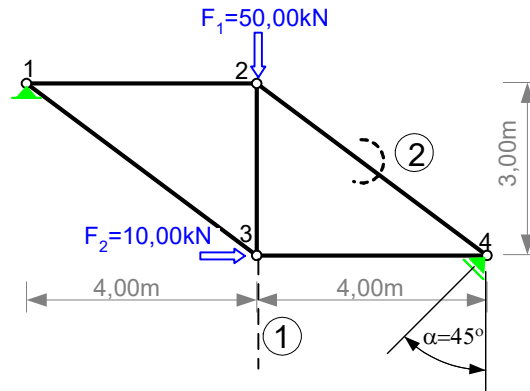


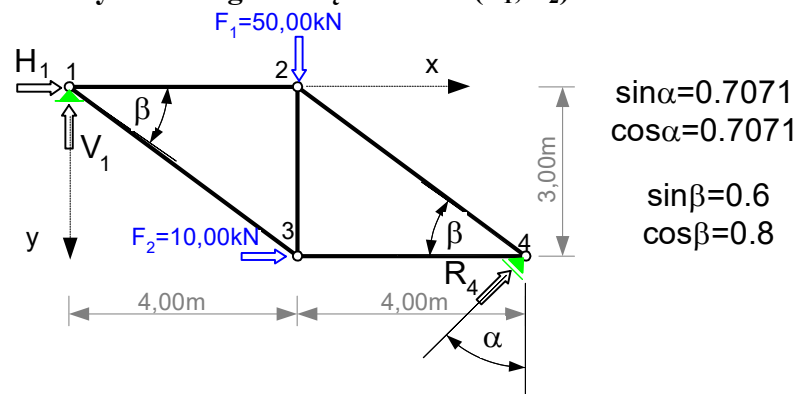
WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ - przykład 1 – kratownica bez więzi sprężystych OBLICZENIE PRZEMIESZCZEŃ W KRATOWNICY PŁASKIEJ

Dana jest kratownica jak na rysunku.



Wyznaczyć siły osiowe w prętach od obciążenia danego oraz od obciążeń jednostkowych przyłożonych w miejscach szukanych przemieszczeń. Zaprojektować wstępnie przekroje prętów. Obliczyć zaznaczone przemieszczenia. W obliczeniach potraktować dane wartości obciążenia jako charakterystyczne, przyjmując średni współczynnik obciążenia $\gamma_f = 1.2$ i wytrzymałość obliczeniową stali $f_d = 215MPa$ i współczynnik sprężystości podłużnej $E = 205GPa$.

1. Rozwiązanie kratownicy od danego obciążenia $F = (F_1, F_2)$.



Wyznaczenie reakcji podpór.

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= -R_4 \cdot \cos \alpha \cdot 8m - R_4 \cdot \sin \alpha \cdot 3m + F_1 \cdot 4m - F_2 \cdot 3m = 0 \Rightarrow \\ &-R_4 \cdot 0.7071 \cdot 8m - R_4 \cdot 0.7071 \cdot 3m + 50kN \cdot 4m - 10kN \cdot 3m = 0 \Rightarrow R_4 = 21.856kN, \\ &R_4 \cdot \sin \alpha = 15.455kN, \quad R_4 \cdot \cos \alpha = 15.455kN \\ \sum X &= H_1 + F_2 + R_4 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_1 + 10kN + 15.455kN = 0 \Rightarrow H_1 = -25.455kN. \\ \sum Y &= -V_1 + F_1 - R_4 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow -V_1 + 50kN - 15.455kN = 0 \Rightarrow V_1 = 34.545kN. \end{aligned}$$

Obliczenie wartości sił osiowych sposobem równoważenia węzłów i kontrola równań równowagi

Węzeł 1

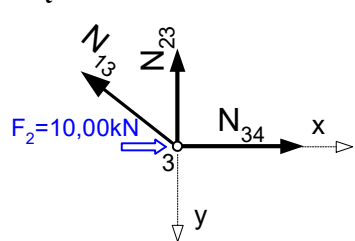
$$\begin{aligned} \sum Y &= -V_1 + N_{13} \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow \\ -34.545kN + N_{13} \cdot 0.6 &= 0 \Rightarrow N_{13} = 57.576kN, \\ \sum X &= H_1 + N_{12} + N_{13} \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow \\ -25.455kN + N_{12} + 57.576kN \cdot 0.8 &= 0 \Rightarrow N_{12} = -20.606kN. \end{aligned}$$

Węzeł 2

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{12} + N_{24} \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow \\ 20.606kN + N_{24} \cdot 0.8 &= 0 \Rightarrow N_{24} = -25.758kN, \\ \sum Y &= N_{23} + N_{24} \cdot \sin \beta + F_1 = 0 \Rightarrow \\ N_{23} - 25.758kN \cdot 0.6 + 50kN &= 0 \Rightarrow N_{23} = -34.545kN. \end{aligned}$$

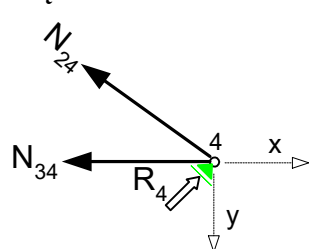
WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ - przykład 1 – kratownica bez więzi sprężystych

Węzeł 3



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{13} \cdot \cos \beta + N_{34} + F_2 = 0 \Rightarrow \\ & -57.576 \text{ kN} \cdot 0.8 + N_{34} + 10 \text{ kN} = 0 \Rightarrow N_{34} = 36.061 \text{ kN}, \\ \sum Y &= -N_{13} \cdot \sin \beta - N_{23} = (-57.576 \cdot 0.6 + 34.545) \text{ kN} = 0 \quad (\text{kontrola}) \end{aligned}$$

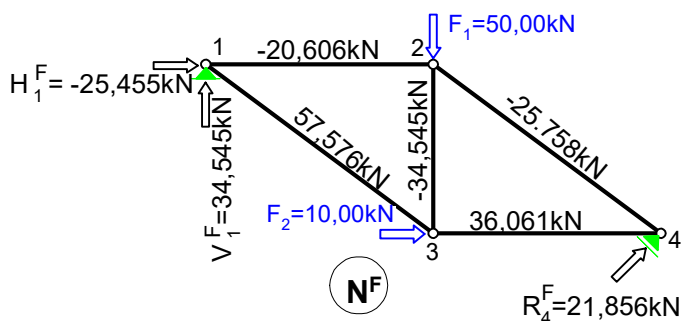
Węzeł 4



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{34} - N_{24} \cdot \cos \beta + R_4 \cdot \sin \alpha = && (\text{kontrola}), \\ & = (-36.061 + 25.758 \cdot 0.8 + 15.455) \text{ kN} = 0 \\ \sum Y &= -N_{24} \cdot \sin \beta - R_4 \cdot \cos \alpha = && (\text{kontrola}). \\ & = (+25.758 \cdot 0.6 - 15.455) \text{ kN} = 0 \end{aligned}$$

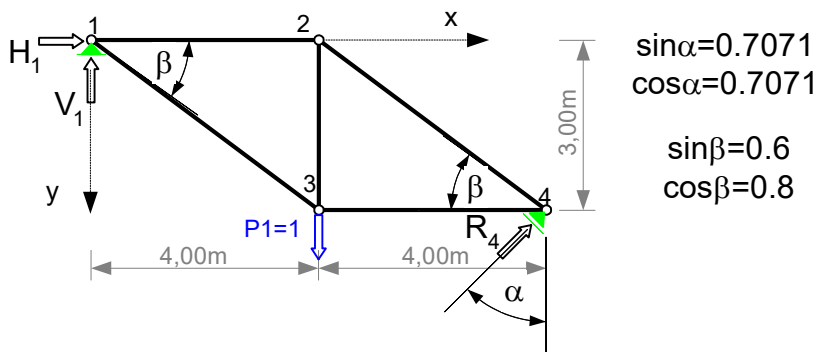
Zestawienie wyników rozwiązania

(wszystkim wielkościom z tego rozwiązania przypisujemy indeks górny F, gdyż zostały wywołane obciążeniem oznaczonym symbolem F)



2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia P1 = 1.

W celu wyznaczenia przesunięcia węzła 3 (w temacie kierunek nr 1 zaznaczony linią przerywaną) niezbędne jest rozwiązanie kratownicy od obciążenia siłą jednostkową przyłożoną w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia.

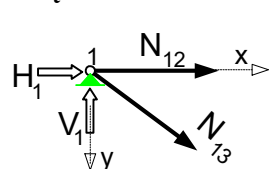


Wyznaczenie reakcji podpór.

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= -R_4 \cdot \cos \alpha \cdot 8m - R_4 \cdot \sin \alpha \cdot 3m + P_1 \cdot 4m = 0 \Rightarrow \\ & -R_4 \cdot 0.7071 \cdot 8m - R_4 \cdot 0.7071 \cdot 3m + 1 \cdot 4m = 0 \Rightarrow R_4 = 0.514, \\ & R_4 \cdot \sin \alpha = 0.3635, \quad R_4 \cdot \cos \alpha = 0.3635 \\ \sum X &= H_1 + R_4 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_1 + 0.3635 = 0 \Rightarrow H_1 = -0.364. \\ \sum Y &= -V_1 + F_1 - R_4 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow -V_1 + 1 - 0.3635 = 0 \Rightarrow V_1 = 0.636. \end{aligned}$$

Obliczenie wartości sił osiowych sposobem równowagi węzłów i kontrola równań równowagi

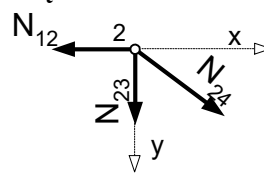
Węzeł 1



$$\begin{aligned} \sum Y &= -V_1 + N_{13} \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow \\ & -0.636 + N_{13} \cdot 0.6 = 0 \Rightarrow N_{13} = 1.061, \\ \sum X &= H_1 + N_{12} + N_{13} \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow \\ & -0.364 + N_{12} + 1.061 \cdot 0.8 = 0 \Rightarrow N_{12} = -0.485. \end{aligned}$$

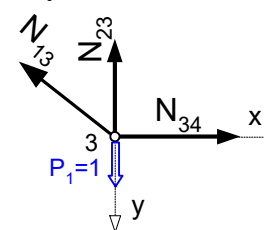
WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ - przykład 1 – kratownica bez więzi sprężystych

Węzeł 2



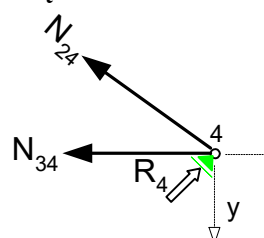
$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{12} + N_{24} \cdot \cos \beta = 0 & \Rightarrow \\ 0.485 + N_{24} \cdot 0.8 &= 0 & \Rightarrow N_{24} = -0.606, \\ \sum Y &= N_{23} + N_{24} \cdot \sin \beta = 0 & \Rightarrow \\ N_{23} - 0.606 \cdot 0.6 &= 0 & \Rightarrow N_{23} = 0.364. \end{aligned}$$

Węzeł 3



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{13} \cdot \cos \beta + N_{34} = 0 & \Rightarrow \\ -1.061 \cdot 0.8 + N_{34} &= 0 & \Rightarrow N_{34} = 0.848, \\ \sum Y &= -N_{13} \cdot \sin \beta - N_{23} + P_1 = -1.061 \cdot 0.6 - 0.364 + 1 = 0 & \text{(kontrola)} \end{aligned}$$

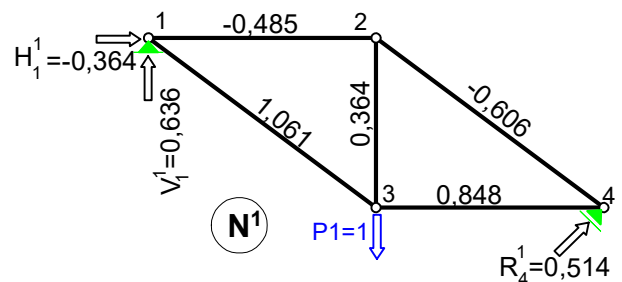
Węzeł 4



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{34} - N_{24} \cdot \cos \beta + R_4 \cdot \sin \alpha = -0.848 + 0.606 \cdot 0.8 + 0.3635 = 0 & \text{(kontrola),} \\ \sum Y &= -N_{24} \cdot \sin \beta - R_4 \cdot \cos \alpha = -0.606 \cdot 0.6 - 0.3635 = 0 & \text{(kontrola).} \end{aligned}$$

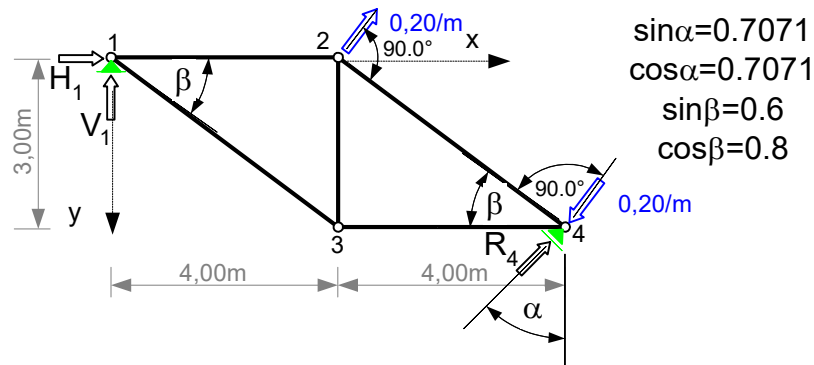
Zestawienie wyników rozwiązania

(wszystkim wielkościom z tego rozwiązania przypisujemy indeks górny 1, gdyż zostały wywołane obciążeniem oznaczonym numerem 1)



3. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_2 = 1$.

W celu wyznaczenia kąta obrotu pręta 2-4 (w temacie kierunek nr 2 zaznaczony łukiem z linii przerywanej) niezbędne jest rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowym momentem reprezentowanym tu przez parę sił prostopadłych do tego pręta i przyłożonych do węzłów stanowiących końce tego pręta. Wartość każdej z sił jest równa momentowi jednostkowemu podzielonemu przez długość tego pręta $1/(5m) = 0.2/m$.



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0.7071 \\ \cos \alpha &= 0.7071 \\ \sin \beta &= 0.6 \\ \cos \beta &= 0.8 \end{aligned}$$

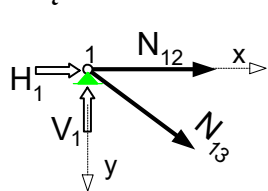
Wyznaczenie reakcji podpór

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= -R_4 \cdot \cos \alpha \cdot 8m - R_4 \cdot \sin \alpha \cdot 3m + P_2 = 0 & \Rightarrow \\ -R_4 \cdot 0.7071 \cdot 8m - R_4 \cdot 0.7071 \cdot 3m + 1 &= 0 & \Rightarrow R_4 = 0.129/m, \\ & & R_4 \cdot \sin \alpha = 0.0912/m, & R_4 \cdot \cos \alpha = 0.0912/m \\ \sum X &= H_1 + R_4 \cdot \sin \alpha = 0 & \Rightarrow H_1 + 0.0912/m = 0 & \Rightarrow H_1 = -0.0912/m. \\ \sum Y &= -V_1 - R_4 \cdot \cos \alpha = 0 & \Rightarrow -V_1 - 0.0912/m = 0 & \Rightarrow V_1 = -0.0912/m. \end{aligned}$$

WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ - przykład 1 – kratownica bez więzi sprężystych

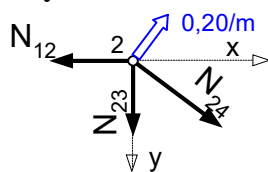
Obliczenie wartości sił osiowych sposobem równoważenia węzłów i kontrola równań równowagi

Węzeł 1



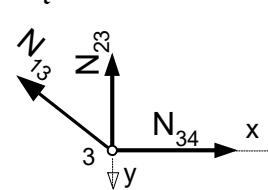
$$\begin{aligned} \sum Y &= -V_1 + N_{13} \cdot \sin \beta = 0 & \Rightarrow \\ &+ 0.0912/m + N_{13} \cdot 0.6 = 0 & \Rightarrow N_{13} = -0.152/m, \\ \sum X &= H_1 + N_{12} + N_{13} \cdot \cos \beta = 0 & \Rightarrow \\ &-0.0912 + N_{12} - 0.152/m \cdot 0.8 = 0 & \Rightarrow N_{12} = 0.212/m. \end{aligned}$$

Węzeł 2



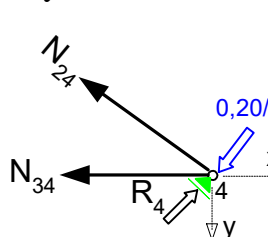
$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{12} + N_{24} \cdot \cos \beta + P_2 / 5m \cdot \sin \beta = 0 & \Rightarrow \\ &-0.212/m + N_{24} \cdot 0.8 + 0.2/m \cdot 0.6 = 0 & \Rightarrow N_{24} = 0.115/m, \\ \sum Y &= N_{23} + N_{24} \cdot \sin \beta - P_2 / 5m \cdot \cos \beta = 0 & \Rightarrow \\ &N_{23} + 0.115 \cdot 0.6 - 0.2/m \cdot 0.8 = 0 & \Rightarrow N_{23} = 0.091/m. \end{aligned}$$

Węzeł 3



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{13} \cdot \cos \beta + N_{34} = 0 & \Rightarrow \\ &+ 0.152 \cdot 0.8 + N_{34} = 0 & \Rightarrow N_{34} = -0.121, \\ \sum Y &= -N_{13} \cdot \sin \beta - N_{23} = +0.152 \cdot 0.6 - 0.091 = 0 & \text{(kontrola)} \end{aligned}$$

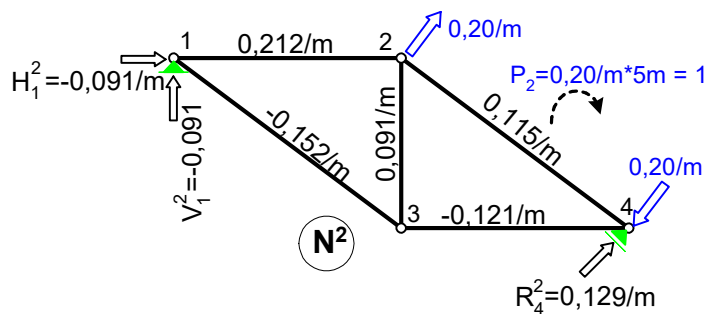
Węzeł 4



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{34} - N_{24} \cdot \cos \beta + R_4 \cdot \sin \alpha - P_2 / 5m \cdot \sin \beta = & \text{(kontrola),} \\ &= +0.121/m - 0.115 \cdot 0.8 + 0.0912/m - 0.2/m \cdot 0.6 = 0 \\ \sum Y &= -N_{24} \cdot \sin \beta - R_4 \cdot \cos \alpha + P_2 / 5m \cdot \cos \beta = & \text{(kontrola).} \\ &= -0.115/m \cdot 0.6 - 0.0912/m + 0.2/m \cdot 0.8 = 0 \end{aligned}$$

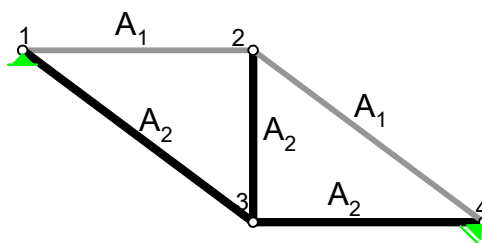
Zestawienie wyników rozwiązania

(wszystkim wielkościom z tego rozwiązania przypisujemy indeks górny 2, gdyż zostały wywołane obciążeniem oznaczonym numerem 2)



4. Projektowanie wstępne przekrojów prętów

Przyjęto 2 grupy prętów jak na szkicu



Pręty 1-2 i 2-4

Obydwa pręty są ściskane. Wartość największej siły ściskającej wynosi 25.758 kN.

Przyjęto wstępnie współczynnik wybocheniowy

$$\varphi = 0.65.$$

Potrzebne pole przekroju

$$A \geq \frac{\max |N| \cdot \gamma_f}{f_d \cdot \varphi} = \frac{25.758 \text{ kN} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.65} = 0.000221 \text{ m}^2 = 2.211 \text{ cm}^2$$

$$\text{Przyjęto rurę } \Phi 26.9 \times 3.2 \Rightarrow A_1 = 2.38 \text{ cm}^2 > 2.211 \text{ cm}^2$$

WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ - przykład 1 – kratownica bez więzi sprężystych

$$EA_1 = 205000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.000238 \text{ m}^2 = 48790 \text{ kN}$$

Pręty 1-3, 2-3 i 3-4

Pręty 1-3 i 3-4 są rozciągane. Maksymalna wartość siły rozciągającej wynosi 57.576 kN.

Potrzebne pole przekroju

$$A \geq \frac{\max N \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{57.576 \text{ kN} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2} = 0.0003214 \text{ m}^2 = 3.214 \text{ cm}^2$$

Pręt 2-3 jest ściskany. Wartość siły ściskającej wynosi

34.545 kN.

Przyjęto wstępnie współczynnik wybooczeniowy

$\varphi = 0.65$.

Potrzebne pole przekroju

$$A \geq \frac{\max |N| \cdot \gamma_f}{f_d \cdot \varphi} = \frac{34.545 \text{ kN} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.65} = 0.0002966 \text{ m}^2 = 2.966 \text{ cm}^2$$

Przyjęto rurę $\Phi 31.8 \times 4 \Rightarrow A_2 = 3.49 \text{ cm}^2 > 3.214 \text{ cm}^2 > 2.966 \text{ cm}^2$

$$EA_2 = 205000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.000349 \text{ m}^2 = 71545 \text{ kN}$$

5. Obliczenie szukanych przemieszczeń.

Przemieszczenia obliczono w poniższej tabeli na podstawie wzorów:

$$\Delta_{1F} = \sum_p \left(\frac{N^1 \cdot N^F}{EA} \cdot L \right), \quad \Delta_{2F} = \sum_p \left(\frac{N^2 \cdot N^F}{EA} \cdot L \right)$$

Oznac.	EA	L	N ^F	N ¹	N ²	$\left(\frac{N^1 \cdot N^F}{EA} \cdot L \right)_p$	$\left(\frac{N^2 \cdot N^F}{EA} \cdot L \right)_p$
pręta	kN	m	kN	-	1/m	m	-
1-2	48 790	4.00	-20.606	-0.485	0.212	0.00082	-0.00036
2-4	48 790	5.00	-25.758	-0.606	0.115	0.00160	-0.00030
1-3	71 545	5.00	57.576	1.061	-0.152	0.00427	-0.00061
2-3	71 545	3.00	-34.545	0.364	0.091	-0.00053	-0.00013
3-4	71 545	4.00	36.061	0.848	-0.121	0.00171	-0.00024
						0.00787	-0.00165
						Δ_{1F}	Δ_{2F}
							-0.09449

Wymiary szukanych przemieszczeń

$$[\Delta_{1F}] = \frac{[N^1] \cdot [N^F]}{[EA]} \cdot [L] = \frac{1 \cdot \text{kN}}{\text{kN}} \cdot \text{m} = \text{m},$$

$$[\Delta_{2F}] = \frac{[N^2] \cdot [N^F]}{[EA]} \cdot [L] = \frac{1/\text{m} \cdot \text{kN}}{\text{kN}} \cdot \text{m} = 1$$

Wartości przemieszczeń wynoszą:

Składowa pionowa przesunięcia węzła nr 3

$$\Delta_{1F} = 0.00787 \text{ m} = 0.787 \text{ cm},$$

Kąt obrotu pręta 2-4

$$\Delta_{2F} = -\frac{0.00165 \cdot 180^\circ}{\pi} = -0.0945^\circ$$

Minus oznacza, że zwrot szukanego przemieszczenia jest przeciwny niż zwrot założonego obciążenia jednostkowego.