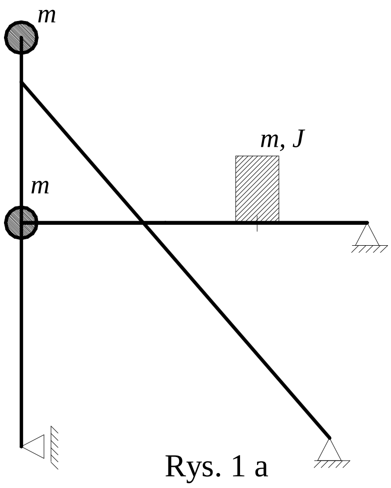
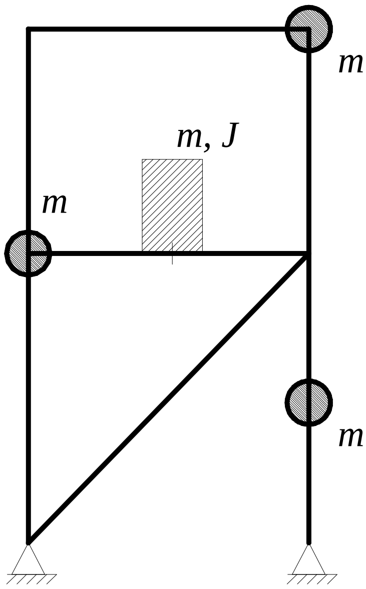
ZADANIA Z PODSTAW DYNAMIKI BUDOWLI

wersja z 05.12.2017r.

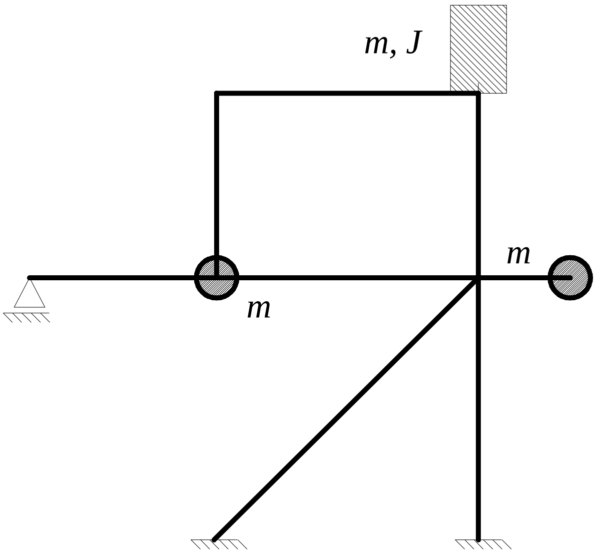
1. Dobierz współrzędne dynamiczne dla konstrukcji pokazanych na Rys. 1a÷1d, w przypadku $EA \neq \infty$ i $EJ \neq \infty$.
2. Dobierz współrzędne dynamiczne dla konstrukcji pokazanych na Rys. 1a÷1d, w przypadku $EA = \infty$ i $EJ \neq \infty$.



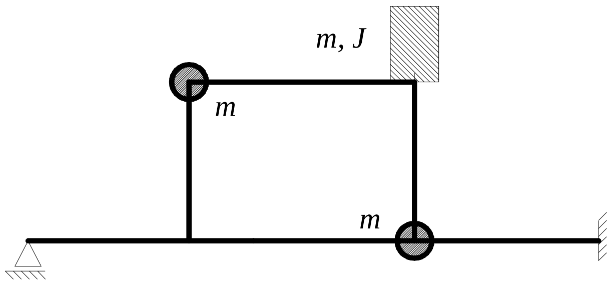
Rys. 1 a



Rys. 1 b

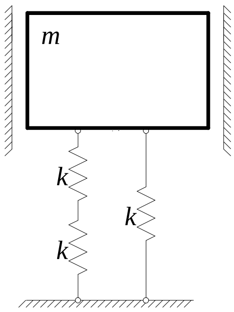


Rys. 1 c

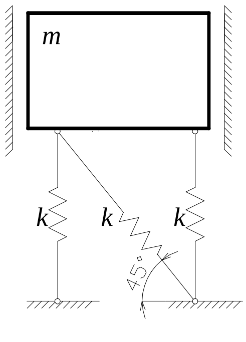


Rys. 1 d

3. Oblicz sztywność zastępczą układów pokazanych na Rys. 2, dane: *k*.

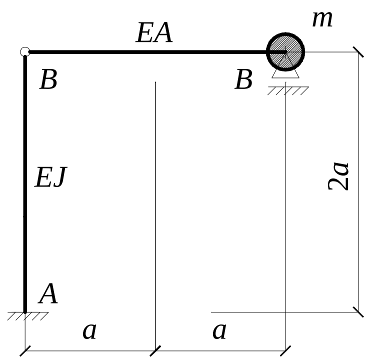


Rys. 2a

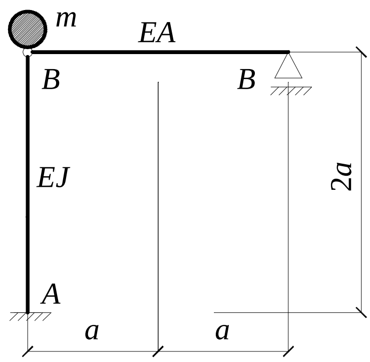


Rys. 2b

4. Oblicz sztywność zastępczą układów pokazanych na Rys. 3, dane: *EJ, EA, a*.

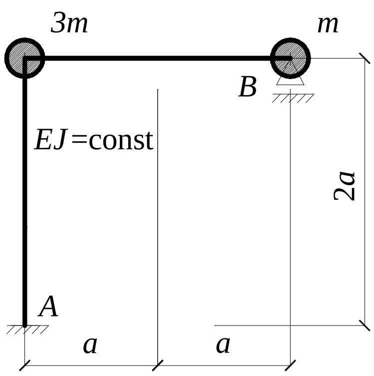


Rys. 3a

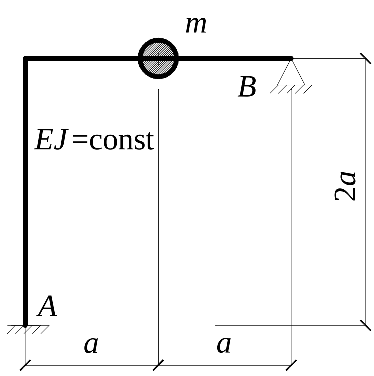


Rys. 3b

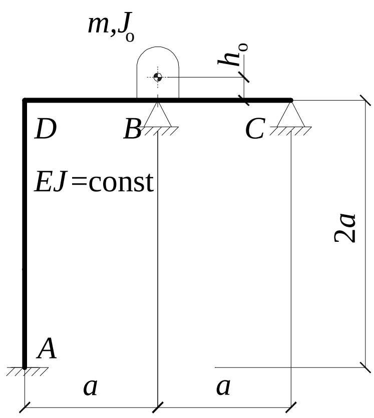
5. Oblicz sztywność zastępczą i częstość drgań własnych układów ($EA=\infty$) pokazanych na Rys. 4, dane: EJ, a, m, J_0, h_0.
6. Rozwiąż poprzednie zadanie w wariancie podpór przegubowych w p. *A*.



Rys. 4a



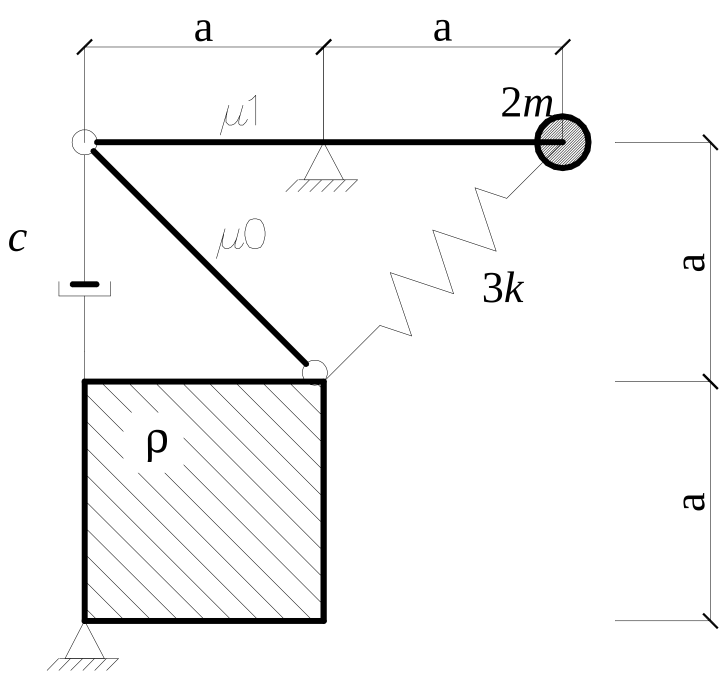
Rys. 4b



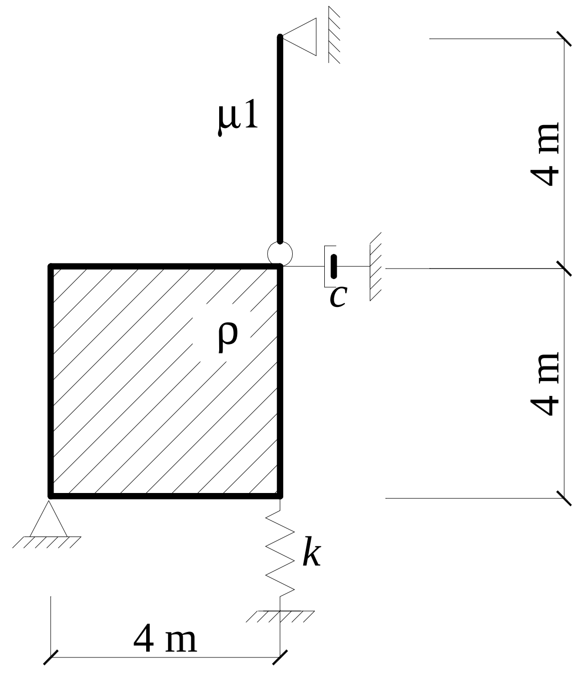
Rys. 4c

7. Oblicz parametry układu o jednym dynamicznym stopniu swobody pokazanych na Rys.5a i5b: częstość, częstotliwość, okres, drgań własnych nietłumionych i tłumionych, ułamek tłumienia krytycznego.
   Dane: a = 3 m, m=50 kg, μ1= 200 kg/m, μ0= 0 kg/m, ρ=50 kg/m^2, k=10^6 N/m , c=10^4 Ns/m, EJ=EA=∞.

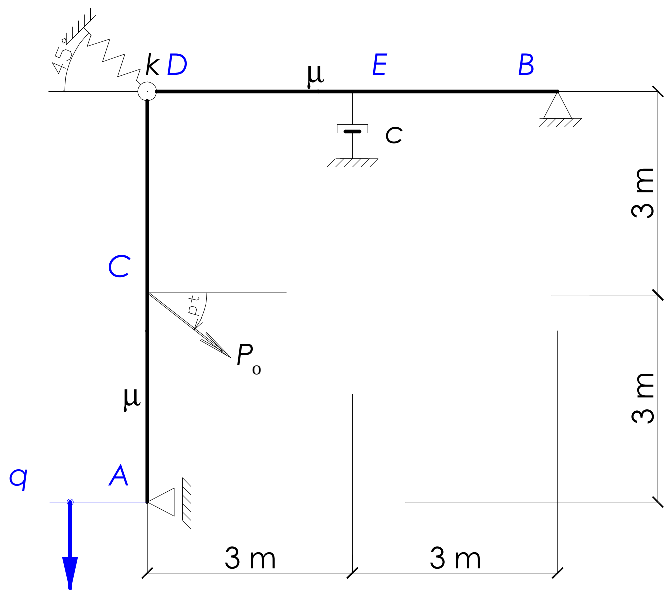
8. Oblicz parametry układu o jednym dynamicznym stopniu swobody pokazanego na Rys.5c: częstość, częstotliwość, okres, drgań własnych nietłumionych i tłumionych, ułamek tłumienia krytycznego.
   Oblicz odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne : amplitudę drgań, opóźnienie fazowe.
   Dane: μ= 200 kg/m, k=10^6 N/m , c=10^4 Ns/m, P_0 = 10 kN, p=20 rad/s, EJ=EA=∞.



Rys. 5a

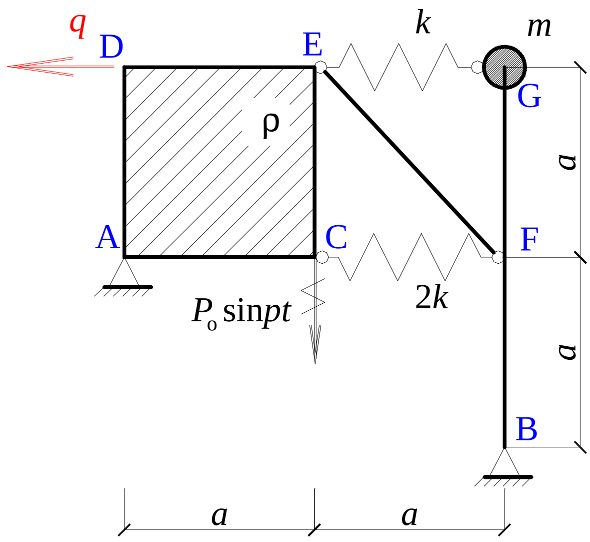


Rys. 5b



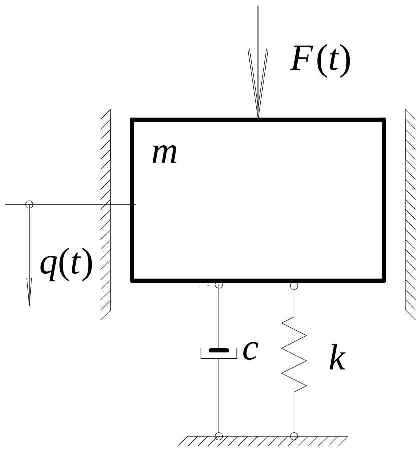
Rys. 5 c

9. Oblicz parametry układu o jednym dynamicznym stopniu swobody pokazanych na Rys.6: częstość, częstotliwość, okres drgań własnych nietłumionych i tłumionych; ułamek tłumienia krytycznego.
Oblicz odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne : amplitudę drgań (am *q*), opóźnienie fazowe.
Dane: a=3 m, ρ= 200 kg/m^2, k=10^6 N/m, m=500 kg , P_o = 10 kN, p=20 rad/s, EJ=EA=∞.

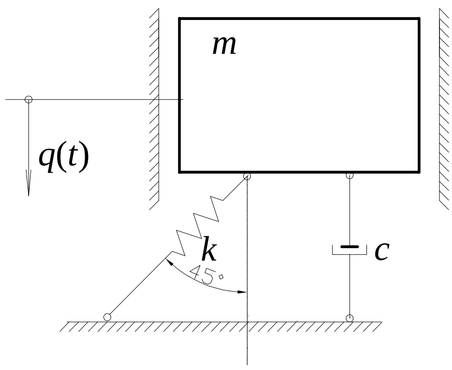


Rys. 6

10. Oblicz częstotliwość drgań własnych (nietłumionych i tłumionych) [Hz] układu pokazanego na Rys 7a i 7b. (m = 50 kg, k=20 kN/m, c=400 Ns/m).
11. Oblicz ile powinien wynosić parametr tłumienia c, aby w układzie pokazanym na Rys. 7a (7b) okres drgań własnych tłumionych (T') był dwa razy większy od okresu drgań własnych nietłumionych (T). (m=50 kg, k=10 kN/m).
12. Oblicz amplitudę przemieszczeń układu pokazanego na Rys. 7a (c=500 Ns/m, k=100 kN/m, m=40 kg, $F(t)=P_1 \sin pt + P_2 \cos pt$, P_1 = 30 kN, P_2 =40 kN, p=40 rad/s). Wynik podaj w mm.
13. Oblicz ile powinna wynosić sztywność więzi sprężystej k, aby kąt opóźnienia fazowego w układzie pokazanym na Rys.7a wynosił 90°. (m=50 kg, c=400 Ns/m, $F(t) = P_0 \sin 2\pi f t$, P_0=10 kN, f=10 Hz).

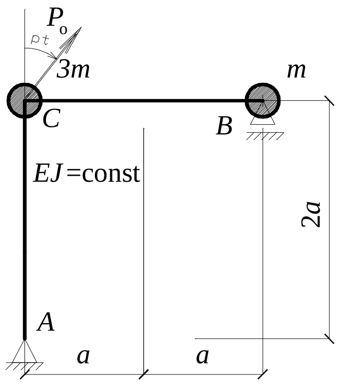


Rys. 7a

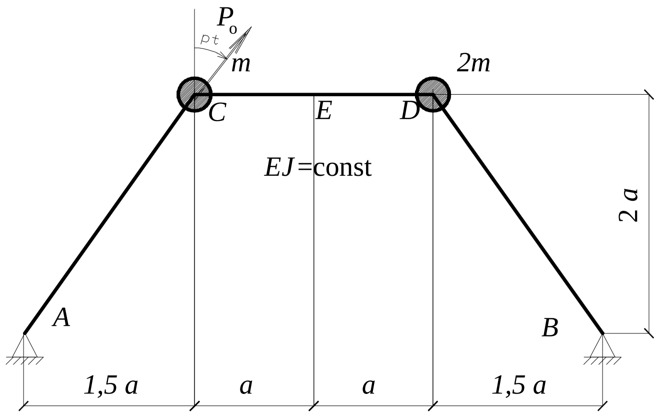


Rys. 7 b

14. Oblicz amplitudę drgań punktu C, układów przedstawionych na Rys. 8. Dane: a=2 m, m=500 kg, P_o = 10 kN, p=20 rad/s, EJ=10^6 Nm^2, EA=∞

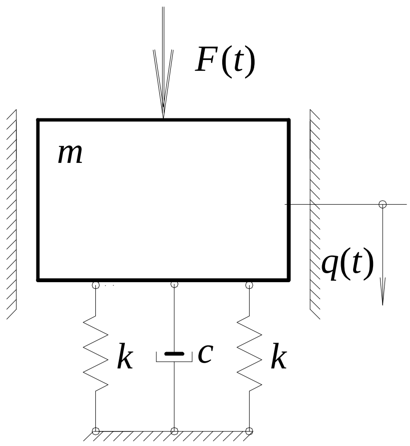


Rys. 8 a



Rys. 8 b

15. Amplituda drgań swobodnych zmalała o połowę po 8 cyklach. Jaki ułamek tłumienia krytycznego (α) występuje w tym układzie? Ile wynosi logarytmiczny dekrement tłumienia? Ile wynosi iloraz amplitudy po 10 cyklach do amplitudy po 20 cyklach?
16. Oblicz amplitudę drgań wymuszonych układu pokazanego na Rys. 9 (m = 50 kg, k=10 kN/m, c=500 Ns/m, $F(t) = P0 \sin pt$, P_0=10 kN, p=10 rad/s).

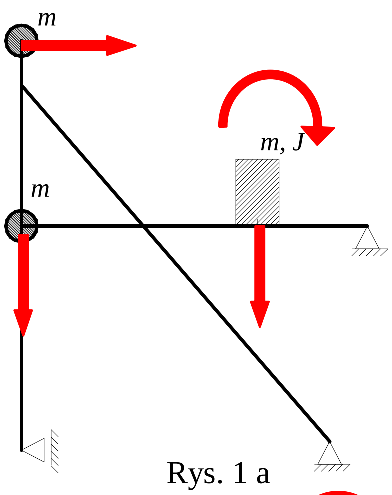


Rys. 9

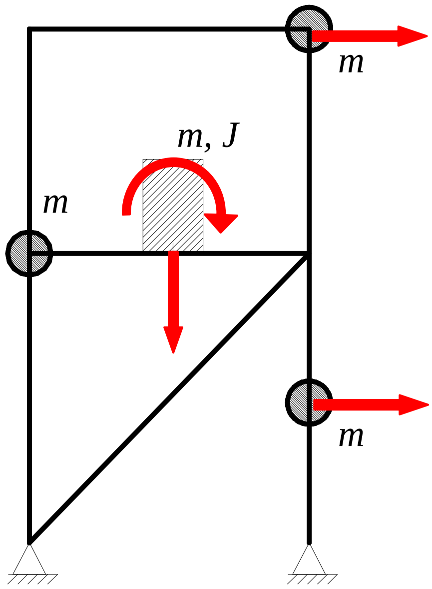
Jacek Grosel

ODPOWIEDZI

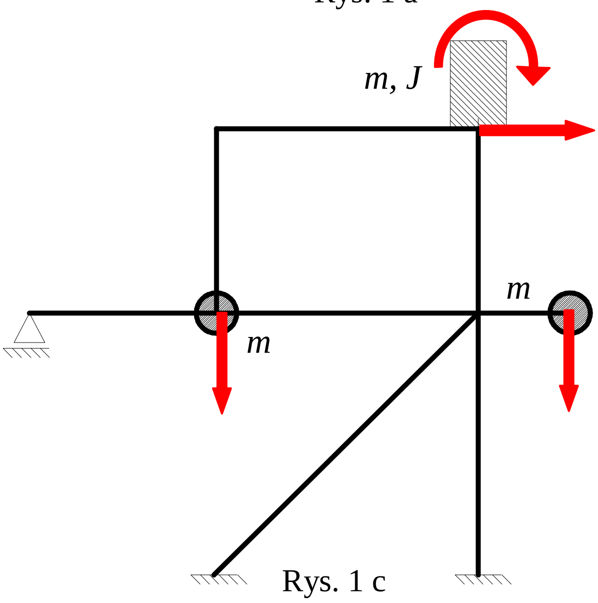
1. Teoria: Liczba dynamicznych stopni swobody równa jest sumie współrzędnych obrotowych (rotacyjnych R) i przesuwnych (P). Przy uwzględnianiu odkształcalności osiowej i giętnej ($EA \neq \infty$ i $EJ \neq \infty$) każdy pręt może być traktowany jako więź odkształcalna, tak więc można w rozpatrywanym schemacie pominąć wszystkie pręty – pozostają tylko więzi nieodkształcalne.
   a. $n_d = 7$,
   b. $n_d = 9$,
   c. $n_d = 7$,
   d. $n_d = 7$.
2. Teoria: Przy uwzględnianiu tylko odkształcalności giętnej ($EA = \infty$ i $EJ \neq \infty$) liczba dynamicznych stopni swobody równa jest sumie współrzędnych obrotowych (rotacyjnych R) i przesuwnych (P). Liczba współrzędnych obrotowych równa jest liczbie tarcz mogących wykonywać obrót. Liczbę współrzędnych przesuwnych wyznacza się analizując łańcuch kinematyczny. Kierunek dodanych więzi zapewniających geometryczną niezmienność łańcucha kinematycznego i jednocześnie spełniających wymaganie ruchu masy po zwolnieniu tej więzi jest kierunkiem współrzędnych przesuwnych.
   a. $n_d = 4$,
   b. $n_d = 4$,
   c. $n_d = 4$,
   d. $n_d = 4$.



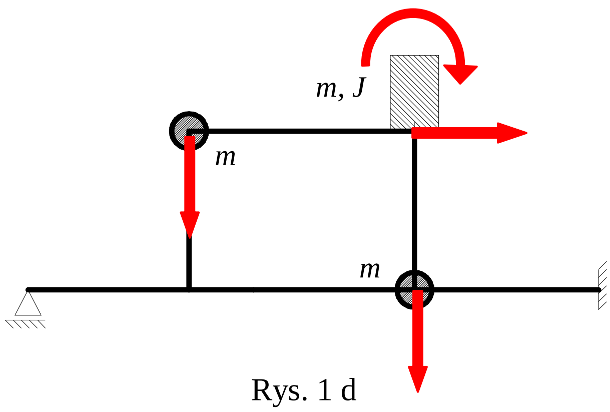
Rys. 1 a



Rys. 1 b



Rys. 1 c



Rys. 1 d

3.

a. $k_{zast} = 1{,}5\,k$,
b. $k_{zast} = 2{,}5\,k$.

4.

a. $\frac{1}{k_e} = \frac{2a}{EA} + \frac{8a^3}{3EJ}$,
b. $\frac{3EJ}{8a^3}$.

5.

a. $k_e = \frac{6}{7}\frac{EJ}{a^3}$, $m_e = 4m$, $\omega = \sqrt{\frac{6EJ}{28ma^3}}$
b. $k_e = \frac{168}{19}\frac{EJ}{a^3}$, $m_e = m$, $\omega = \sqrt{\frac{168EJ}{19ma^3}}$,
c. $k_e = \frac{19}{3}\frac{EJ}{a}$, $m_e = mh^2 + J_0$, $\omega = \sqrt{\frac{19EJ}{3(mh^2 + J_0)a}}$.

6.

a. $k_e = \frac{3}{16}\frac{EJ}{a^3}, m_e = 4m$, $\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{64ma^3}}$
b. $k_e = \frac{192}{23}\frac{EJ}{a^3}$, $m_e = m$, $\omega = \sqrt{\frac{192EJ}{23ma^3}}$,
c. $k_e = \frac{69}{11}\frac{EJ}{a}$, $m_e = mh^2 + J_0$, $\omega = \sqrt{\frac{69EJ}{11(mh^2 + J_0)a}}$.

7. Teoria: Modelowanie układu o jednym dynamicznym stopniu swobody polega na wyznaczeniu parametrów zastępczych (ekwiwalentnych): masy (m_{zast}, m_e), sztywności (k_{zast}, k_e) oraz ewentualnie tłumienia (c_{zast}, c_e) i siły (F_{zast}, F_e). Parametry zastępcze wyznacza się porównując wielkości energii w układzie wyjściowym i zastępczym. W celu wyznaczenia:

- masy zastępczej porównuje się energię kinetyczną,
- sztywności zastępczej porównuje się energię potencjalną,
- tłumienia zastępczego porównuje się moc tłumienia,
- siły zastępczej porównuje się pracę obciążenia zewnętrznego.

Energia kinetyczna punktu materialnego określona jest wzorem:

$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\vec{u}}^2 = \frac{1}{2} m \dot{u}_x^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}_y^2$

Energia kinetyczna tarczy (elementu powierzchniowego bądź liniowego) określona jest wzorem:

$E_k = \frac{1}{2} m_t \dot{u}_{0x}^2 + \frac{1}{2} m_t \dot{u}_{0y}^2 + \frac{1}{2} J_{t0} \dot{\varphi}_0^2 = \frac{1}{2} J_{t1} \dot{\varphi}_1^2$

gdzie:

- m_t masa tarczy,
- u_{0x}, u_{0y} przemieszczenia (w kierunku osi x i y) środka ciężkości tarczy p.0
- J_{t0}, biegunowy masowy moment bezwładności tarczy względem punktu 0,
- J_{t1}, biegunowy masowy moment bezwładności tarczy względem punktu 1, punkt 1 jest środkiem obrotu tarczy,

– φ_0, φ_1 kąt obrotu tarczy względem p. 0 , p. 1; oczywiście $\varphi_0 = \varphi_1$

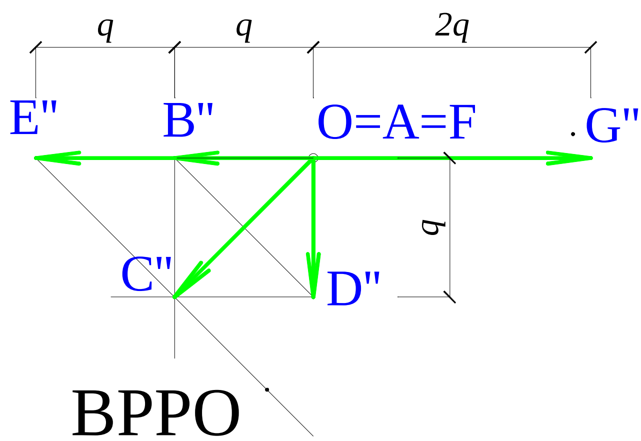
$J_{t0} = \int_A r_0^2 \rho\, dA$, gdzie r_0 jest odległością elementarnego pola dA od p. 0, jeśli gęstość powierzchniowa ρ jest stała to

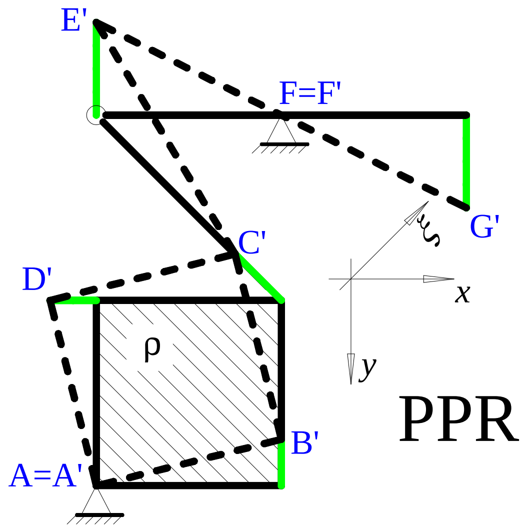
$J_{t0} = \rho \int_A r_0^2\, dA = \rho J_0 = \rho\left(J_{0x} + J_{0y}\right)$, gdzie J_0 jest biegunowym momentem bezwładności względem punktu 0, J_{0x},J_{0y} – momenty bezwładności względem osi x, y przechodzących przez p. 0. Analogicznie

$J_{t1} = \rho \int_A r_1^2\, dA = \rho J_1 = \rho\left(J_{1x} + J_{1y}\right)$. Wzory te zachowują ważność także w przypadku pręta masowego, pamiętać należy (lub umieć wyprowadzić), że moment bezwładności pręta wzdłuż osi pokrywającej się z prętem równy jest zeru. Moment bezwładności względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez środek pręta (w przypadku pręta z stałym rozkładem masy μ i o długości a) wynosi

$J_p = \frac{1}{12} \mu a^3$

Rys 5a Jako współrzędną dynamiczną przyjęto ruch punktu D (poziome przemieszczenie, za dodatki zwrot przyjęto ruch w lewo)





$$E_k = \frac{1}{2} J_{tA} \dot{\varphi}_A^2 + \frac{1}{2} J_{tF} \dot{\varphi}_F^2 + \frac{1}{2} M_G \dot{u}_G^2 = \frac{1}{2} m_{zast} \dot{q}^2$$

$$\varphi_A = -q/a, \quad \varphi_F = 2q/a, \quad u_G = 2q$$

$$\dot{\varphi}_A = -\dot{q}/a, \quad \dot{\varphi}_F = 2\dot{q}/a, \quad \dot{u}_G = 2\dot{q}$$

$$J_{tA} = \frac{1}{3} \rho a a^3 + \frac{1}{3} \rho a a^3 = \frac{2}{3} \rho a^4$$

$$J_{tF} = \frac{1}{12} \mu_1 (2a)^3, \qquad M_G = 2m$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \rho a^2 + \frac{8}{3} \mu_1 a + 8m\right)\dot{q}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \left(u_{C\xi} - u_{G\xi}\right)^2 = \frac{1}{2}\, 3k \left(0 - 2q\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\, 6 k q^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} c \left(\dot{u}_{Dy} - \dot{u}_{Ey}\right)^2 = \frac{1}{2}\, c\left(0 - 2\dot{q}\right)^2 = \frac{1}{2}\, 4c\,\dot{q}^2$$

$$m_{zast} = \frac{2}{3} \rho a^2 + \frac{8}{3} \mu_1 a + 8m = 300 + 1600 + 400 = 2300\,\text{kg}$$

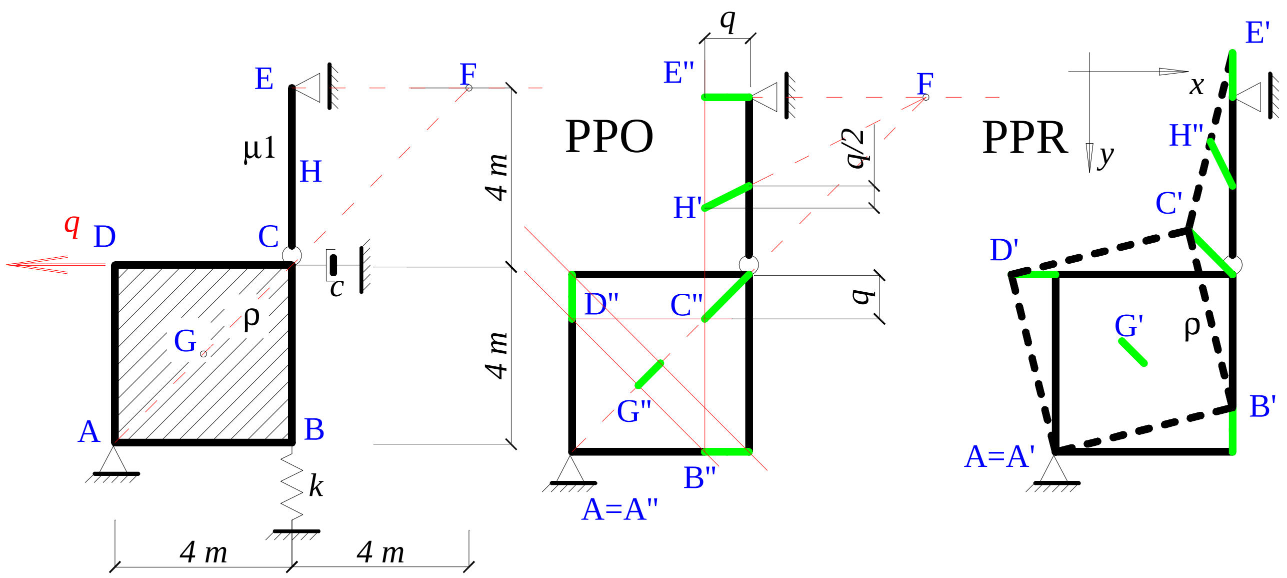
$$k_{zast} = 6k = 6 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$c_{zast} = 4c = 4 \cdot 10^4 \text{ Ns/m}$$

ω = 51,08 rad/s $\quad$ f = 8,13 Hz $\quad$ T=0,123 s

α=0,17 $\rightarrow$ ω’ =0,9854 $\cdot$ ω= 50,33 rad/s, $\quad$ T’=0,125 s

Rys 5b



Środkiem obrotu tarczy jest p. A, a pręta p. F. Tarcza ma środek ciężkości w p. G a pręt w p. H. Założenie o przemieszczeniach małych jest ważne – rozpatrujemy małe drgania – kąt równy jest tangensowi tego kąta.

$$E_k = E_{k\rho} + E_{k\mu} = \tfrac{1}{2} J_{tA}\dot{\varphi}_A^2 + \tfrac{1}{2} J_{pF}\,\dot{\varphi}_F^2 = \tfrac{1}{2} m_{zast}\dot{q}^2$$

$$\varphi_A = \tan\varphi_A = -q/a,\quad \varphi_F = \tan\varphi_F = q/a,$$

$$\dot{\varphi}_A = -\dot{q}/a,\quad \dot{\varphi}_F = \dot{q}/a,$$

$$J_{tA} = \tfrac{1}{3}\rho a a^3 + \tfrac{1}{3}\rho a a^3 = \tfrac{2}{3}\rho a^4$$

$$J_{tF} = \tfrac{1}{3}\mu_1 a^3 + \mu_1 a\cdot a^2 = \tfrac{4}{3}\mu_1 a^3,$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\rho a^2 + \tfrac{4}{3}\mu_1 a\right)\dot{q}^2$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}k\left(u_{By}\right)^2 = \tfrac{1}{2}kq^2$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}c\left(\dot{u}_{Cx}\right)^2 = \tfrac{1}{2}c\dot{q}^2$$

$$m_{zast} = \tfrac{2}{3}\rho a^2 + \tfrac{4}{3}\mu_1 a = 300 + 800 = 1100\,\text{kg}$$

$$k_{zast} = k = 1{,}0\cdot 10^6\ \text{N/m}$$

$$c_{zast} = c = 1{,}0\cdot 10^4\ \text{Ns/m}$$

ω = 30,15 rad/s $\qquad f$ = 4,80 Hz $\qquad T$=0,208 s

α=0,15 $\rightarrow$ ω' =0,989 ω = 29,81 rad/s, f' =4,74 Hz, T'=0,211 s

Wariant 2. wyznaczenia m_{zast}

$$E_k = E_{k\rho} + E_{k\mu}$$

$$E_{k\rho} = \tfrac{1}{2}m_\rho \dot{u}_{Gx}^2 + \tfrac{1}{2}m_\rho \dot{u}_{Gy}^2 + \tfrac{1}{2}J_{tG}\,\dot{\varphi}_G^2$$

$$E_{k\mu} = \tfrac{1}{2}m_\mu \dot{u}_{Hx}^2 + \tfrac{1}{2}m_\mu \dot{u}_{Hy}^2 + \tfrac{1}{2}J_{pH}\,\dot{\varphi}_H^2$$

$$\varphi_G = \varphi_A = \tan\varphi_A = -q/a,\ \varphi_H = \varphi_F = \tan\varphi_F = q/a,\ \dot{\varphi}_G = -\dot{q}/a,\ \dot{\varphi}_H = \dot{q}/a,$$

$$u_{Gx} = -q/2,\ u_{Gy} = q/2,\ u_{Hx} = -q/2,\ u_{Hy} = -q,$$

$$\dot{u}_{Gx} = -\dot{q}/2,\ \dot{u}_{Gy} = \dot{q}/2,\ \dot{u}_{Hx} = -\dot{q}/2,\ \dot{u}_{Hy} = -\dot{q},$$

$$m_\rho = \rho\cdot a\cdot a,\quad m_\mu = \mu_1\cdot a$$

$$J_{tG} = \tfrac{1}{12}\rho a\, a^3 + \tfrac{1}{12}\rho a\, a^3 = \tfrac{1}{6}\rho a^4, \qquad J_{tH} = \tfrac{1}{12}\mu_1\, a^3,$$
$$E_{k\rho} = \tfrac{1}{2}\rho a^2\left(-\dot q/2\right)^2 + \tfrac{1}{2}\rho a^2\left(\dot q/2\right)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\rho a^4\left(-\dot q/a\right)^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\rho a^2\cdot\dot q^2$$
$$E_{k\mu} = \tfrac{1}{2}\mu_1 a\left(-\dot q/2\right)^2 + \tfrac{1}{2}\mu_1 a\left(-\dot q\right)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{12}\mu_1 a^2\left(\dot q/a\right)^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\mu_1 a\cdot\dot q^2$$
$$E_k = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\rho a^2 + \tfrac{4}{3}\mu_1\, a\right)\dot q^2 \;\rightarrow\; m_{zast} = \tfrac{2}{3}\rho a^2 + \tfrac{4}{3}\mu_1\, a$$

8.

m_e=8 μ = 1600 kg

c_e=¼ c = 2500 Ns/m

k_e= ½ k = $5\cdot10^5$ N/m

$P_e(t) = P_o \sin pt = 10000 \sin(20\,t)$ N

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{5\cdot10^5}{1600}} = 17{,}68\ \text{rad/s}$$

$f = \omega/2\pi$ = 17,68 / (2 · 3,14) = 2,81 Hz

$T = 1/f$ = 0,355 s

$$\alpha = \frac{c_e}{2\sqrt{k_e m_e}} = \frac{2500}{2\sqrt{5\cdot10^5\ 1600}} = 0{,}044 = 4{,}4\%$$

$$\text{am}\,q = \nu\,\frac{\text{am}\,P_e}{k_e}$$

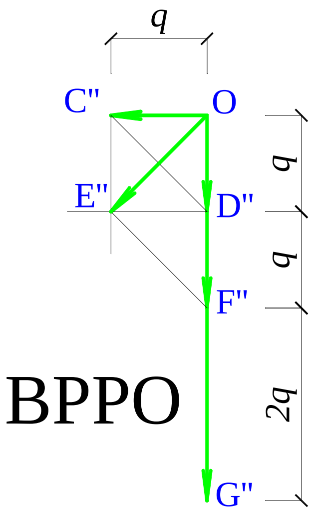
$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\alpha^2\eta^2}}$$

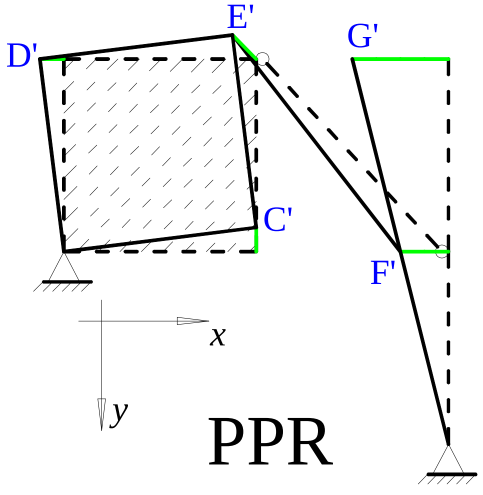
$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{20}{17{,}68} = 1{,}13$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-1{,}13^2\right)^2 + 4\cdot0{,}044^2\cdot1{,}13^2}} = 3{,}40$$

$$\text{am}\,q = 3{,}40\,\frac{10000}{5\cdot10^5} = 0{,}068\,\text{m} = 68\,\text{mm}$$

9.





$$E_k = \tfrac{1}{2} J_{tA}\, \dot{\varphi}_A^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{u}_G^2 = \tfrac{1}{2} m_{\ e} \dot{q}^2$$
$$\varphi_A = -q / a, \qquad u_G = 4q$$
$$J_{tA} = \tfrac{1}{3} \rho a a^3 + \tfrac{1}{3} \rho a a^3 = \tfrac{2}{3} \rho a^4$$
$$E_k = \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{2}{3} \rho a^2 + 16 m \right) \dot{q}^2$$

$$E_p = \tfrac{1}{2} k \left(u_{Ex} - u_{Gx} \right)^2 + \tfrac{1}{2}\ 2k \left(u_{Cx} - u_{Fx} \right)^2 = \tfrac{1}{2}\ 17 k\, q^2$$

m_e = 9200 kg, k_e = 17 10^6 N/m,
ω = 42,98 rad/s $\qquad$ f = 6,84 Hz $\qquad$ T=0,146 s
$c_e = 0 \rightarrow \alpha = 0 \ \rightarrow \omega = \omega'$

$$L = P_0 \sin pt \cdot u_{Cy} = P_e\, q$$
P_e = -P_0 sin pt, am P_e = P_0
$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{20}{42{,}98} = 0{,}465$$
$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4\alpha^2\eta^2}} = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|} = 1{,}276$$
$$\text{am}\, q = \nu \frac{\text{am}\, P_e}{k_e} = 1{,}276\ \frac{10 \cdot 10^3}{17 \cdot 10^6} = 0{,}75\ 10^{-3} \text{ m} = 0{,}75 \text{ mm}$$

10. *Rys 7a*
ω = 20 rad/s $\qquad$ ω' = 19,596 rad/s
Rys 7b
ω = 14,14 rad/s $\qquad$ ω' = 13,563 rad/s

11. *Rys 7a*
$c = \sqrt{3 k m}$ = 1224,7 Ns/m
Rys 7b
$c = \sqrt{3\ \tfrac{1}{2} k m}$ = 866,0 Ns/m

12. am F = 50 kN
ω = 50 rad/s $\qquad$ η = 0,8 $\qquad$ α = 0,125 $\qquad$ ν = 2,428
am q = 1,2141 m = 1214,1 mm

13. k_e= 400 π^2 m_e = 197392 N/m

14. Jako współrzędną dynamiczną przyjęto możliwe przemieszczenie punktu C (Rys8a – kierunek poziomy, Rys 8b – kierunek prostopadły do pręta A-C), w takim przypadku am q równa jest amplitudzie przemieszczenia p. C.
Rys 8a
m_e=2000 kg
k_e= 23437,5 N/m
am F = 10 kN
ω = 3,42 rad/s $\qquad$ η = 5,842 $\qquad$ α = 0,0 $\qquad$ ν = 0,03
am q = 0,01288 m = 12,88 mm

Rys 8b

m_e=1500 kg k_e= 214285,7 N/m

am F = 10 kN

ω = 11,95 rad/s η = 1,673 α = 0,0 ν = 0,556

am q = 0,0259 m = 25,9 mm

15. $\vartheta = 0{,}0866$

α=0,0138 = 1,38%

$A_{10}/A_{20}=\mathbf{e}^{10\vartheta} = 2^{\frac{5}{4}} = 2{,}378$

16. m_e=50 kg

k_e= 2 k= 20 000 N/m

c_e= c= 500 Ns/m

am F = 10 kN

ω = 20 rad/s η = 0,5 α = 0,25

ν = 1,2649

am q = 0,632 m = 632 mm

17. *cdn...*

Jacek Grosel