$$-u_1 + u_2 = \Delta L_{12}$$

$$\text{po uwzględnieniu powyższej wartości } u_2$$

$$u_1 = u_2 - \Delta L_{12} = (40 - (-30)) \cdot \alpha_T \cdot m = 70^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

3) z równania 2

$$-u_B + u_1 = \Delta L_{B1}$$

$$\text{po uwzględnieniu powyższej wartości } u_1$$

$$u_B = u_1 - \Delta L_{B1} = (70 - (-105)) \cdot \alpha_T \cdot m = 175^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

4) z równania 5

$$-u_A + u_1 = 0.6 \cdot \Delta L_{A1}$$

$$\text{po uwzględnieniu powyższej wartości } u_1$$

$$u_A = u_1 - 0.6 \cdot \Delta L_{A1} = (175 - 0.6 \cdot (-25)) \cdot \alpha_T \cdot m = 85^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

5) z warunku brzegowego

$$v_A = 0.75 \cdot u_A = 0.75 \cdot 85^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m = 63.75^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

6) z równania 6

$$-v_A + v_1 = -0.8 \cdot \Delta L_{A1}$$

$$\text{po uwzględnieniu powyższej wartości } v_A$$

$$v_1 = v_A - 0.8 \cdot \Delta L_{A1} = (63.75 - 0.8 \cdot (-25)) \cdot \alpha_T \cdot m = 83.75^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

7) z równania 7

$$-v_B + v_1 = 0$$

$$\text{po uwzględnieniu powyższej wartości } v_1$$

$$v_B = v_1 = 83.75^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m,$$

Pozostało równanie 1  $-0.6 \cdot u_A + 0.8 \cdot v_A + 0.6 \cdot u_1 - 0.8 \cdot v_1 = -25^\circ C \cdot \alpha_T \cdot m$ . Równanie to jest spełnione tożsamościowo, gdyż dla pręta A1 wykorzystano 2 równania w postaci 5 i 6.

Wykorzystując powyższe wartości obliczamy wzajemne poprzeczne przesunięcia końców prętów

$$\Delta_{pk} = u_p \cdot \sin \alpha_{pk} + v_p \cdot (-\cos \alpha_{pk}) + u_k \cdot (-\sin \alpha_{pk}) + v_k \cdot \cos \alpha_{pk}$$

i kąty obrotu cięciw  $\psi_{pk} = \Delta_{pk} / L_{pk}$ .

Obliczenia wykonano w tabeli poniżej

WYZNACZENIE  $\Delta_{ij}$  oraz  $\psi_{ij}$  OD ZMIAN TEMPERATURY

Pręt	A		B		1		2		C		$\Delta_{pk}$	$\psi_{pk}$	
	$u_A$	$v_A$	$u_B$	$v_B$	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_C$	$v_C$			
	85	63.75	175	83.75	70	83.75	40	0	0	0			
Mnoż.	$^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T$												
A-1	-0.8	-0.6			0.8	0.6					=	0	0
B-1			0	-1	0	1					=	0	0
1-2					0	-1	0	1			=	-83.75	-27.91667
2-C							0	-1	0	1	=	0	0
Mnożnik											$^\circ C \cdot m \cdot \alpha_T$	$^\circ C \cdot \alpha_T$	

Momenty brzegowe od zmian temperatury w osiach prętów

$$M_{12}^{oT}(\Delta T_o) = -c_{12} \cdot \frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot \psi_{12}^T = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot (-27.916667)^\circ C \cdot \alpha_T = 55.833333^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = M_{21}^o(\Delta T_o).$$

$$M_{A1}^{oT}(\Delta T_o) = M_{1A}^{oT}(\Delta T_o) = M_{B1}^{oT}(\Delta T_o) = M_{1B}^{oT}(\Delta T_o) = M_{2C}^{oT}(\Delta T_o) = M_{C2}^{oT}(\Delta T_o) = 0.$$

Sumaryczne momenty brzegowe od zmian temperatury  $M_{ij}^{oT} = M_{ij}^o(\Delta T) + M_{ij}^{oT}(\Delta T_o)$ .

$$M_{A1}^{oT} = -250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -M_{1A}^T,$$

$$M_{B1}^{oT} = M_{1B}^{oT} = 0,$$

$$M_{12}^{oT} = -244.166667^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$$

$$M_{21}^{oT} = 355.833333^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$$

$$M_{2C}^{oT} = -750^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$$

$$M_{C2}^{oT} = 0.$$

### 3.2 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $\varphi_1 = 1$

(Można nie wykonywać, co pokazano w przykładzie 2b)

Momenty brzegowe: na końcach elementów, które doznały obrotów  $M_{1j}^1 = a_{1j}(EI/L)_{1j}$ ,

na końcach przeciwnych:  $M_{j1}^1 = b_{j1}(EI/L)_{1j}$ . Pozostałe  $M_{ij}^1 = 0$ .

$$M_{1A}^1 = 1 \cdot \frac{EI}{5m} = 0.2 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{A1}^1 = -1 \cdot \frac{EI}{5m} = -0.2 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{1B}^1 = M_{B1}^1 = 0,$$

$$M_{12}^1 = 4 \cdot \frac{EI}{3m} = \frac{4}{3} \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{21}^1 = 2 \cdot \frac{EI}{3m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{2C}^1 = M_{C2}^1 = 0.$$

### 3.3 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $\varphi_2 = 1$

(Można nie wykonywać, co pokazano w przykładzie 2b)

Momenty brzegowe

Wzory:  $M_{2j}^2 = a_{2j}(EI/L)_{2j}$ ,  $M_{j2}^2 = b_{j2}(EI/L)_{2j}$ , Pozostałe  $M_{ij}^2 = 0$ .

$$\text{Obliczenia: } M_{21}^2 = 4 \cdot \frac{EI}{3m} = \frac{4}{3} \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{12}^2 = 2 \cdot \frac{EI}{3m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{2C}^2 = 3 \cdot \frac{2EI}{4m} = 1.5 \cdot \frac{EI}{m}, \quad M_{C2}^2 = 0,$$

$$M_{1Aj}^2 = M_{A1}^2 = M_{1B}^2 = M_{B1}^2 = 0.$$

### 3.4 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $\delta_I = 1$

Na rys. poniżej przedstawiono odkształcony układ przegubowy (przerwane linie żółte) i b.p.p.o. (obrót zadano w prawo).

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów i kątów obrotów cięćw.

$$\Delta_{1A}^I = +|1'' A''| = 0 \Rightarrow \psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = 0, \quad \Delta_{1B}^I = +|1'' B''| = 0 \Rightarrow \psi_{1B}^I = \frac{\Delta_{1B}^I}{L_{1B}} = 0,$$

$$\Delta_{12}^I = -1'' 2'' = -3/4 \Rightarrow$$

$$\psi_{12}^I = -\frac{3}{4 \cdot L},$$

$$\Delta_{2C}^I = |2'' C''| = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{2C}^I = \frac{\Delta_{2C}^I}{L_{2C}} = 0.$$

Wydłużenie sprężystej więzi translacyjnej

$$\delta_{k_1}^I = -1 \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

Momenty brzegowe

(Można nie obliczać, co pokazano w przykładzie 2b)

$$\text{Wzór: } M_{ij}^I = -c_{ij} \cdot \left(\frac{EI}{L}\right)_{ij} \cdot \psi_{ij}^I$$

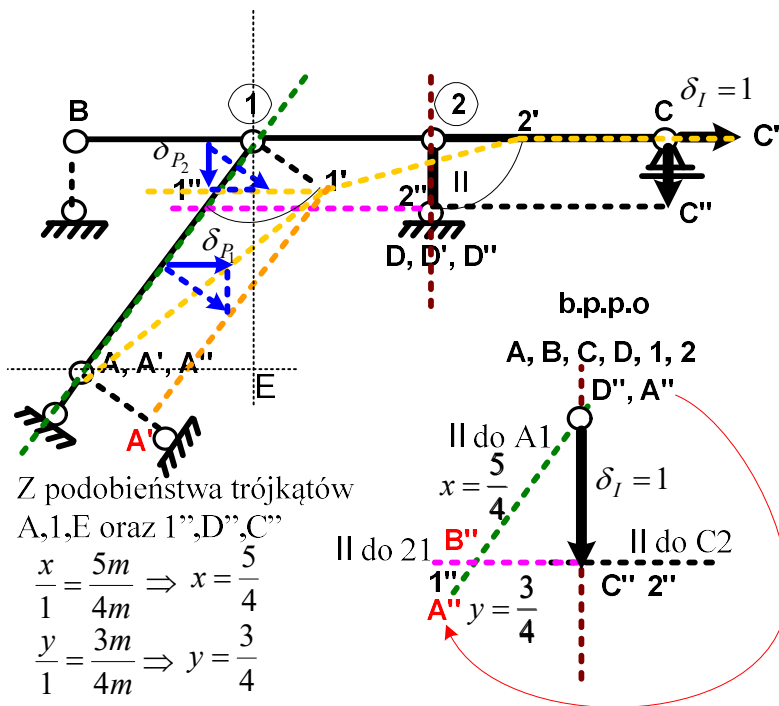
Obliczenia:

$$M_{1A}^I = M_{A1}^I = 0,$$

$$M_{1B}^I + M_{B1}^I = 0,$$

$$M_{12}^I = M_{21}^I = -6 \cdot \frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot \psi_{12}^I = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$M_{2C}^I = -3 \cdot \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot \psi_{2C}^I = 0, \quad M_{C2}^I = 0.$$



### 3.5 ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $\delta_{II} = 1$

Na rys. poniżej przedstawiono odkształcony model przegubowy i b.p.p.o., (tu dokonano obrotu w lewo).

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów i kątów obrotów cięćw

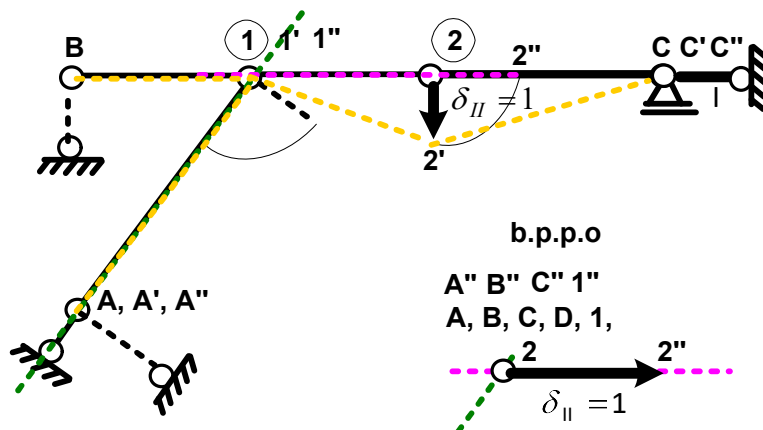
$$\Delta_{1A}^{II} = +|1'' A''| = 0 \Rightarrow \psi_{1A}^{II} = \frac{\Delta_{1A}^{II}}{L_{1A}} = 0,$$

$$\Delta_{1B}^{II} = +|1'' B''| = 0 \Rightarrow \psi_{1B}^{II} = \frac{\Delta_{1B}^{II}}{L_{1B}} = 0$$

$$\Delta_{12}^{II} = |1'' 2''| = 1 \Rightarrow \psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{1}{3m},$$

$$\Delta_{2C}^{II} = -|2'' C''| = -1 \Rightarrow \psi_{2C}^{II} = \frac{\Delta_{2C}^{II}}{L_{2C}} = -\frac{1}{4m}$$

Wydłużenie sprężystej więzi translacyjnej  $\delta_s^{II} = 0$ .



**Momenty brzegowe** (Można nie obliczać, co pokazano w przykładzie 2b)

Wzór:  $M_{ij}'' = -c_{ij} \cdot (EI/L)_{ij} \cdot \psi_{ij}''$

Obliczenia:  $M_{1A}'' = M_{A1}'' = 0, \quad M_{1A}'' + M_{A1}'' = 0, \quad M_{1B}'' = M_{B1}'' = 0,$

$$M_{12}'' = M_{21}'' = -6 \cdot \frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot \psi_{12}'' = -6 \cdot \frac{EI}{3m} \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$M_{2C}'' = -3 \cdot \frac{EI_{2c}}{L_{2C}} \cdot \psi_{2C}'' = -3 \cdot \frac{2EI}{4m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{EI}{m^2}, \quad M_{C2}'' = 0.$$

**4. UKŁAD RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE**

**4.1 POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ**

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1T} &= 0, \\ k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2T} &= 0, \\ k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I,I} \cdot \delta_I + k_{I,II} \cdot \delta_{II} + k_{I,T} &= 0, \\ k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II,I} \cdot \delta_I + k_{II,II} \cdot \delta_{II} + k_{II,T} &= 0 \end{aligned}$$

**4.2 OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ**

$$k_{11} = \sum_{j=A,B,2} M_{1j}^1 + k_1^\varphi = \left(0.2 + 0 + \frac{4}{3} + 2\right) \cdot \frac{EI}{m} = \frac{53}{15} \cdot \frac{EI}{m} = 3.5333333 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{12} = M_{12}^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m} = 0.6666667 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = \sum_{j=A,B,2} M_{1j}^I = (0 + 0 + 0.5) \cdot \frac{EI}{m^2} = 0.5 \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1II} = \sum_{j=A,B,2} M_{1j}^{II} = \left(0 + 0 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{EI}{m^2} = -0.6666667 \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1T} = \sum_{j=A,B,2} M_{1j}^{oT} = (250 + 0 - 244.1666667)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m} = 5.8333333^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{21} = M_{21}^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m} = 0.6666667 \cdot \frac{EI}{m} = k_{12},$$

$$k_{22} = \sum_{j=1,C} M_{2j}^2 + k_2^\varphi = \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{EI}{m} = \frac{17}{6} \cdot \frac{EI}{m} = 2.8333333 \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{2I} = \sum_{j=1,C} M_{2j}^I = (0.5 + 0) \cdot \frac{EI}{m^2} = 0.5 \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2II} = \sum_{j=1,C} M_{2j}^{II} = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{EI}{m^2} = -\frac{7}{24} \cdot \frac{EI}{m^2} = -0.2916667 \cdot \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2T} = \sum_{j=1,C} M_{2j}^{oT} = (355.8333333 - 750)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m} = -394.1666667^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m},$$

$$k_{I1} = - \sum_{j=A,B,2} (M_{1j}^1 + M_{j1}^1) \cdot \psi_{1j}^I = -0 - 0 - 2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) = 0.5 \cdot \frac{EI}{m^2} = k_{1I},$$

$$k_{I2} = - \sum_{j=1,C} (M_{2j}^2 + M_{j2}^2) \cdot \psi_{2j}^I = -2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) - 0 = 0.5 \cdot \frac{EI}{m^2} = k_{2I},$$

$$k_{I,I} = - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \cdot \psi_{ij}^I + \sum_s k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I = -0 - 0 - \frac{EI}{m^2} \cdot \frac{-1}{4m} - 0 + 4 \cdot \frac{EI}{m^3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.25 \cdot \frac{EI}{m^3},$$

$$k_{I,II} = - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \cdot \psi_{ij}^I + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^{II} = -0 - 0 - \frac{-4}{3} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot \frac{-1}{4m} - 0 + 0 = -0.33333333 \cdot \frac{EI}{m^3},$$



$$\begin{aligned}
 k_{I,T} &= - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^{oT} + M_{ji}^{oT}) \cdot \psi_{ij}^I + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^T = \\
 &= 0 - 0 - (355.833333 - 244.166667)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) - 0 + 0 = 27.916667^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m^2}, \\
 k_{III} &= - \sum_{1j=1A,1B,12} (M_{1j}^I + M_{j1}^I) \cdot \psi_{1j}^{II} = -0 - 0 - 2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m^2} = -0.66666667 \cdot \frac{EI}{m^2} = k_{III}, \\
 k_{II2} &= - \sum_{j=1,C} (M_{2j}^I + M_{j2}^I) \cdot \psi_{2j}^{II} = -2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot \frac{1}{3m} - 1.5 \cdot \frac{EI}{m} \cdot \frac{-1}{4m} = -\frac{7}{24} \cdot \frac{EI}{m^2} = -0.291667 \cdot \frac{EI}{m^2} = k_{II2}, \\
 k_{II,I} &= - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^I \cdot \Delta L_s^{II} = -0 - 0 - \frac{EI}{m^2} \cdot \frac{1}{3m} - 0 = -0.33333333 \cdot \frac{EI}{m^3} = k_{II,I}, \\
 k_{II,II} &= - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^{II} \cdot \Delta L_s^{II} = \\
 &= -0 - 0 - \frac{-4}{3} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot \frac{1}{3m} - \frac{3}{8} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot \frac{-1}{4m} = \frac{155}{288} \cdot \frac{EI}{m^3} = 0.53819 \cdot \frac{EI}{m^3}, \\
 k_{II,T} &= - \sum_{ij=A1,B1,12,2C} (M_{ij}^{oT} + M_{ji}^{oT}) \cdot \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^{II} \cdot \Delta L_s^T = 0 - 0 - (355.833333 - 244.166667)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m} \cdot \frac{1}{3m} + \\
 &+ (-750 + 0)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m} \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) + 0 = -224.722222^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m^2}.
 \end{aligned}$$

### 4.3 POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\begin{aligned}
 3.533333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0.666667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 0.666667 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 5.833333 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} &= 0, \\
 0.666667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2.833333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 0.291667 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 394.166667 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} &= 0, \\
 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0.5 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 3.25 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I - 0.333333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} + 27.916667 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} &= 0, \\
 -0.666667 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 - 0.291667 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 - 0.333333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0.538194 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 224.722222 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 79.64637 \cdot \alpha_T \cdot C, & \varphi_2 &= 181.955402 \cdot \alpha_T \cdot C, \\
 \delta_I &= 15.186501 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C, & \delta_{II} &= 624.221041 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C.
 \end{aligned}$$

## 5. SIŁY RZECZYWISTE

### 5.1 OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Wzór:  $M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^{oT}$ .

Obliczenia:

$$\begin{aligned}
 M_{A1} &= -0.2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot 79.64637 \cdot \alpha_T \cdot C + 0 + 0 + 0 - 250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -265.9293^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m}, \\
 M_{1A} &= 0.2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot 79.64637 \cdot \alpha_T \cdot C + 0 + 0 + 0 + 250^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = 265.9293^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m}, \\
 M_{B1} &= 0, & M_{1B} &= M_{1B}^{oT} = 0, \\
 M_{12} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{EI}{m} \cdot 79.64637 \cdot \alpha_T \cdot C + \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m} \cdot 181.955402 \cdot \alpha_T \cdot C + \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot 15.186501 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ \frac{-2}{3} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot 624.221041 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C - 244.16666^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = -425.2222^\circ C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m},
 \end{aligned}$$

$$M_{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m} \cdot 79.64637 \cdot \alpha_T \cdot C + \frac{4}{3} \cdot \frac{EI}{m} \cdot 181.955402 \cdot \alpha_T \cdot C + \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot 15.186501 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C +$$

$$- \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot 624.221041 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 355.83334 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot EI / m = 242.9840 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m},$$

$$M_{2C} = 0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{m} \cdot 181.955402 \cdot \alpha_T \cdot C + 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{EI}{m^2} \cdot 624.221041 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C - 750 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot EI / m =$$

$$= -242.9840 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot EI / m,$$

$$M_{C2} = 0.$$

**Moment w więzi rotacyjnej:**  $S_1^\varphi = k_1^{\varphi l} \cdot \varphi_1 = 2 \cdot \frac{EI}{m} \cdot 79.64637 \cdot \alpha_T \cdot C = 159.2927 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot \frac{EI}{m}.$

Zmiana długości więzi translacyjnej

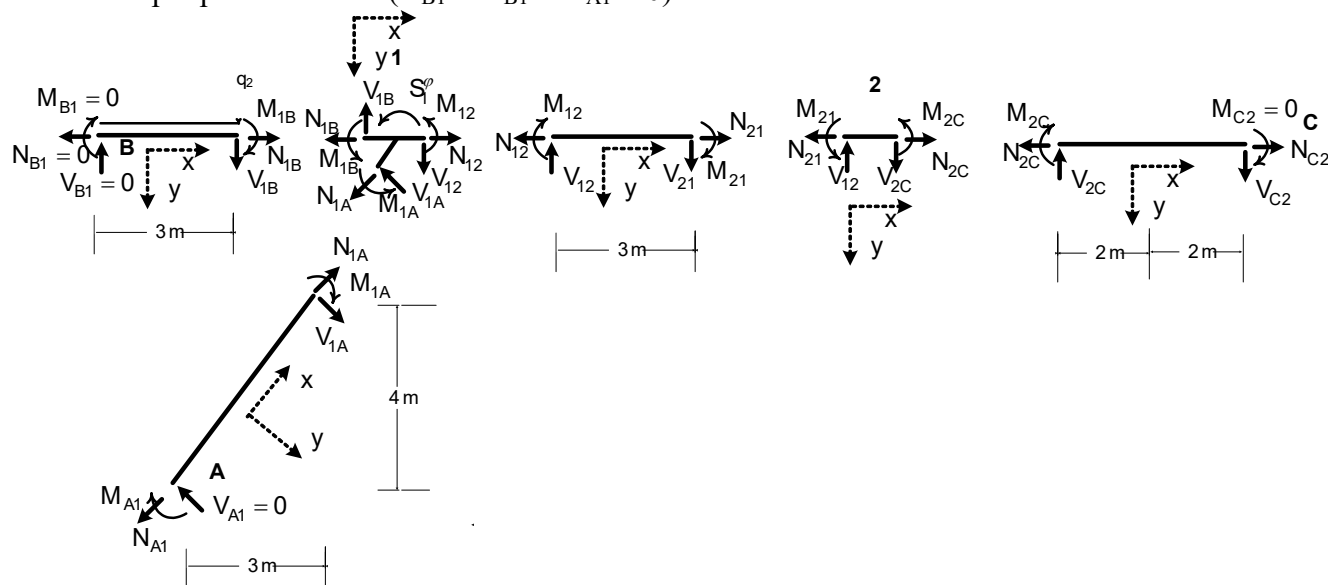
$$\Delta L_2 = \Delta L_2^I \cdot \delta_I + \Delta L_2^{II} \cdot \delta_{II} = -2\sqrt{3} \cdot 15.186501 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 = -17.5359 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot m.$$

**Siła osiowa w więzi translacyjnej:**

$$S_2^\delta = k_2^{\delta l} \cdot \Delta L_2 = 4 \cdot EI / m^3 \cdot (-17.5359 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C) = -52.60758 \cdot C \cdot \alpha_T \cdot EI / m^2.$$

## 5.2 OBLICZENIE SIŁ TNĄCYCH I SIŁ OSIOWYCH ORAZ KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Brzegowe siły tnące wyznaczymy z równań równowagi prętów a siły osiowe z równań równowagi prętów i węzłów. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły oraz obciążamy wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi (określonymi już momentami i szukanymi siłami osiowymi i tnącymi) z uwzględnieniem znanych wartości wynikających z warunków podparcia ( $N_{B1} = V_{B1} = V_{A1} = 0$ )



**PRĘT A-1**  $\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 5m = 0 \Rightarrow -265.929 + 265.929 + V_{1A} \cdot 5m = 0 \Rightarrow V_{1A} = 0,$   
 $\sum M_1 = M_{A1} + M_{1A} + V_{A1} \cdot 5m = 0 \Rightarrow -265.929 + 265.929 + 0 = 0$  (spełnione tożsamościowo),  
 $\sum X = -N_{A1} + N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{1A} = N_{A1}.$

**PRĘT B-1**  $\sum M_B = M_{B1} + M_{1B} + V_{1B} \cdot 3m = 0 \Rightarrow 0 + 0 + V_{1B} \cdot 3m = 0 \Rightarrow V_{1B} = 0,$   
 $\sum M_1 = M_{B1} + M_{1B} + V_{B1} \cdot 3m = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 = 0$  (spełnione tożsamościowo),  
 $\sum X = -N_{B1} + N_{1B} = 0 \Rightarrow N_{1B} = N_{B1} = 0.$

**PRĘT 1-2**  $\sum M_1 = M_{12} + M_{21} + V_{21} \cdot 3m = 0 \Rightarrow -425.2220 + 242.9840 + V_{21} \cdot 3m = 0 \Rightarrow V_{21} = 60.7460,$   
 $\sum M_2 = M_{12} + M_{21} + V_{12} \cdot 3m = 0 \Rightarrow -425.2220 + 242.9840 + V_{12} \cdot 3m = 0 \Rightarrow V_{12} = 60.7460,$   
 $\sum X = -N_{12} + N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$

**PRĘT 2-C**

MP – przykład 2a – rama – zmiany temperatury- wykorzystanie rozwiązań od przemieszczeń jednostkowych w pełnym zakresie

20.04.2017 r.

$$\sum M_2 = M_{2C} + M_{C2} + V_{C2} \cdot 4m = 0 \Rightarrow -242.9840 + 0 + V_{C2} \cdot 4m = 0 \Rightarrow V_{C2} = 60.7460,$$

$$\sum M_B = M_{2C} + M_{C2} + V_{2C} \cdot 4m = 0 \Rightarrow -242.9840 + 0 + V_{2C} \cdot 4m = 0 \Rightarrow V_{2C} = 60.7460,$$

$$\sum X = -N_{2C} + N_{C2} = 0 \Rightarrow N_{2C} = N_{C2}.$$

**WĘZEL 1**  $\sum M_1 = -M_{1A} - M_{1B} - M_{12} - S_1^{\phi} = -265.9293 + 0 - (-425.2220) - 159.2927 = 0$

(spełnione tożsamościowo),

$$\sum Y = V_{12} - V_{1B} - V_{1A} \cdot 0.6 + N_{1A} \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow$$

$$60.7460 - 0 - 0 \cdot 0.6 + N_{1A} \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow N_{1A} = -75.9325$$

$$\sum X = N_{12} - N_{1B} - N_{1A} \cdot 0.6 - V_{1A} \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow$$

$$N_{12} - 0 - (75.9325) \cdot 0.6 - 0 \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow N_{12} = -45.5595$$

Z trzeciego równania dla pręta A-1

$$N_{A1} = N_{1A} = -75.9325.,$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-2

$$N_{21} = N_{12} = -45.5595.$$

**WĘZEL 2**  $\sum M_2 = -M_{21} - M_{2C} = -242.984 - (-242.984) = 0$  (spełnione tożsamościowo),

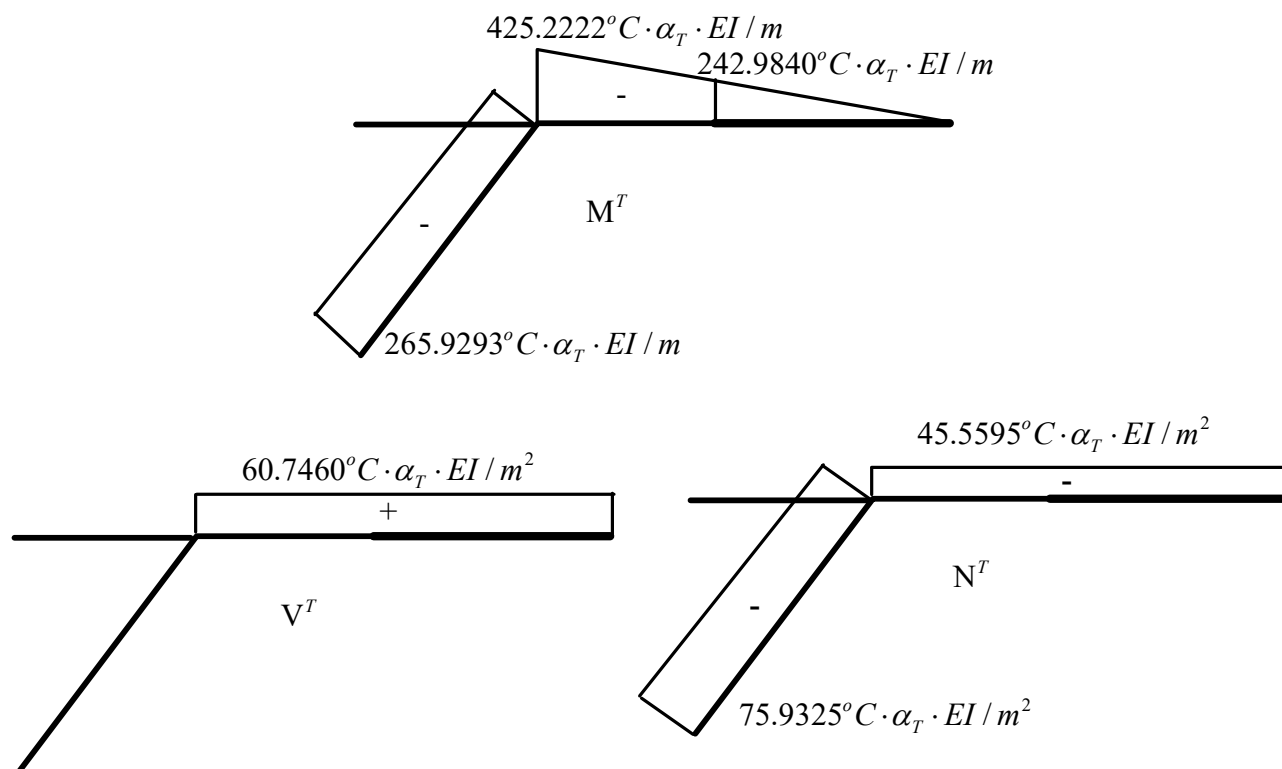
$$\sum Y = V_{2C} - V_{21} = 60.7460 - 60.7460 = 0$$

(spełnione tożsamościowo),

$$\sum X = N_{2C} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{2C} = N_{21} = -45.5595.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-C wyznaczamy  $N_{C2} = N_{2C} = -45.5595.$

### 5.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH



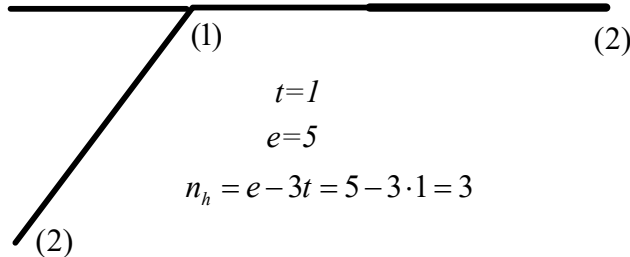
## 6. KONTROLA ROZWIĄZANIA

### 6.1 KONTROLA STATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Kontrola ta została wykonana w trakcie wyznaczania sił tnących i osiowych.

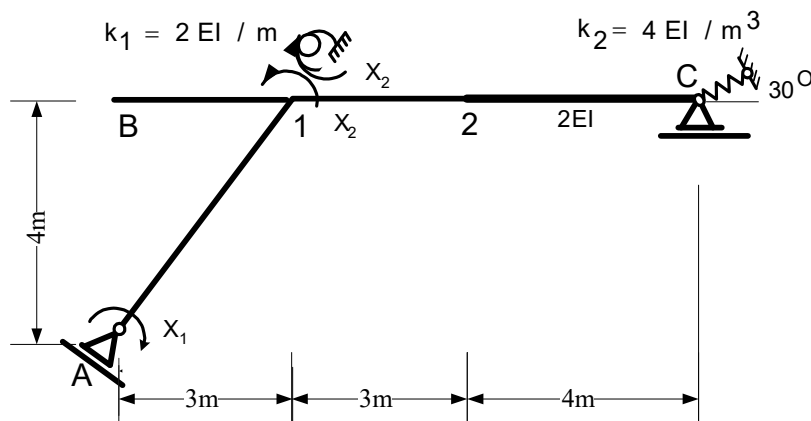
### 6.2 KONTROLA KINEMATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

#### 1) Wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu



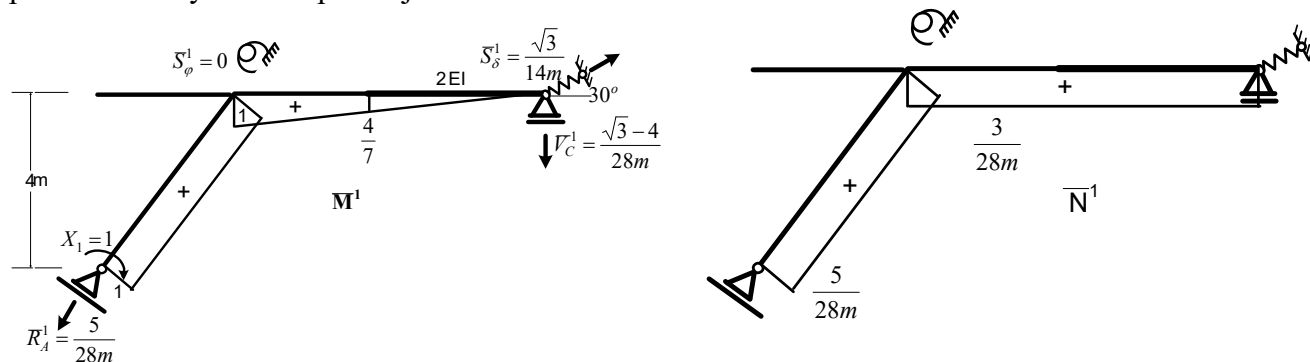
#### 2) Układ podstawowy metody sił bez obciążeń danych

Siły  $X_1$  i  $X_2$  muszą tu być przyjęte z takimi zwrotami jak w rozwiązaniu metodą przemieszczeń.



#### 3) Rozwiązania układu podstawowego metody sił od jednostkowych sił hiperstatycznych

Wartości reakcji i wykresy momentów zginających i sił osiowych od obciążenia  $X_1 = 1$  pokazano na rysunkach poniżej.

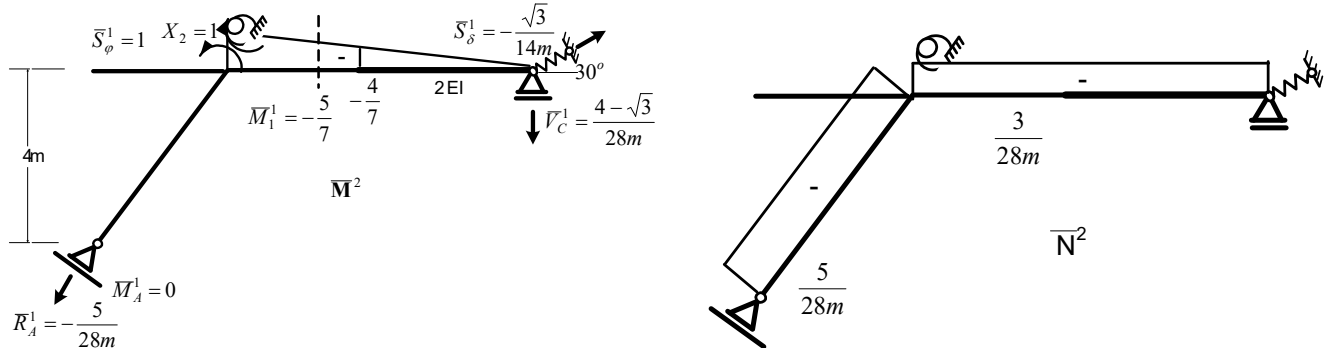


Pola wykresów sił przekrojowych w poszczególnych przedziałach:

$$\Omega_{\bar{M}_{A1}}^1 = 1 \cdot 5m = 5m, \quad \Omega_{\bar{M}_{B1}}^1 = 1 \cdot 5m = 5m, \quad \Omega_{\bar{M}_{12}}^1 = \left(1 + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3m = \frac{33}{14}m, \quad \Omega_{\bar{M}_{2C}}^1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = \frac{8}{7}m,$$

$$\Omega_{N_{A1}^1} = \frac{5}{28m} \cdot 5m = \frac{25}{28}, \quad \Omega_{N_{B1}^1} = 0, \quad \Omega_{N_{I2}^1} = \frac{1}{9m} \cdot 3m = \frac{1}{3}, \quad \Omega_{N_{2c}^1} = \frac{1}{9m} \cdot 4m = \frac{4}{9}.$$

Wartości reakcji i wykresy momentów zginających i sił osiowych od obciążenia  $X_2 = 1$  pokazano na rysunkach poniżej.



Pola wykresów sił przekrojowych w poszczególnych przedziałach:

$$\Omega_{M_{A1}^2} = 0, \quad \Omega_{M_{B1}^2} = -1 \cdot 5m = -5m, \quad \Omega_{M_{I2}^2} = -\left(1 + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3m = -\frac{33}{14}m, \quad \Omega_{M_{2c}^2} = -\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = -\frac{8}{7}m,$$

$$\Omega_{N_{A1}^2} = -\frac{5}{28m} \cdot 5m = -\frac{25}{28}, \quad \Omega_{N_{B1}^2} = 0, \quad \Omega_{N_{I2}^2} = -\frac{1}{9m} \cdot 3m = -\frac{1}{3}, \quad \Omega_{N_{2c}^2} = -\frac{1}{9m} \cdot 4m = -\frac{4}{9}.$$

#### 4) Sprawdzenie kinematycznej zgodności przemieszczeń

$$\text{Wzór: } \Delta_{iT} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^T}{EI} \cdot dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \sum_{p=1}^4 \left( \frac{\alpha_T}{h} \cdot \Delta T \cdot \Omega_{M^i} \right)_p + \sum_{p=1}^4 \left( \alpha_T \cdot \Delta T \cdot \Omega_{N^i} \right)_p \approx \Delta_{i,rz},$$

Obliczenia:

$$\Delta_{1T} = 0 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 5m \cdot (-265.9293)^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m + \frac{3}{6EI} \cdot \left( 1 \cdot (-425.222) + 4 \cdot \frac{11}{14} \cdot (-334.103) + \frac{4}{7} \cdot (-242.984) \right) +$$

$$+ \frac{4}{6 \cdot 2EI} \cdot \left( \frac{4}{7} \cdot (-242984) + 4 \cdot \frac{3}{7} \cdot (-121492) + 0 \cdot 0 \right) + 0 + \frac{\sqrt{3} \cdot (-52.6076) \cdot m^3}{14m \cdot 4 \cdot EI} +$$

$$+ 0 + \frac{\alpha_T}{0.2m} \cdot 50^\circ C \cdot 5m + \frac{\alpha_T}{0.2m} \cdot 60^\circ C \cdot \frac{33}{14}m + \frac{\alpha_T}{0.2m} \cdot 60^\circ C \cdot \frac{7}{8}m +$$

$$+ 0 + \alpha_T \cdot (-5)^\circ C \cdot \frac{25}{28} + \alpha_T \cdot (-10)^\circ C \cdot \frac{1}{3} + \alpha_T \cdot (-10)^\circ C \cdot \frac{4}{9} = 0.00000 \alpha_T \cdot ^\circ C \approx 0 = \Delta_{1,rz},$$

$$\Delta_{2T} = 0 + 0 + \frac{3m}{6EI} \cdot \left( -1 \cdot (-425222) + 4 \cdot \left( -\frac{11}{14} \right) \cdot (-334103) - \frac{4}{7} \cdot (-242984) \right) \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T \cdot EI / m +$$

$$+ \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \cdot \left( -\frac{4}{7} \cdot (-242984) + 4 \cdot \left( -\frac{3}{7} \right) \cdot (-121492) + 0 \cdot 0 \right) \cdot Fm + \frac{1 \cdot 159.2927 \cdot m}{2 \cdot EI} + \frac{-\sqrt{3} \cdot (-52.6076) \cdot m^3}{14m \cdot 4 \cdot EI} +$$

$$+ 0 + 0 + \frac{\alpha_T}{0.2m} \cdot 60^\circ C \cdot \left( -\frac{33}{14} \right) m + \frac{\alpha_T}{0.2m} \cdot 60^\circ C \cdot \left( -\frac{7}{8} \right) m +$$

$$+ 0 + \alpha_T \cdot (-5)^\circ C \cdot \left( -\frac{25}{28} \right) + \alpha_T \cdot (-10)^\circ C \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) + \alpha_T \cdot (-10)^\circ C \cdot \left( -\frac{4}{9} \right) = 0 = \Delta_{2,rz},$$

Otrzymane rozwiązanie jest, więc kinematycznie dopuszczalne.