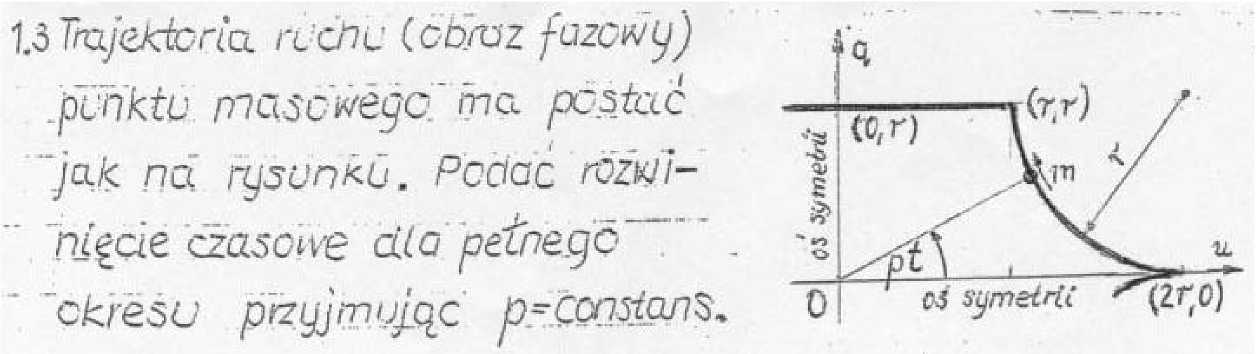
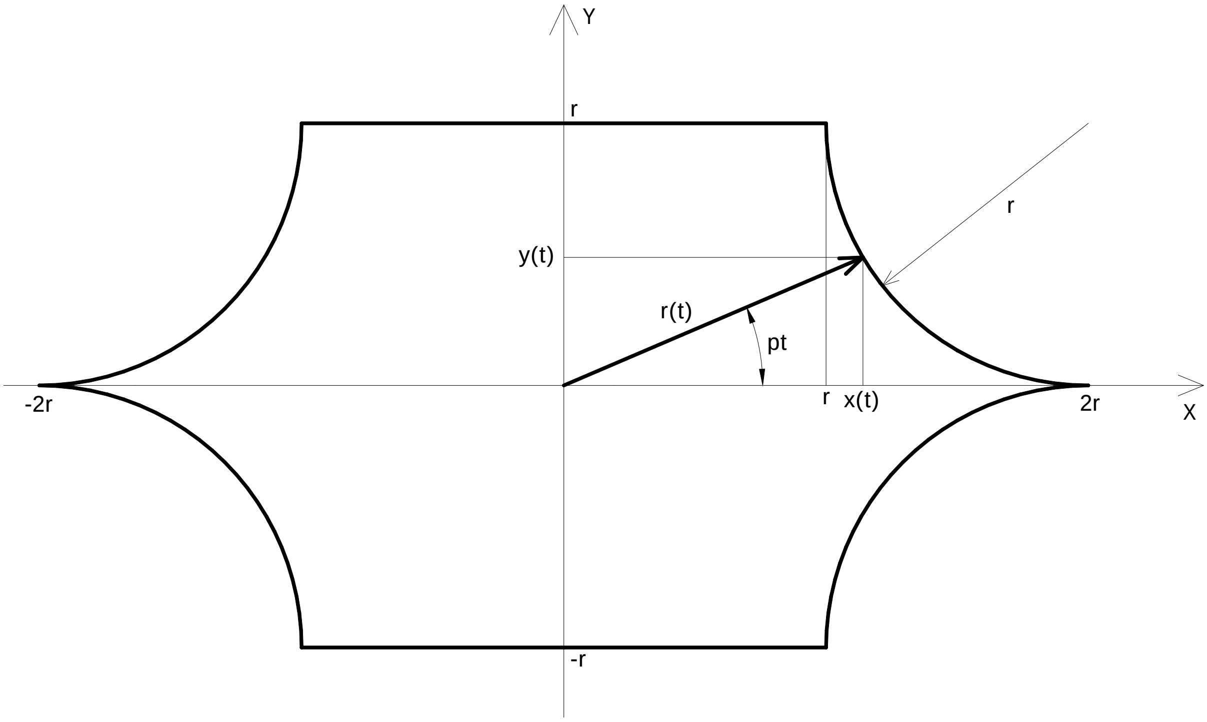
ZADANIE 1.


1.3 Trajektoria ruchu (obraz fazowy) punktu masowego ma postać jak na rysunku. Podać rozwinięcie czasowe dla pełnego okresu przyjmując p=constans.

1.1. Zadany obraz fazowy



Jeżeli krzywa obrazu fazowego jest krzywą zamkniętą, to ruch jest periodyczny (okresowy). W analizowanym przykładzie krzywa fazowa ruchu jest zamknięta, zatem rozwinięcie czasowe reprezentować będzie funkcja spełniająca warunek okresowości. Ponadto ze względu na pewne podobieństwa do ruchu punktu materialnego po okręgu, można wywnioskować że funkcja rozwinięcia czasowego analizowanego ruchu będzie miała postać

$$q(t) = r(t) * \sin(p\,t)$$

podczas gdy dla ruchu po okręgu mamy funkcję: $q(t) = r * \sin(p\,t)$.

Aby wyznaczyć promień krzywizny zmienny w czasie, załóżmy że ruch odbywa się po krzywej ze stałą prędkością kątową *p*. Wówczas prawdziwe są relacje:

$$y(t) = r(t) * \sin(p * t)$$
$$x(t) = r(t) * \cos(p * t)$$

współrzędne te muszą spełniać równanie okręgu o środku w punkcie (x,y) oraz równanie rzędnej $y = r$, stąd:

- dla $0 \le pt \le \frac{\pi}{4}$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$(r(t) * \cos(p * t) - 2r)^2 + (r(t) * \sin(p * t) - r)^2 = r^2$$

jest to równanie kwadratowe którego rozwiązaniem są pierwiastki

$$\mathrm{r}_1(t) = r * \sin(p * t) + 2r * \cos(p * t) - a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \sin^2(pt)}$$
$$\mathrm{r}_2(t) = r * \sin(p * t) + 2r * \cos(p * t) + a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \sin^2(pt)}$$

przy czym musi być spełniony warunek

$$r \le \mathrm{r}(t) \le 2r$$

stąd

$$\mathrm{r}(t) = r * \sin(p * t) + 2r * \cos(p * t) - a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \sin^2(pt)}$$

- dla $\frac{\pi}{4} \le pt \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{r}{r(t)} = \sin(pt)$$
$$r(t) = \frac{r}{\sin(pt)}$$

Rozwinięcie czasowe w pierwszej ćwiartce ma zatem postać:

$$q^I(t) = \begin{cases} \left[r * \sin(p * t) + 2r * \cos(p * t) - a * \sqrt{4 * \sin(p * t) * \cos(p * t) - 3 * \sin^2(pt)} \right] * \sin(p * t) \\ \qquad 0 \le pt \le \frac{\pi}{4p} \\ \frac{r}{\sin(p * t)} * \sin(p * t) = r \qquad \frac{\pi}{4p} \le pt \le \frac{\pi}{2p} \end{cases}$$

W kolejnych ćwiartkach rozwiązanie uzyskuje się formułując następujące warunki:

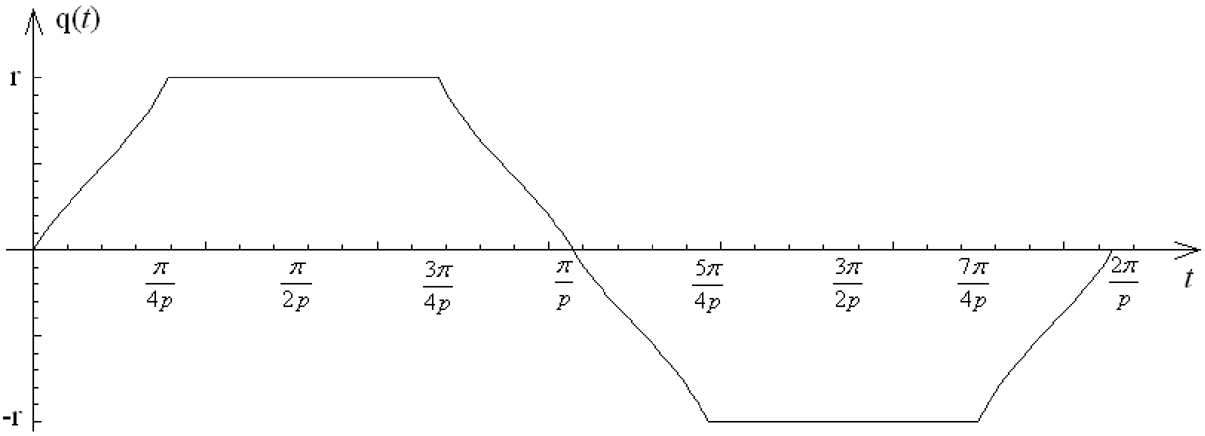
* w drugiej ćwiartce $(x + 2r)^2 + (y - r)^2 = r^2$
* w trzeciej ćwiartce $(x + 2r)^2 + (y + r)^2 = r^2$
* w czwartej ćwiartce $(x - 2r)^2 + (y + r)^2 = r^2$

$$q^{II}(t)=\begin{cases} \dfrac{r}{\sin(p*t)}*\sin(p*t)=r \qquad \dfrac{\pi}{2p}\le pt\le\dfrac{3\pi}{4p} \\ \left[r*\sin(p*t)-2r*\cos(p*t)-a*\sqrt{-4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\sin^2(pt)}\right]*\sin(p*t) \\ \qquad \dfrac{3\pi}{4p}\le pt\le\dfrac{\pi}{p} \end{cases}$$

$$q^{III}(t)=\begin{cases} \left[-r*\sin(p*t)-2r*\cos(p*t)-a*\sqrt{4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\sin^2(pt)}\right]*\sin(p*t) \\ \qquad \dfrac{\pi}{p}\le pt\le\dfrac{5\pi}{4p} \\ -\dfrac{r}{\sin(p*t)}*\sin(p*t)=-r \qquad \dfrac{5\pi}{4p}\le pt\le\dfrac{3\pi}{2p} \end{cases}$$

$$q^{IV}(t)=\begin{cases} -\dfrac{r}{\sin(p*t)}*\sin(p*t)=-r \qquad \dfrac{3\pi}{2p}\le pt\le\dfrac{7\pi}{4p} \\ \left[-r*\sin(p*t)+2r*\cos(p*t)-a*\sqrt{-4*\sin(p*t)*\cos(p*t)-3*\sin^2(pt)}\right]*\sin(p*t) \\ \qquad \dfrac{7\pi}{4p}\le pt\le\dfrac{2\pi}{p} \end{cases}$$

Wykres rozwinięcia czasowego

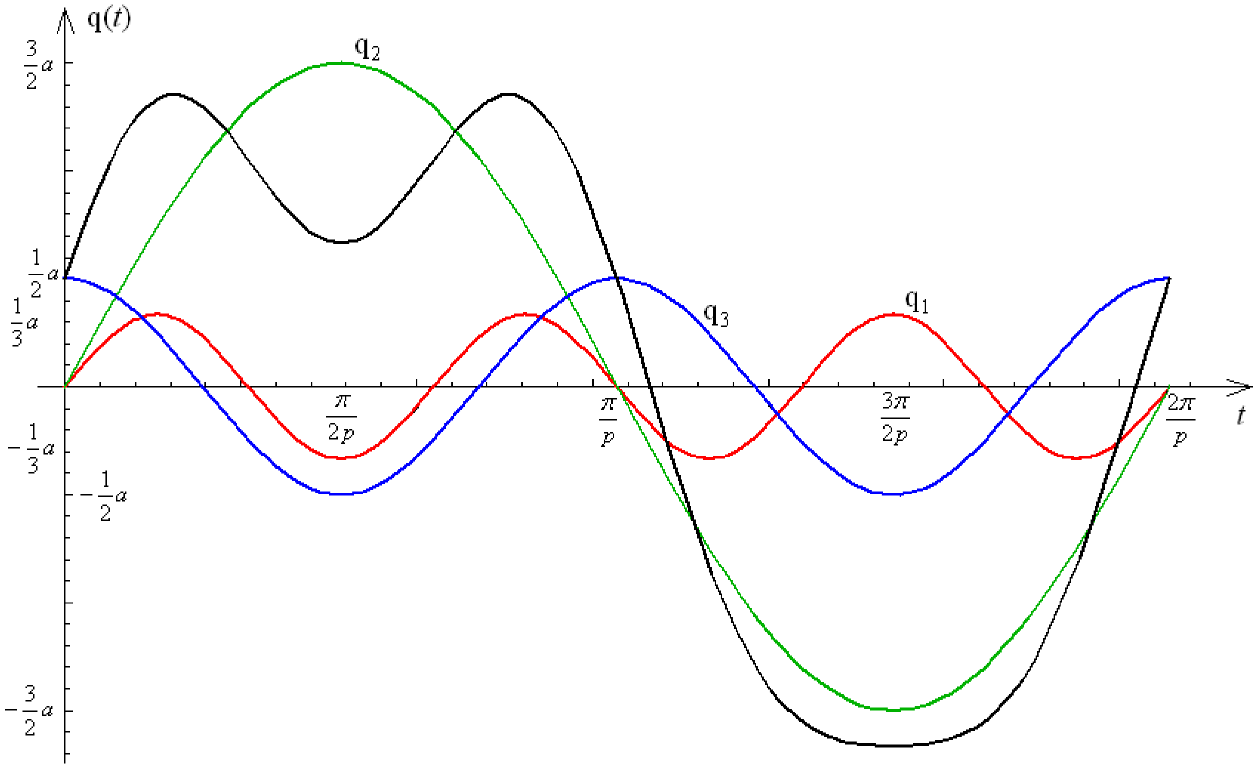


ZADANIE 2.

2.3 Analiza harmoniczna wibrogramu wykazała, że oscylacja jest sumą trzech ruchów kolinearnych. Narysować ruchy składowe oraz ruch wypadkowy. Wyznaczyć położenie węzłów ruchu, ekstremów i ich wartość (minimum dla dwóch składowych).

$q_1 = \frac{a}{3} \sin 3pt$, $q_2 = \frac{3}{2} a \sin pt$, $q_3 = \frac{a}{2} \cos 2pt$.

2.1. Wykresy ruchów składowych oraz wypadkowego



Kolor czarny – ruch wypadkowy: $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$

2.2. Węzły ruchu dla dwóch ruchów wypadkowych

Dla dwóch wybranych ruchów q_2 oraz q_3 mamy:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$q(t) = \frac{3}{2} a * \sin(pt) + \frac{a}{2} * \cos(2pt) = \frac{3}{2} a * \sin(pt) + \frac{a}{2} * \cos^2(pt) - \frac{a}{2} * \sin^2(pt) =$$

$$= \frac{3}{2} a * \sin(pt) + \frac{a}{2} * \left(1 - \sin^2(pt)\right) - \frac{a}{2} * \sin^2(pt) = -a * \sin^2(pt) + \frac{3}{2} a * \sin(pt) + \frac{a}{2}$$

$$q(t) = -a * \sin^2(pt) + \frac{3}{2} a * \sin(pt) + \frac{a}{2}$$

Warunek na wyznaczenie węzłów ruchu: $q(t)=0$

$$q(t)=-a*\sin^2(pt)+\frac{3}{2}a*\sin(pt)+\frac{a}{2}=0$$

Jest to równanie kwadratowe, jeżeli podstawimy

$$\sin(pt)=x, \qquad x\in[-1;1]$$

$$-a*x^2+\frac{3}{2}a*x+\frac{a}{2}=0$$

$x=$ -0,280776 lub $x=1{,}78078$ - nie należy do dziedziny

$$\sin(pt)=\text{-0,280776}$$
$$\sin(pt)=\sin(\text{- 0,284603}+2\text{n}\pi)$$
$$p*t=\text{-0,284603}+2\text{n}\pi$$
$$t=\frac{\text{- 0,284603}+2\text{n}\pi}{p}$$

lub

$$\sin(pt)=\text{-0,280776}$$
$$\sin(3{,}4262+2\text{n}\pi)$$
$$p*t=3{,}4262+2\text{n}\pi$$
$$t=\frac{3{,}4262+2\text{n}\pi}{p}$$

Stąd węzły ruchu zlokalizowane są w punktach $t=\frac{\text{- 0,284603}+2\text{n}\pi}{p}$, $t=\frac{3{,}4262+2\text{n}\pi}{p}$, przy czym $n\in$ C (całkowitych).

2.3. Okres ruchu wypadkowego

Analizowaną funkcję można przedstawić w postaci dwóch ruchów składowych:

$$q_2(t)=\frac{3a}{2}*\sin(pt)$$
$$q_3(t)=\frac{1}{2}*a*\cos(2pt)$$

Stąd

$\omega_2=p$ $\qquad$ $\omega_3=2p$

$n_2=1$ $\qquad$ $n_3=2$

$T_2=\frac{2\pi}{p}$ $\qquad$ $T_3=\frac{\pi}{p}$

Następnie poszukiwany okres drgań ruchu wypadkowego ma postać

$$T=\frac{2\pi*n_2}{\omega_2}=\frac{2\pi*n_3}{\omega_3}=\frac{2\pi*1}{p}=\frac{2\pi*2}{2p}=\frac{2\pi}{p}$$

2.4. Ekstrema wychylenia

$$q(t)=-a*\sin^2(pt)+\frac{3}{2}a*\sin(pt)+\frac{a}{2}$$

Pierwsza pochodna podług czasu ma postać:

$$\dot{q}(t)=\frac{3}{2}a*p*\cos(pt)-a*p*\sin(2pt)$$

Stąd przyrównując pierwszą pochodną do zera wyznaczyć można ekstrema lokalne funkcji q(t), przy czym rozważania dotyczą tylko przedziału $t\in[0\ ;\ 2\pi/p]$
Przydatny będzie wzór trygonometryczny: $\cos(2\alpha)=2\cos(\alpha)*\sin(\alpha)$

Stąd

$$\dot{q}(t)=\frac{3}{2}a*p*\cos(pt)-a*p*\sin(2pt)=$$
$$=\frac{3}{2}a*p*\cos(pt)-a*p*2*\cos(pt)*\sin(pt)=$$
$$=a*p*\cos(pt)*\left(\frac{3}{2}-2\sin(pt)\right)$$

$$a*p*\cos(pt)*\left(\frac{3}{2}-2\sin(pt)\right)=0$$

1^0 $\cos(pt)=0$

$$\cos(pt)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

$$p*t=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$t=\frac{\pi}{2p}+\frac{n\pi}{p}$$

$2^0 \quad \frac{3}{2} - 2\sin(pt) = 0$

$$\frac{3}{2} - 2\sin(pt) = 0 \qquad\qquad \frac{3}{2} - 2\sin(pt) = 0$$

$$\sin(pt) = \frac{3}{4} \qquad \text{lub} \qquad \sin(pt) = \frac{3}{4}$$

$$p*t = 0{,}848062 \qquad\qquad p*t = 2{,}29353$$

$$t = \frac{0{,}848062}{p} \qquad\qquad t = \frac{2{,}29353}{p}$$

Zatem ekstrema lokalne występują w punktach:

$$t = \frac{0{,}848062}{p}, \quad t = \frac{\pi}{2p}, \quad t = \frac{2{,}29353}{p}, \quad t = \frac{3\pi}{2p}$$

i wynoszą odpowiednio

$$q\left(\frac{0{,}848062}{p}\right) = -a*\sin^2\left(p*\frac{0{,}848062}{p}\right) + \frac{3}{2}a*\sin\left(p*\frac{0{,}848062}{p}\right) + \frac{a}{2} = 1{,}0625\mathrm{a}$$

$$q\left(\frac{\pi}{2p}\right) = -a*\sin^2\left(p*\frac{\pi}{2p}\right) + \frac{3}{2}a*\sin\left(p*\frac{\pi}{2p}\right) + \frac{a}{2} = \mathrm{a}$$

$$q\left(\frac{2{,}29353}{p}\right) = -a*\sin^2\left(p*\frac{2{,}29353}{p}\right) + \frac{3}{2}a*\sin\left(p*\frac{2{,}29353}{p}\right) + \frac{a}{2} = 1{,}0625\mathrm{a}$$

$$q\left(\frac{3\pi}{2p}\right) = -a*\sin^2\left(p*\frac{3\pi}{2p}\right) + \frac{3}{2}a*\sin\left(p*\frac{3\pi}{2p}\right) + \frac{a}{2} = -2\mathrm{a}$$

2.5. Rysunek na przedziale t∈[0;T]

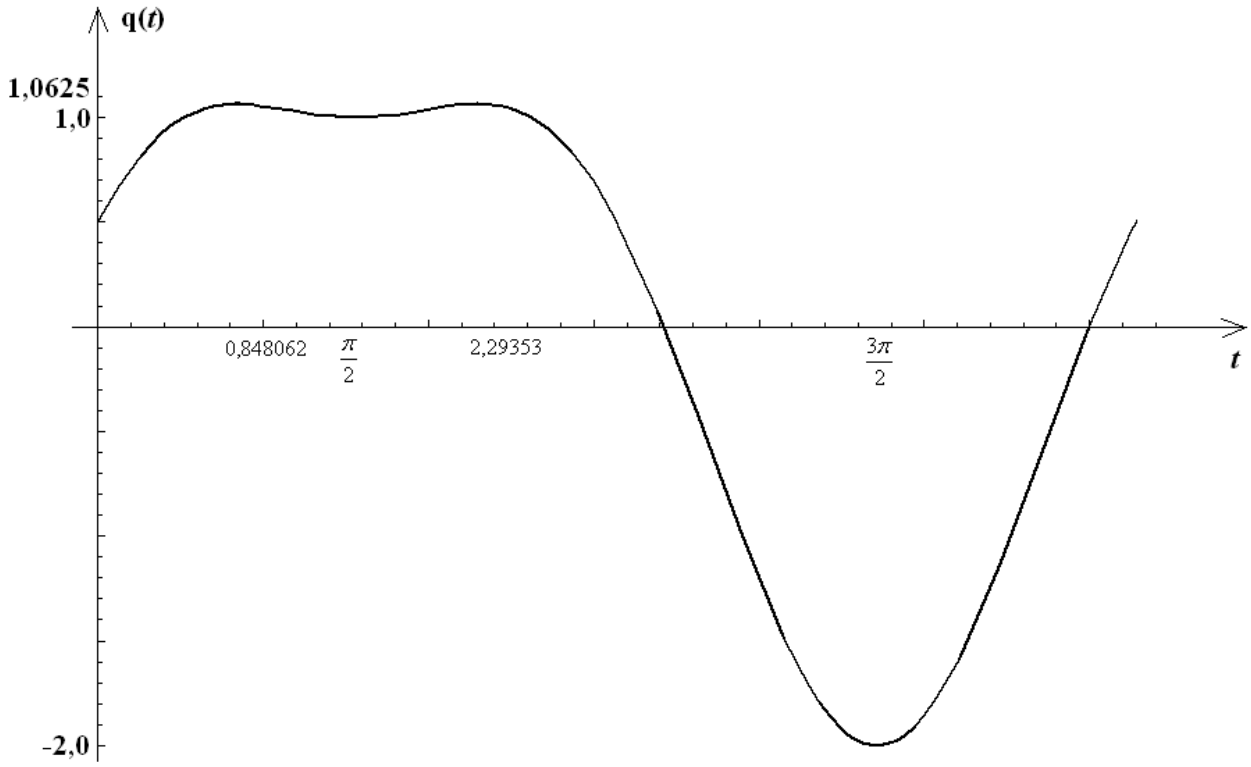
Dla $p = 1$ oraz $a = 1$ otrzymujemy

$$q(t) = -\sin^2(t) + \frac{3}{2}*\sin(t) + \frac{1}{2}$$

$$T = 2\pi$$

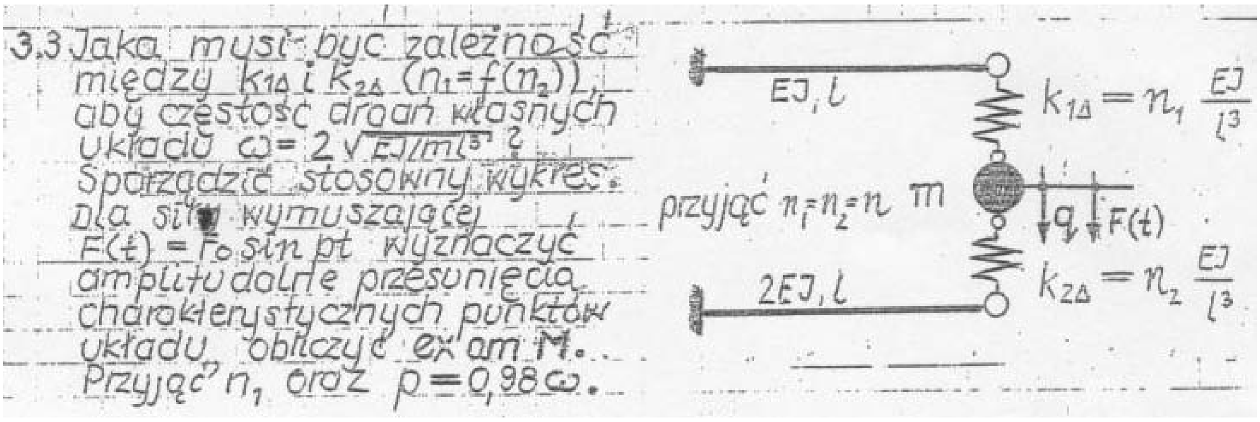
oraz punkty ekstremalnych wychyleń

$$t = 0{,}848062, \quad t = \frac{\pi}{2}, \quad t = 2{,}29353, \quad t = \frac{3\pi}{2}$$



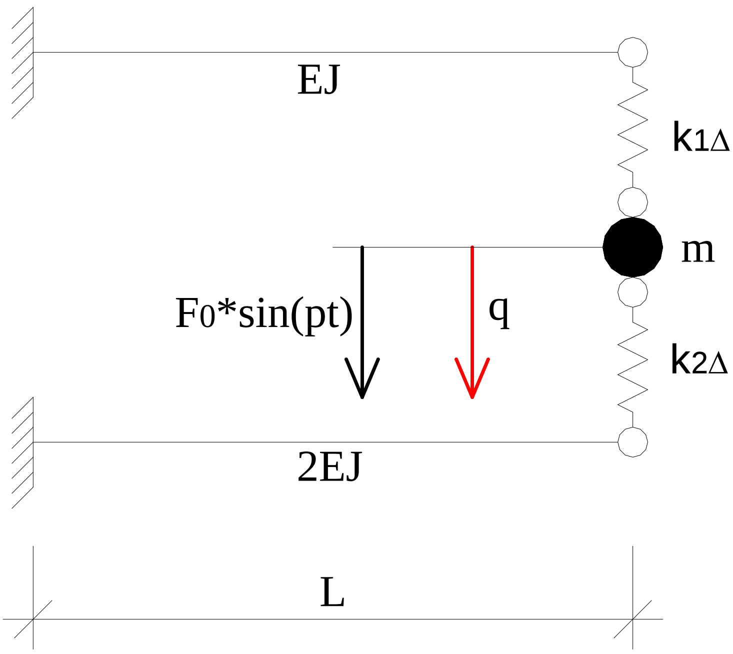
q(t)
1,0625
1,0
-2,0
0,848062
π/2
2,29353
3π/2
t

ZADANIE 3.



3.1. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

Analizowany układ można potraktować jako zestaw izolowanych więzi w połączeniu kombinowanym i na tej podstawie, można wyliczyć parametr zastępczej więzi sprężystej.



$$k_z = k_1 + k_2$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_{1\Delta}} + \frac{L^3}{3EJ}$$

$$k_1 = \frac{3 * EJ * n_1}{L^3(n_1 + 3)}$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_{2\Delta}} + \frac{L^3}{6EJ}$$

$$k_2 = \frac{6*EJ*n_2}{L^3(n_2+6)}$$

<u>Sztywność zastępcza układu</u>

$$k_z = \frac{3*EJ*n_1}{L^3(n_1+3)} + \frac{6*EJ*n_2}{L^3(n_2+6)}$$

Jeżeli uwzględni się zależność: $n_1 = n_2 = n$

$$k_z = \frac{9EJ\,n(4+n)}{L^3(n+3)(n+6)}$$

3.3. Częstość własna układu oraz zależność między $k_{1\Delta}$ i $k_{2\Delta}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \sqrt{\frac{3*EJ*n_1}{m*L^3(n_1+3)} + \frac{6*EJ*n_2}{m*L^3(n_2+6)}}$$

$$\sqrt{\frac{3*EJ*n_1}{m*L^3(n_1+3)} + \frac{6*EJ*n_2}{m*L^3(n_2+6)}} = 2\sqrt{\frac{EJ}{m*L^3}}$$

Stąd wynika relacja

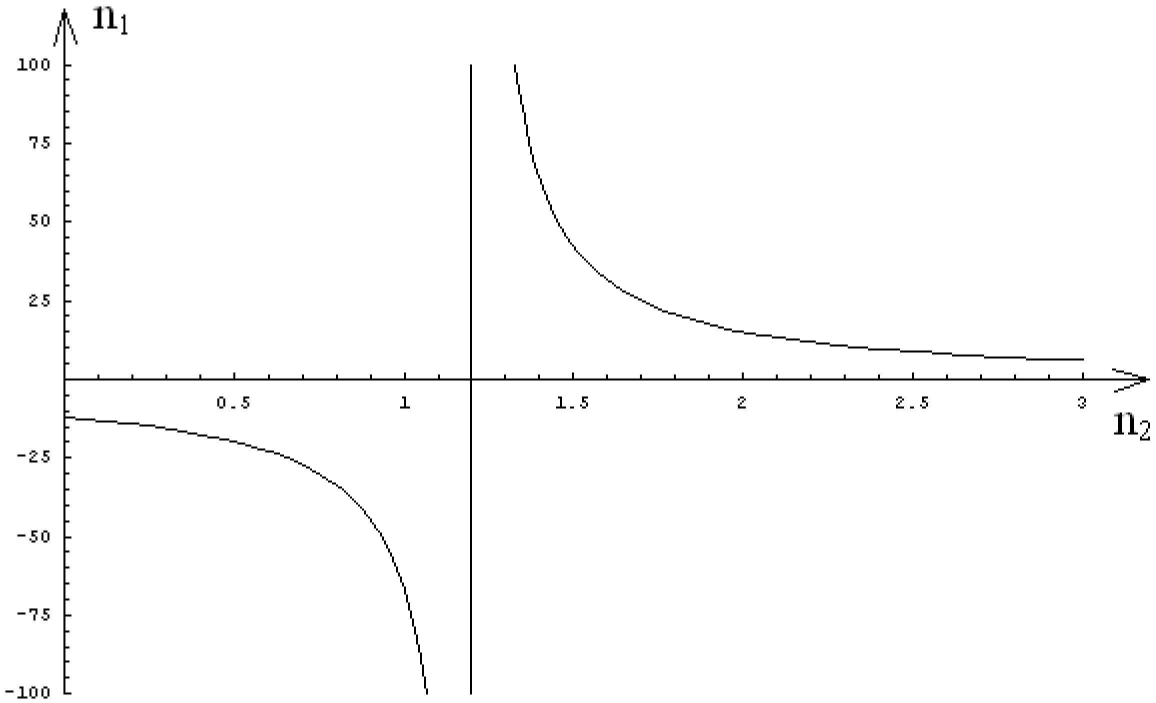
$n_1 = \dfrac{6*(12-n_2)}{5n_2-6}$, przy czym $n_1 > 0$

lub jeżeli uwzględni się zależność: $n_1 = n_2 = n$

$$\sqrt{\frac{9*EJ*n*(4+n)}{m*L^3*(n+3)*(n+6)}} = 2\sqrt{\frac{EJ}{m*L^3}}$$

$$n = 3{,}79473$$

Wykres n_1 w funkcji n_2



3.4. Amplitudalne przemieszczenia

Obliczenia przeprowadzono dla $n_1 = n_2 = n = 3{,}79473 \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\sqrt{\frac{EJ}{m * L^3}}$

<u>Drgania ustalone mają postać</u> (na podstawie *Dynamika Budowli, J. Langer*)

$$q(t) = \frac{\nu}{k} F_S \sin(pt - \varphi) + \frac{\nu}{k} F_C \cos(pt - \varphi)$$

Dane: $\gamma = 0$, $p = 0{,}98\omega$, $n_1 = 3{,}79473$, $F_S = F_0$

$$\eta = \frac{p}{\omega} = 0{,}98$$

$$\nu = \frac{1}{\left|1 - \eta^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - 0{,}98^2\right|} = 25{,}2525$$

Stąd

$$q(t) = \frac{25{,}2525}{4EJ/L^3} F_0 \sin(0{,}98\omega t) = 6{,}3131 \frac{F_0 L^3}{EJ} \sin(0{,}98\omega t)$$

Amplituda przemieszczenia w miejscu masy skupionej wynosi

$$amq = 6{,}3131\frac{F_0 L^3}{EJ}$$

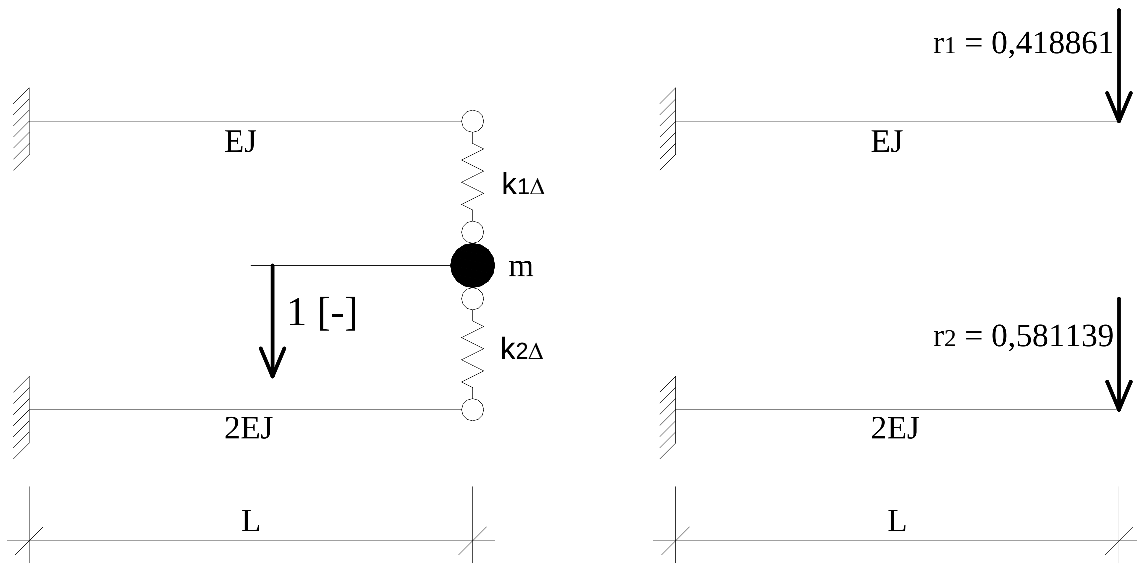
Z rozdziału obciążenia w połączeniu więzi sprężystych wynika, że na wspornik o sztywności EJ przypada sił obliczona ze wzoru

$$r_1 = \frac{k_1}{k_z} = \frac{1{,}67544\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{L}^3}}{4\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{L}^3}} = 0{,}418861$$

Natomiast na wspornik o sztywności 2EJ przypada sił obliczona ze wzoru

$$r_2 = \frac{k_2}{k_z} = \frac{2{,}32456\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{L}^3}}{4\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{L}^3}} = 0{,}581139$$

Przy czym $r_1 + r_2 = 0{,}418861 + 0{,}581139 = 1$ - warunek rozdziału



Przemieszczenie końca wspornika o sztywności EJ

$$amu_1 = \frac{6{,}3131 F_0 * r_1}{3EJ/L^3} = \frac{6{,}3131 F_0 L^3}{3EJ} * 0{,}418861 = 0{,}881437\frac{F_0 L^3}{EJ}$$

Przemieszczenie końca wspornika o sztywności 2EJ

$$amu_2 = \frac{6{,}3131 F_0 * r_2}{6EJ/L^3} = \frac{6{,}3131 F_0 L^3}{6EJ} * 0{,}581139 = 0{,}611465 \frac{F_0 L^3}{EJ}$$

3.5. Amplitudalne momenty

Siła kinetyczna

$$Q(t) = \nu \; F_0 \sin(p\, t)$$

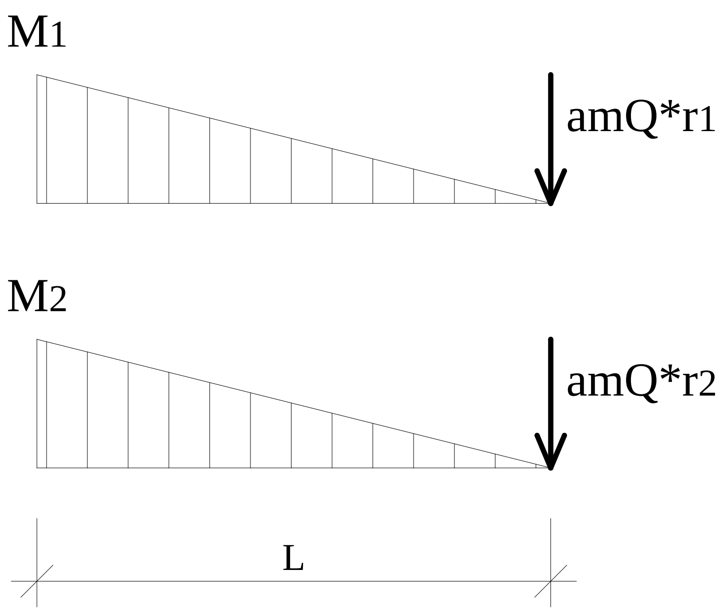
Amplituda siły kinetycznej dla ν = 25,2525

$$amQ(t) = \nu \; F_0 \; = 25{,}2525 F_0$$

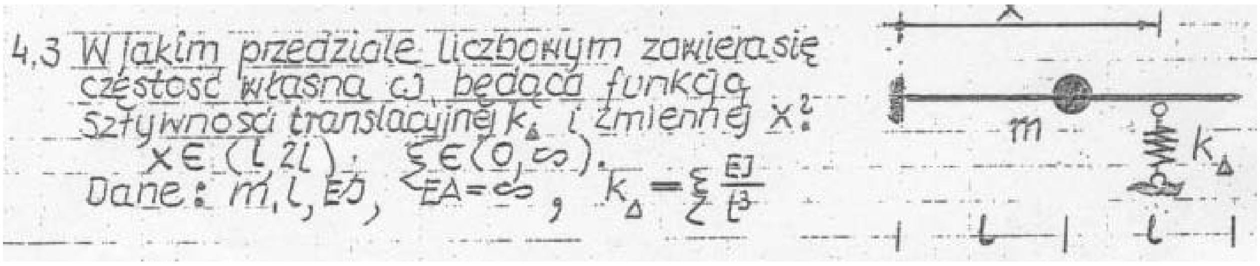
Stąd wykresy momentów dynamicznych mają postać

$$M_1^{extr} = \nu * r_1 * F_0 * L = 25{,}2525 * 0{,}418861 * F_0 * L = 10{,}5773 * F_0 * L$$

$$M_2^{extr} = \nu * r_2 * F_0 * L = 25{,}2525 * 0{,}581139 * F_0 * L = 14{,}6752 * F_0 * L$$

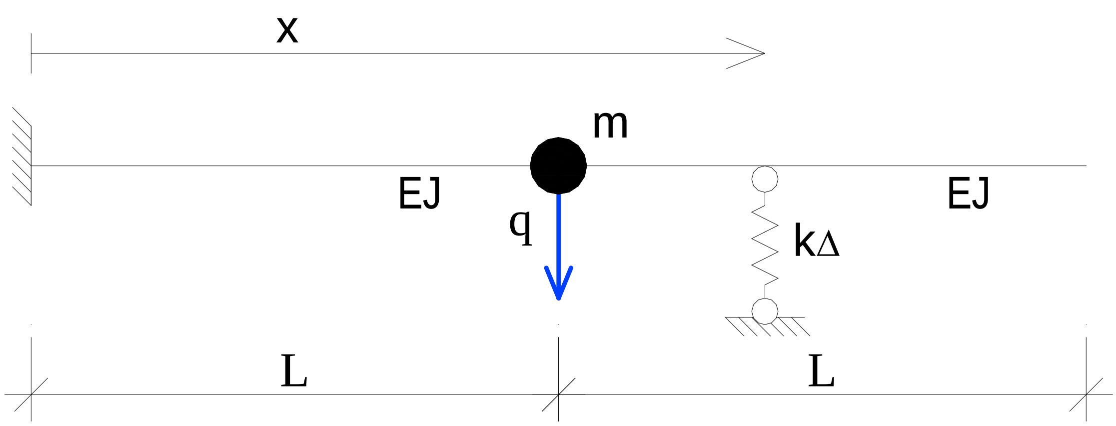


ZADANIE 4.


4.3 W jakim przedziale liczbowym zawiera się częstość własna ω, będąca funkcją sztywności translacyjnej k_Δ i zmiennej x?
$x \in (l, 2l)$, $\xi \in (0, \infty)$.
Dane: m, l, EJ, $EA = \infty$, $k_\Delta = \xi \frac{EJ}{l^3}$

Do wyznaczenia sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej posłużono się metodą sił.

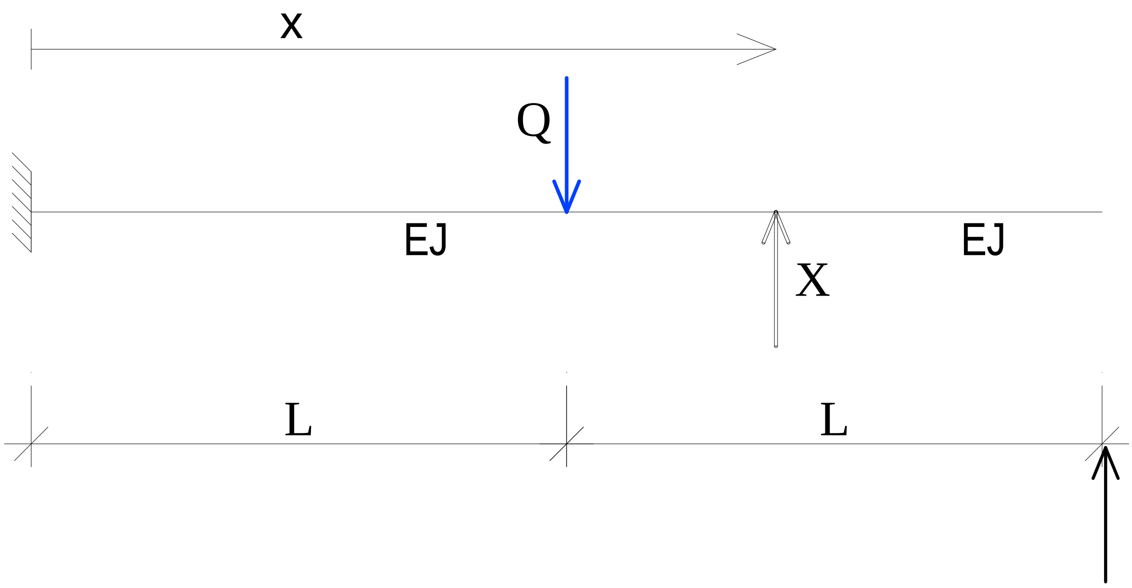
Przyjęcie współrzędnej uogólnionej



4.1. Stopień statycznej niewyznaczalności

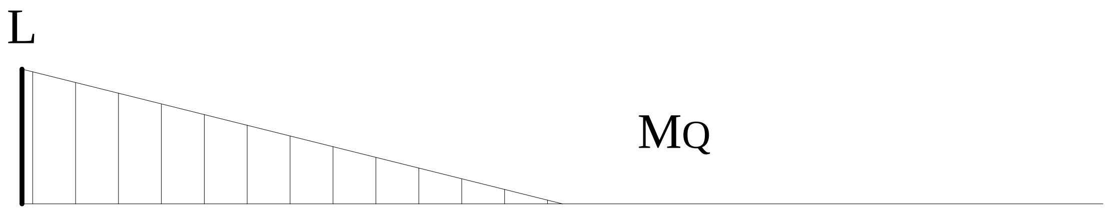
$n_h = e - 3t = 4 - 3*1 = 1$ - układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny

Układ podstawowy metody sił

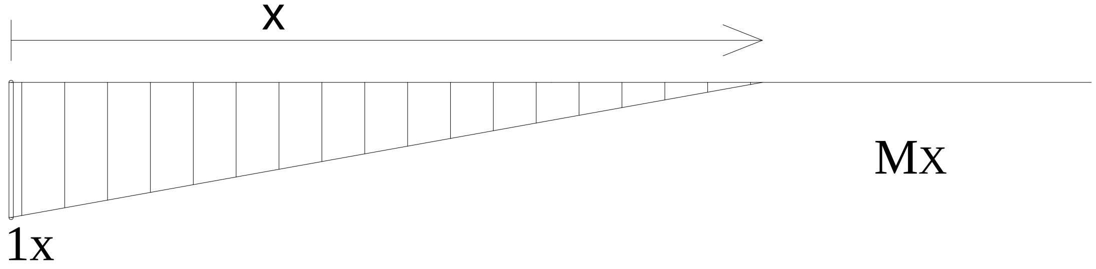


4.2. Wyznaczenie podatności na kierunku współrzędnej uogólnionej

Stan jednostkowy Q = 1 [-]



Stan jednostkowy□ X = 1 [-]



Macierz podatności w bazie poszerzonej

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} * L * L * \frac{2}{3} * L\right) = \frac{L^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{L}{6EJ}\left((-L) * x + 4 * \left(-\frac{L}{2}\right) * \left(x - \frac{L}{2}\right)\right) = \frac{L^2(L-3x)}{6EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} x * x * \frac{2}{3} * x\right) + \frac{1}{k_\Delta} = \frac{x^3}{3EJ} + \frac{L^3}{\xi EJ}$$

$$\breve{D} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EJ} & \frac{L^2(L-3x)}{6EJ} \\ \frac{L^2(L-3x)}{6EJ} & \frac{x^3}{3EJ} + \frac{L^3}{\xi EJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{qq} & D_{qx} \\ D_{xq} & D_{xx} \end{bmatrix}$$

Redukcja macierzy podatności do bazy minimalnej

$$D = D_{qq} - D_{qx} \cdot D_{xx}^{-1} \cdot D_{xq}$$

$$\delta = \frac{L^3}{3EJ} - \left(\frac{L^2(L-3x)}{6EJ}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{3EJ} + \frac{L^3}{\xi EJ}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{L^2(L-3x)}{6EJ}\right) = \frac{12L^6 - L^3(L-4x)(L-x)\xi}{12EJ(3L^3 + x^3\xi)}$$

Sztywność na kierunku współrzędnej uogólnionej wynosi

$$k=\delta^{-1}=\left(\frac{12L^6-L^3(L-4x)(L-x)\xi}{12EJ\left(3L^3+x^3\xi\right)}\right)^{-1}=\frac{12EJ\left(3L^3+x^3\xi\right)}{12L^6-L^3(L-4x)(L-x)\xi}$$

4.3. Częstość własna układu

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{12EJ\left(3L^3+x^3\xi\right)}{m\left[12L^6-L^3(L-4x)(L-x)\xi\right]}}$$

Dla skrajnych wartości ξ tj. $\xi\in(0;\infty)$ uzyskuje się

$$\lim_{\xi\to 0}\omega=\lim_{\xi\to 0}\sqrt{\frac{12EJ\left(3L^3+x^3\xi\right)}{m\left[12L^6-L^3(L-4x)(L-x)\xi\right]}}=\sqrt{\frac{3\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}=1{,}732\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}$$

$$\lim_{\xi\to \infty}\omega=\lim_{\xi\to \infty}\sqrt{\frac{12EJ\left(3L^3+x^3\xi\right)}{m\left[12L^6-L^3(L-4x)(L-x)\xi\right]}}=\sqrt{-\frac{12EJ\,x^3}{mL^3(L-4x)(L-x)^2}}$$

Następnie szukamy ekstremalnych wartości funkcji ω(x) w przedziale $x\in(L\,;\,2L)$ dla $\xi\to\infty$

$$\max\left(\sqrt{-\frac{12EJ\,x^3}{mL^3(L-4x)(L-x)^2}}\right)=\lim_{x\to L+}\left(\sqrt{-\frac{12EJ\,x^3}{mL^3(L-4x)(L-x)^2}}\right)=+\infty$$

$$\min\left(\left(\sqrt{-\frac{12EJ\,x^3}{mL^3(L-4x)(L-x)^2}}\right)\right)=3{,}70328\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}},\qquad x=2L$$

Stąd częstość własna układu zależna od sztywności więzi k_Δ oraz współrzędnej x zawiera się w przedziale liczbowym

$$\omega\in\left(1{,}732\sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{mL}^3}}\;;\,\infty\right)$$

ZADANIE 5.

5.3 Równanie ruchu punktu materialnego układu dynamicz-
nego ma postać $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_0(\sin pt + 3\cos pt)$. Dla
drgań ustalonych podać opóźnienie fazowe odpowiedzi $q(t)$.
Podać relację na siłę oporów tłumienia $(c\dot{q})$, jeśli
$p = \sqrt{10/11}\,\omega$, $\gamma = 1/10$. Ile wynosi am $c\dot{q}$?

Według skryptu prof. Langera *Dynamika Budowli*, dla równania ruchu drgań wymuszonych harmonicznie postaci

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_S \sin(pt) + F_C \cos(pt)$$

drgania ustalone (rozwiązanie powyższego równania) można opisać wzorem

$$q(t) = \frac{\nu}{k} F_S \sin(pt - \phi) + \frac{\nu}{k} F_C \cos(pt - \phi)$$

oraz amplitudę przemieszczenia

$$amq(t) = \frac{\nu}{k}\sqrt{F_S^2 + F_C^2}$$

gdzie:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \gamma^2\eta^2}}$$ jest współczynnikiem dynamicznym

$$\varphi = arctg\left(\frac{\gamma\eta}{1-\eta^2}\right)$$ jest opóźnieniem fazowym

5.1. Opóźnienie fazowe

Dla danych w zadaniu mamy

$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{\sqrt{\frac{10}{11}}\,\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{10}{11}}$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 * \left(\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2}} = 7{,}59072$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{0{,}1*\sqrt{\frac{10}{11}}}{1-\left(\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2}\right) = 0{,}809217\text{rad}$$

Opóźnienie fazowe odpowiedzi $q(t)$ wynosi $\varphi = 0{,}809217 rad$

5.2. Siła oporów ruchu

Siła oporów ruchu reprezentowana jest przez składnik równania „$c\,\dot{q}(t)$", stąd

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\nu}{k}F_S\sin(pt-\phi)+\frac{\nu}{k}F_C\cos(pt-\phi)\right) = \frac{\nu}{k}pF_S\cos(pt-\phi)-\frac{\nu}{k}pF_C\sin(pt-\phi)$$

Siła oporów ruchu dla danych jak w zadaniu, ma postać

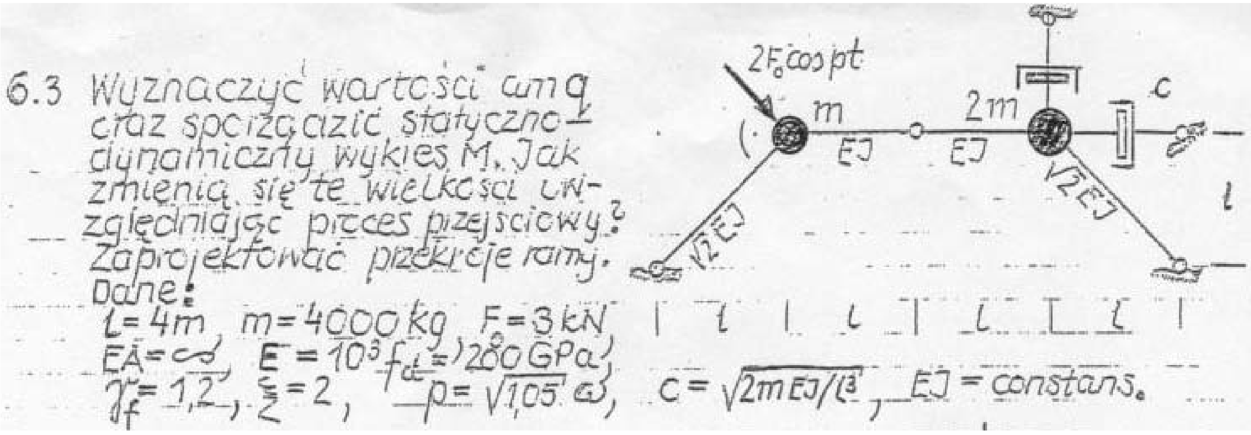
$$F_S = F_0$$
$$F_C = 3F_0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c\,\dot{q}(t) = \frac{7{,}59072}{k}*\sqrt{\frac{10}{11}}*\sqrt{\frac{k}{m}}*0{,}1*\sqrt{k*m}*F_0*\cos(pt-0{,}809217)+$$
$$-\frac{7{,}59072}{k}*\sqrt{\frac{10}{11}}*\sqrt{\frac{k}{m}}*0{,}1*\sqrt{k*m}*3F_0*\sin(pt-0{,}809217)=$$
$$=0{,}723747F_0\cos(pt-0{,}809217)-2{,}17124F_0\sin(pt-0{,}809217)$$

<u>Wartość amplitudalna siły oporów ruchu</u>

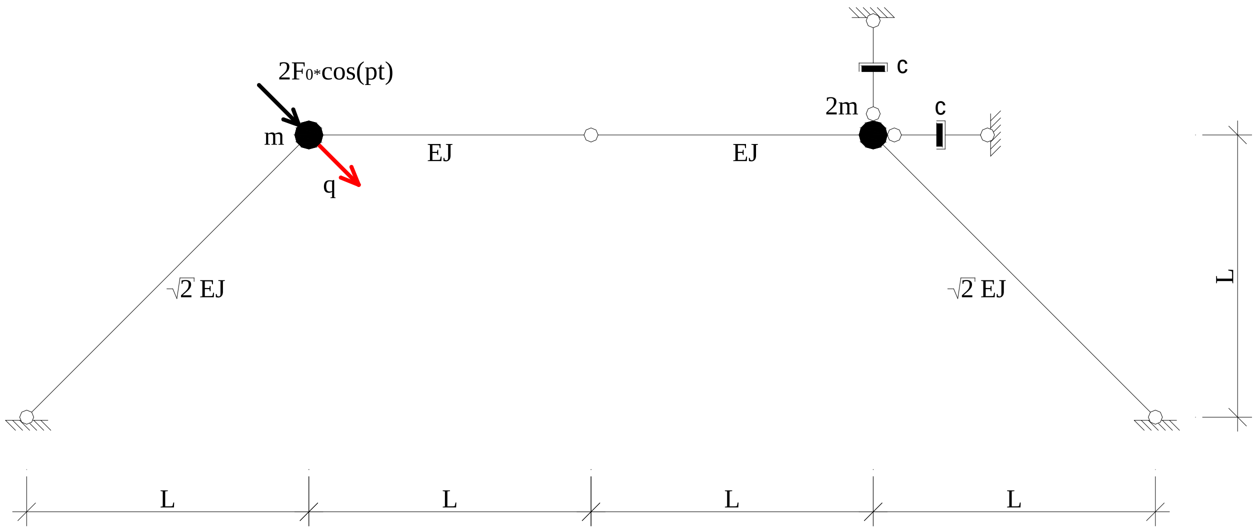
$$\text{am}(c\,\dot{q}(t)) = \sqrt{(\text{am}\,c\dot{q}_S)^2+(\text{am}\,c\dot{q}_C)^2} = \sqrt{(-2{,}17124F_0)^2+(0{,}723747F_0)^2} = 2{,}28869F_0$$

ZADANIE 6.



6.1. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

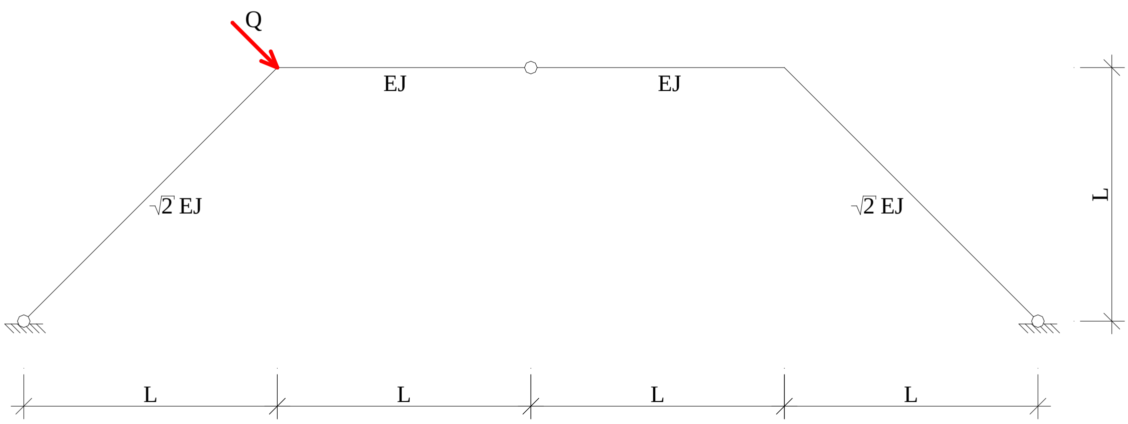
Analizowany układ ma jeden dynamiczny stopień swobody. Współrzędną uogólnioną przyjęto jako ruch masy skupionej „m" prostopadły do osi pręta.



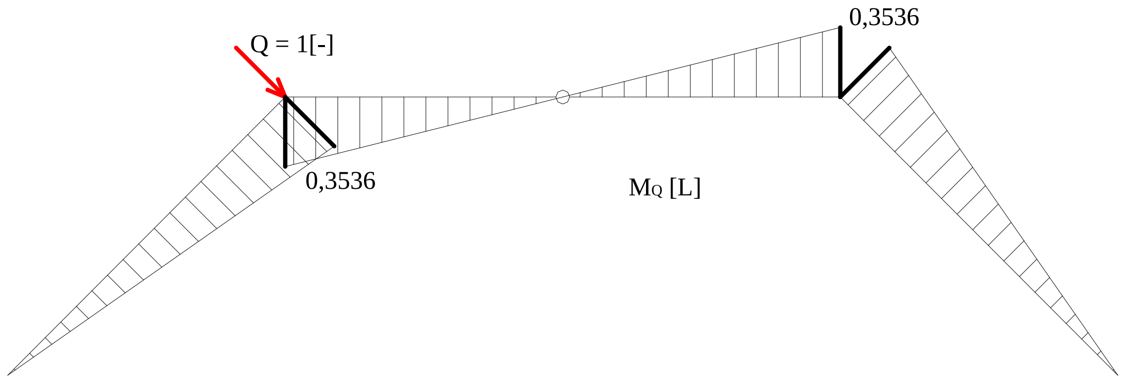
Sztywność układu wyznaczono za pomocą metody sił obliczając najpierw podatność układu a następnie sztywność według relacji

$$k = \delta^{-1}$$

Układ podstawowy metody sił



Stan jednostkowy Q = 1[-]



Podatność układu

$$\delta_{QQ} = \frac{1}{\sqrt{2}EJ}\left[\frac{1}{2} * \sqrt{2}L * 0{,}3536L * \frac{2}{3} * 0{,}3536L\right] * 2 +$$

$$+ \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} * L * 0{,}3536L * \frac{2}{3} * 0{,}3536L\right] * 2 = 0{,}1667\frac{L^3}{EJ}$$

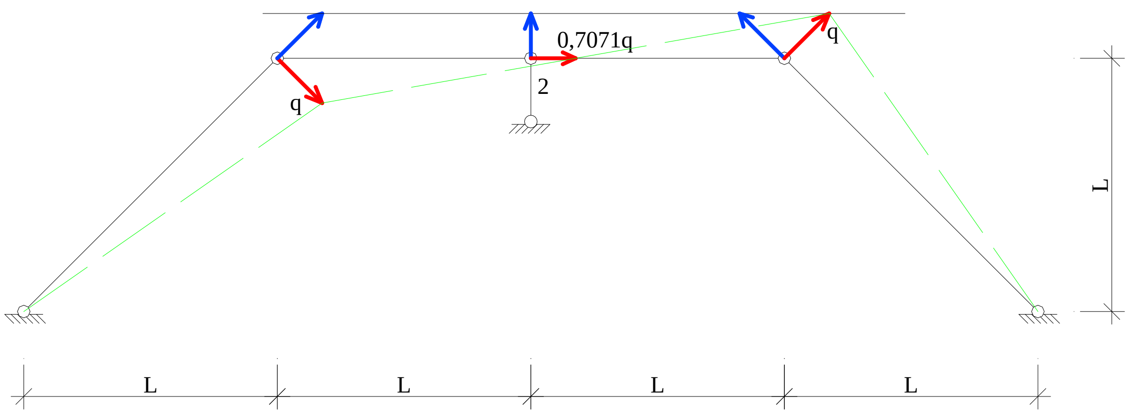
Sztywność układu

$$k = \delta_{QQ}^{-1} = \left(0{,}1667\frac{L^3}{EJ}\right)^{-1} = 6\frac{EJ}{L^3}$$

6.2. Wyznaczenie masy na kierunku współrzędnej uogólnionej

Masę układu wyznaczono na podstawie sformułowania energii kinetycznej E_k.

Plan przemieszczeń – na podstawie schematu kinematycznego



$$E_k = \frac{1}{2} * m * \dot{q}^2 + \frac{1}{2} * 2m * \dot{q}^2 = \frac{1}{2} * 3m * \dot{q}^2$$

$$\tilde{m} = 3m$$

6.3. Wyznaczenie tłumienia na kierunku współrzędnej uogólnionej

$$\Phi = \frac{1}{2} * c * \dot{q}^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} * c * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q} \right)^2 + \frac{1}{2} * c * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q} \right)^2 = \frac{1}{2} * c * \dot{q}^2$$

$$\tilde{c} = c$$

6.4. Wyznaczenie siły wzbudzającej

$$L = F(t) * q$$

$$L = 2F_0 \cos(pt) * q$$

$$F(t) = 2F_0 \cos(pt)$$

6.5. Równanie ruchu układu

Równanie dla danych w zadaniu ma postać

$$3m\, \ddot{q}(t) + \sqrt{\frac{2mEJ}{L^3}}\, \dot{q}(t) + 6\frac{EJ}{L^3}\, q(t) = 2F_0 \cos(pt)$$

Częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6EJ}{3mL^3}} = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} = 1{,}4142\sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$$

6.6. Wyznaczenie amplitudy siły kinetycznej oraz amplitudy przemieszczenia dynamicznego w stanie drgań ustalonych

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{k * m}} = \frac{\sqrt{\frac{2m * EJ}{L^3}}}{\sqrt{\frac{6EJ}{L^3} * 3m}} = \frac{1}{3}$$

$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{\sqrt{1{,}05}\,\omega}{\omega} = \sqrt{1{,}05} = 1{,}0247$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{(1-1{,}05)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 * 1{,}05}} = 2{,}89683$$

<u>Amplituda siły kinetycznej</u>

$$amQ = \nu\sqrt{1+\gamma^2\eta^2} * amF$$

dla $\eta = \sqrt{1{,}05}$, stąd

$$amQ = 2{,}89683 * \sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2 * 1{,}05} * 2F_0 = 6{,}1223F_0$$

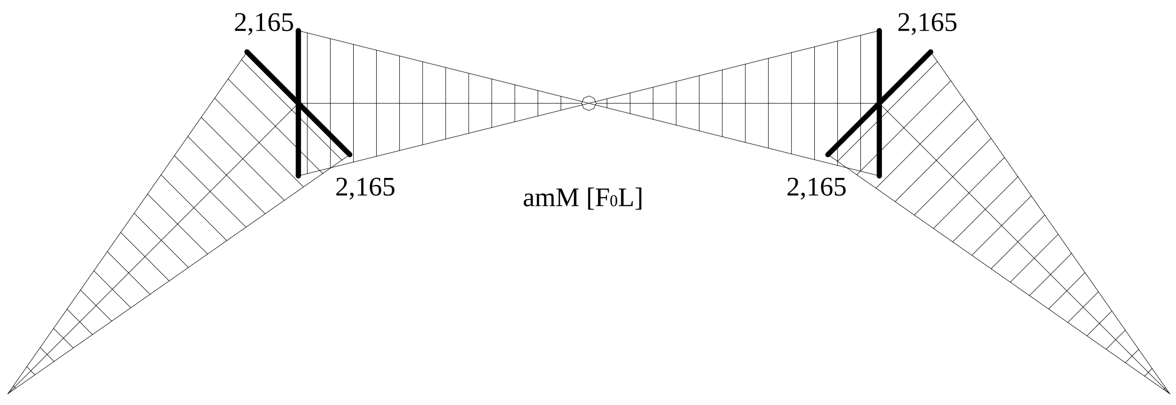
<u>Amplituda przemieszczenia dynamicznego</u>

$$am\,q = \frac{\nu}{k} amF = \frac{2{,}89683}{6EJ/L^3} * 2F_0 = 0{,}96561 * \frac{F_0 L^3}{EJ}$$

<u>Amplitudalne momenty dynamiczne</u>

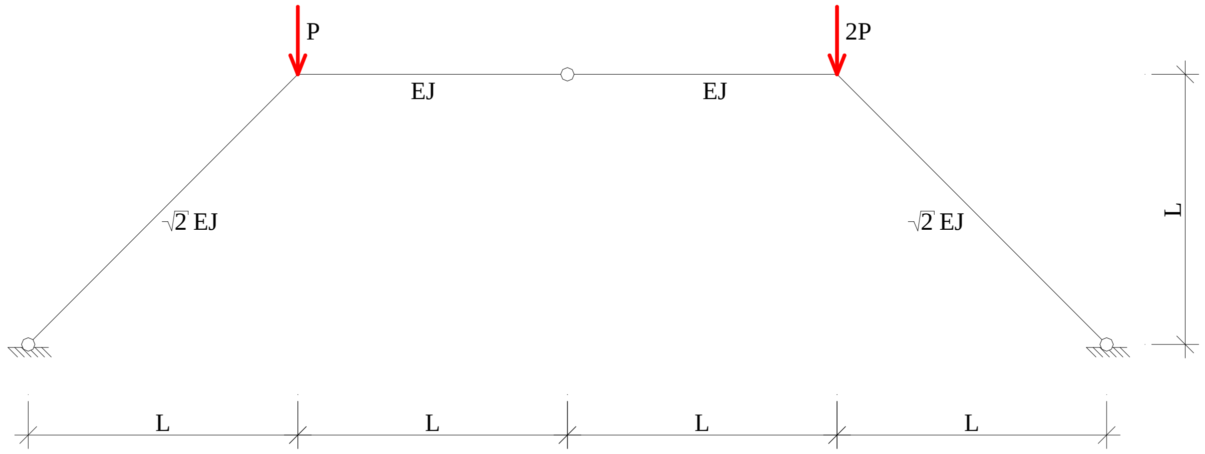
Amplitudalne momenty dynamiczne wyznaczono na podstawie wykresu momentów zginających w stanie Q = 1[-]

$$amM = amQ * M_Q = 6{,}1223F_0 * 0{,}3536L = 2{,}165F_0L$$

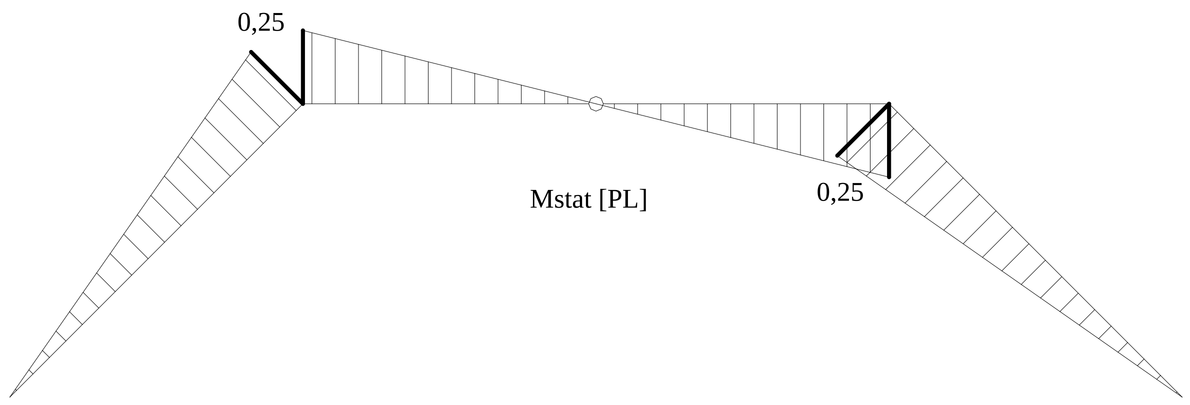


6.7. Rozwiązanie statyczne

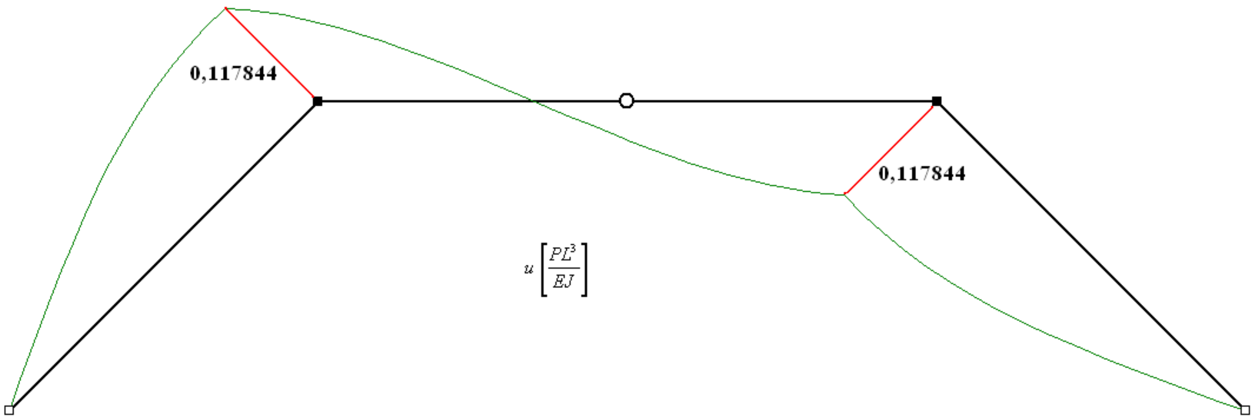
Statyczne działanie masy: $P = m\,g$



Wykres momentów statycznych



Wykres przemieszczeń statycznych



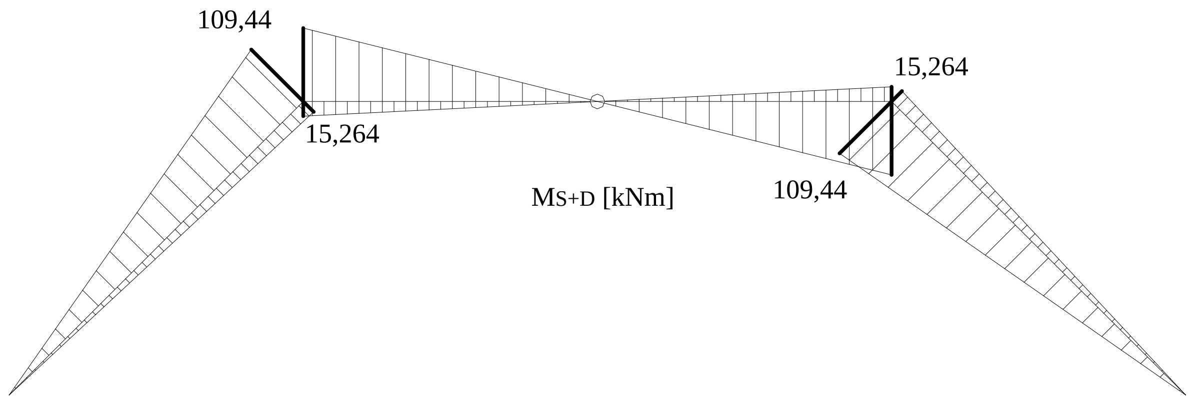
6.8. Obwiednia momentów statyczno-dynamicznych. Projektowanie przekrojów ramy

Momenty statyczno dynamiczne

$$M^{S+D} = \gamma_f * M^{stat} \pm \gamma_f * \xi * amM$$

$$M^{S+D} = 1{,}2*0{,}25*4000*9{,}81*4{,}0+1{,}2*2*2{,}165*3000*4{,}0 = 109440\text{Nm} = 109{,}44\text{kNm}$$
$$M^{S+D} = 1{,}2*0{,}25*4000*9{,}81*4{,}0-1{,}2*2*2{,}165*3000*4{,}0 = \text{-}15264\text{Nm} = \text{-}15{,}264\text{kNm}$$

Wykres obwiedni momentów statyczno-dynamicznych



Dobór przekroju poprzecznego ze względu na SGN

$$\text{W} > \frac{\text{M}_\text{d}^\text{extr}}{\text{f}_\text{d}}$$

$$\text{W} > \frac{109{,}44\text{kNm}}{200000\text{kPa}} = 547{,}2cm^3$$

Dobór przekroju poprzecznego ze względu na SGU

$$y_{dop} = \frac{l_p}{450} = \frac{4m}{450} = 0{,}0889\text{m}$$

Dla dowolnego przekroju ugięcie wynosi

$$\text{q}_\text{i} = \text{q}_{\text{i,stat}} + \text{amq}_\text{i}$$

$$q_{S+D} = 0{,}117844\frac{PL^3}{EJ} + 0{,}96561\frac{F_0L^3}{EJ} = 0{,}117844\frac{4000*9{,}81*4^3}{200*10^9*J} + 0{,}96561\frac{3000*4^3}{200*10^9*J} =$$
$$= \frac{0{,}000002407\text{m}^5}{J}$$

Warunek SGU

$$q_{S+D} < y_{dop}$$

$$\frac{0{,}000002407\mathrm{m}^5}{J} < 0{,}0889m$$

$$J > \frac{0{,}000002407\mathrm{m}^5}{0{,}0889m} = 0{,}000027075\mathrm{m}^4 = 2707{,}5\mathrm{cm}^4$$

Przyjęto przekrój

2 C240: $W_x = 600$ cm^3 , $J_x = 7200$ cm^4

Przekrojowa sztywność giętna

$EJ = 200*10^9*7200*10^{-8} = 14400000$ Nm^2

6.9. Wyznaczenie amplitudy siły kinetycznej oraz amplitudy przemieszczenia dynamicznego w procesie przejściowym

Siła kinetyczna

$$Q(t) = k\left(q_S(t) + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_S(t) - \frac{\gamma p}{\omega}\dot{q}_C(t)\right)\sin(\varphi(t)) + k\left(q_C(t) + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_C(t) + \frac{\gamma p}{\omega}\dot{q}_S(t)\right)\cos(\varphi(t))$$

przy czym $\varphi(t)$ nie jest znana.

$$Q_S(t) = k\left(q_S(t) + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_S(t) - \frac{\gamma p}{\omega}\dot{q}_C(t)\right)$$

$$Q_C(t) = k\left(q_C(t) + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_C(t) + \frac{\gamma p}{\omega}\dot{q}_S(t)\right)$$

Zamiast amplitudalnej wartości można podać jedynie majorantę (obwiednię)

$$\hat{Q}(t) = \sqrt{Q_S^2(t) + Q_C^2(t)}$$

Przemieszczenie dynamiczne

$$q_S(t) = \left(q_S(t) + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_S(t) - \frac{\gamma p}{\omega}\dot{q}_C(t)\right)$$

$$q_C(t) = \left(q_C(t) + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_C(t) + \frac{\gamma p}{\omega}\dot{q}_S(t)\right)$$

Majoranta przemieszczenia

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\hat{q}_S^2(t) + \hat{q}_C^2(t)}$$

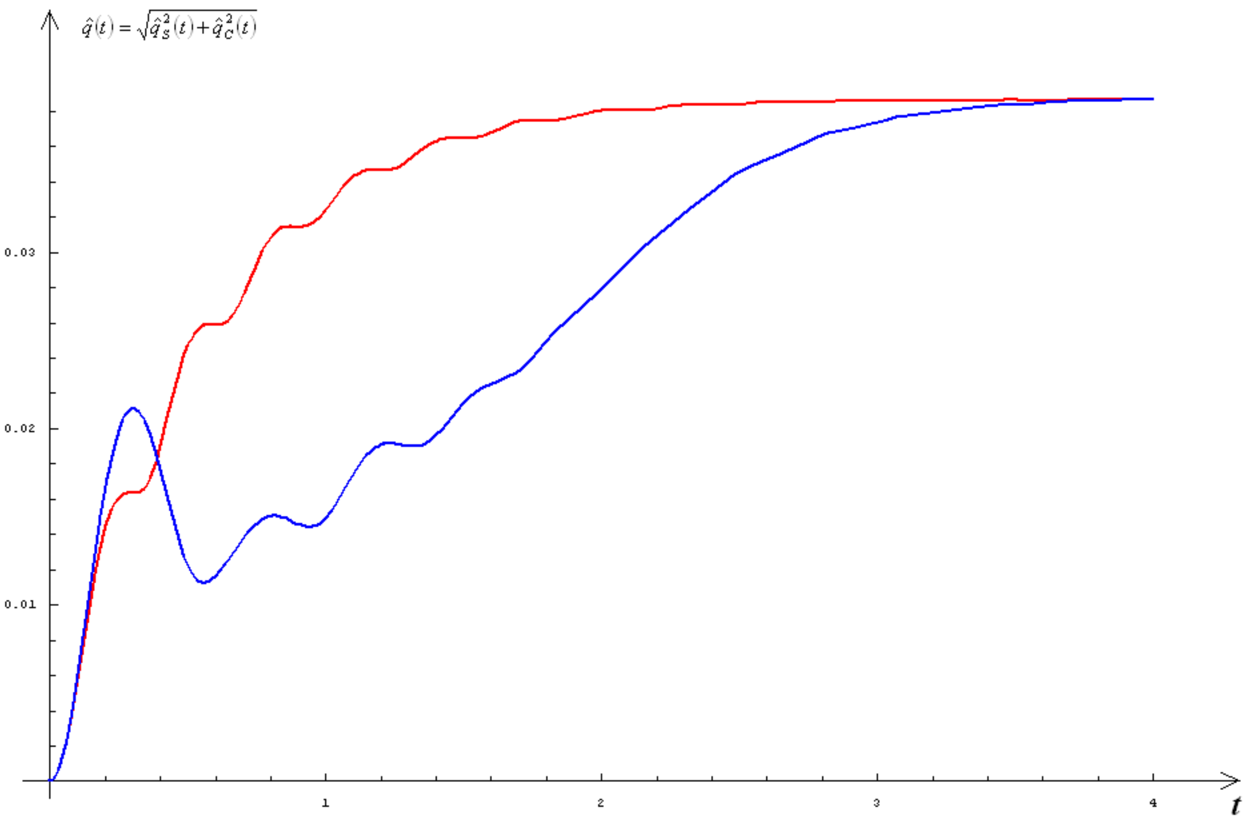
Są to podstawowe i zarazem najbardziej istotne różnice pomiędzy drganiami w stanie ustalonym, a procesem przejściowym. W celu wyznaczenia obwiedni siły kinetycznej i przemieszczenia dynamicznego, należy rozwiązać numerycznie układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_S(t) \\ \ddot{q}_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\omega & -2p(t) \\ 2p(t) & \gamma\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_S(t) \\ \dot{q}_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 - p^2(t) & -\gamma\omega\, p(t) - \dot{p}(t) \\ \gamma\omega\, p(t) + \dot{p}(t) & \omega^2 - p^2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_S(t) \\ q_C(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_S(t) \\ F_C(t) \end{bmatrix}$$

co jest zadaniem niezwykle skomplikowanym (współczynniki zmienne w czasie) !!!

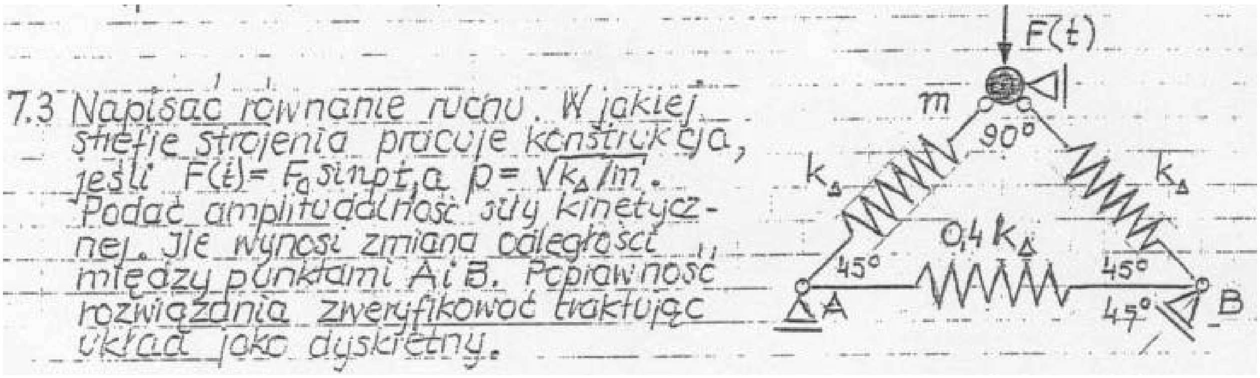
Po numerycznym scałkowaniu powyższego układu równań uzyskano majoranty przemieszczeń dynamicznych:

- kolor czerwony dla stałej częstości wzbudzania $p = \sqrt{1{,}05}\,\omega$ - drgania ustalone
- kolor niebieski (proces przejściowy) dla liniowo zmiennej częstości wzbudzania
$$p = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1{,}05}}{2}\,\omega\, t & t \le 2s \\ \sqrt{1{,}05}\,\omega & t > 2s \end{cases}$$



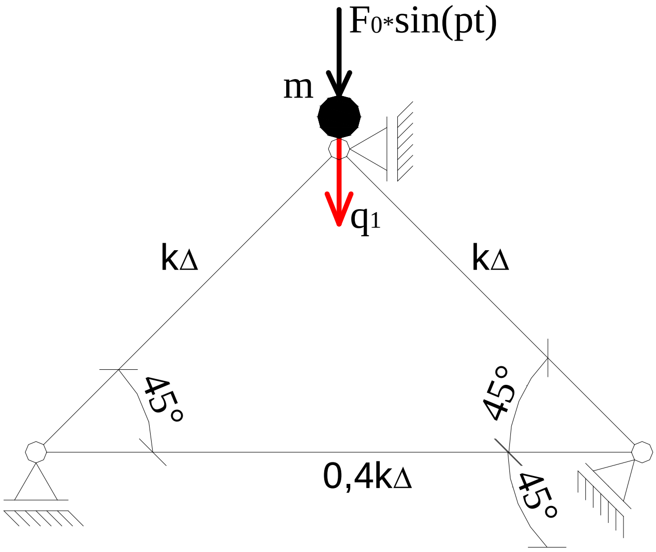
Z wykresu wywnioskować można, że po dostatecznie długim przedziale czasu (tutaj około 4s) proces przejściowy zanika i odpowiedź układu jest identyczna jak dla drgań ustalonych.

ZADANIE 7.


7.3 Napisać równanie ruchu. W jakiej strefie strojenia pracuje konstrukcja, jeśli $F(t)= F_0 \sin pt$, a $p= \sqrt{k_\Delta / m}$. Podać amplitudalność siły kinetycznej. Ile wynosi zmiana całegłości między punktami A i B. Poprawność rozwiązania zweryfikować traktując układ jako dyskretny.

7.1. Przyjęcie współrzędnej uogólnionej

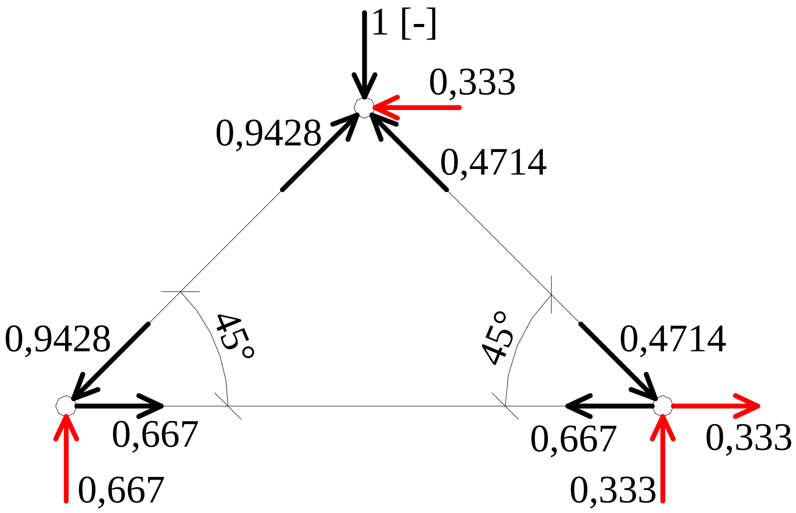
Analizowany układ ma jeden dynamiczny stopień swobody. Współrzędną uogólnioną przyjęto jako pionowe przemieszczenie masy skupionej (rys. poniżej).



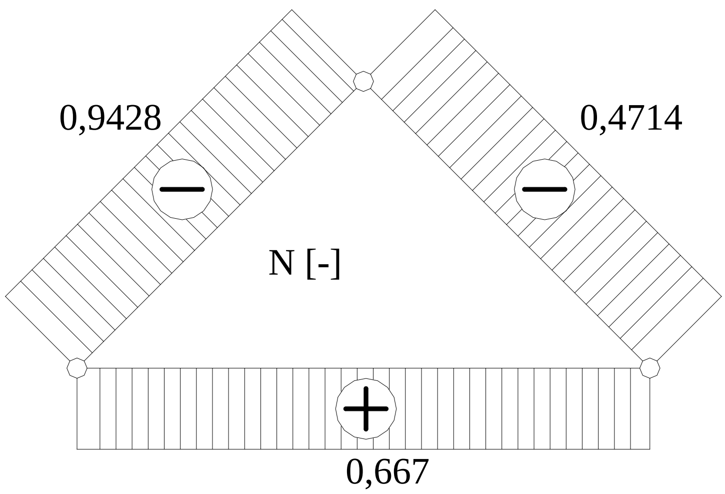
7.2. Wyznaczenie sztywności układu

Sztywność układu można wyznaczyć na podstawie podatności rozwiązując ten układ jak kratownicę elementarną.

Rozkład sił od obciążenia jednostkowego



Wykres sił osiowych



Podatność układu

$$\delta = \frac{1}{k_\Delta}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{k_\Delta}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{1}{0{,}4k_\Delta}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2{,}2222222\frac{1}{k_\Delta}$$

Sztywność układu

$$k = \delta^{-1} = \left(2{,}2222222\frac{1}{k_\Delta}\right)^{-1} = 0{,}45k_\Delta$$

7.3. Równanie ruchu oraz częstość własna układu

Postać ogólna równania ruchu dla układu o jednym stopniu swobody

$$m\ddot{q}(t)+c\,\dot{q}(t)+k\,q(t)=F(t)$$

Dla danych z zadania mamy

$$m\,\ddot{q}(t)+0{,}45k_{\Delta}\,q(t)=F_0\sin(pt)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{0{,}45k_{\Delta}}{m}}=0{,}67082\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}$$

7.4. Ustalenie strefy strojenia

$$\eta=\frac{p}{\omega}$$

$$\eta=\frac{\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}}{0{,}67082\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}}=1{,}49071$$

$\eta=1{,}49071>1$ konstrukcja pracuje w strefie niskiego strojenia !

7.5. Amplitudalna wartość siły kinetycznej

Dla układu, w którym tłumienie jest pomijalnie małe współczynnik dynamiczny wyznacza się ze wzoru

$$\nu=\frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$$

$$\nu=\frac{1}{\left|1-1{,}49071^2\right|}=0{,}818186$$

$$amQ=\nu\cdot amF=0{,}818186F_0$$

7.6. Zmiana odległości między punktami A, B

Pręt poziomy można potraktować jako izolowaną więź sprężystą, która rozciągana jest siłą 0,5 [-]. Zatem zmianę odległości między punktami A i B wyznaczyć można z definicji więzi sprężystej

$$|AB|=\frac{P}{k}=\frac{0{,}667}{0{,}4k_{\Delta}}=\frac{1{,}66667}{k_{\Delta}}$$