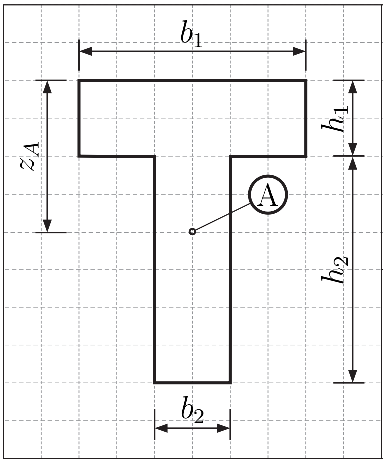
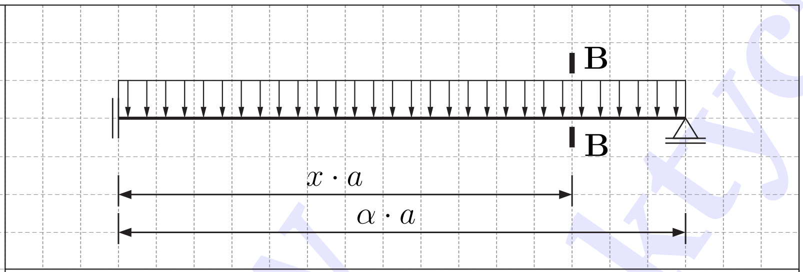
Zadanie 3. – rozwiązanie przykładowe

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju **B–B**. W punkcie **A** tego przekroju obliczyć wartość naprężeń zredukowanych wykorzystując hipotezę **Hubera–Misesa**.

przekrój



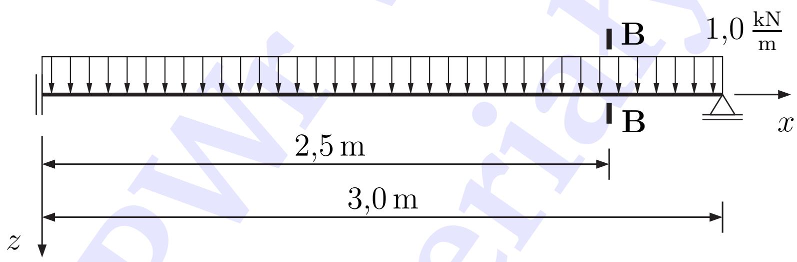
belka



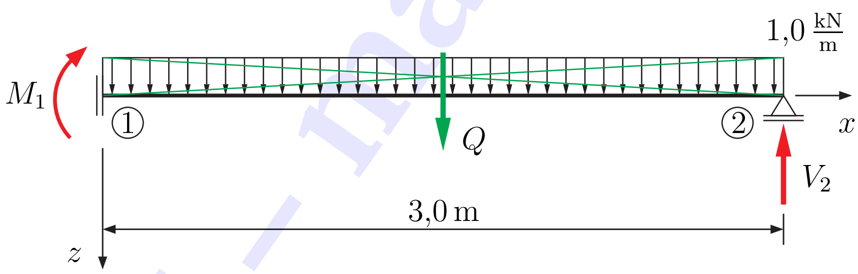
$\alpha = 3{,}0$; $\beta = 0{,}0$; $\gamma = 0{,}0$; $\lambda = 0{,}0$; $\mu = 0{,}0$;
$b_1 = 6{,}0\,\mathrm{cm}$; $b_2 = 2{,}0\,\mathrm{cm}$; $b_3 = 0{,}0\,\mathrm{cm}$;
$h_1 = 2{,}0\,\mathrm{cm}$; $h_2 = 6{,}0\,\mathrm{cm}$; $h_3 = 0{,}0\,\mathrm{cm}$;
$a = 1{,}0\,\mathrm{m}$; $z_A = 4{,}0\,\mathrm{cm}$; $x = 2{,}5$; $q = 1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$;

1. Siły wewnętrzne

1.1. Schemat statyczny i obciążenie belki



1.2. Wyznaczenie reakcji



$$Q = 3\,\mathrm{m} \cdot 1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} = 3\,\mathrm{kN}$$

$\Sigma z = 0$

$$V_2 - Q = 0$$

$$V_2 = Q = 3\,\mathrm{kN}$$

$\Sigma M_2 = 0$

$$M_1 - Q \cdot \frac{3{,}0\mathrm{m}}{2} = 0$$

$$M_1 = Q \cdot \frac{3{,}0\mathrm{m}}{2} = 4{,}5\,\mathrm{kNm}$$

1.3. Siły tnące i momenty zginające

Siły tnące

$$T_z(x) = -1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot x$$

$$T_z(x=0) = 0$$

$$T_z(x = 3\,\mathrm{m}) = -1\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 3\,\mathrm{m} = -3\,\mathrm{kN}$$

$$T_z(x = 2{,}5\,\mathrm{m}) = -1\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = -2{,}5\,\mathrm{kN} = T_z^{\mathbf{B-B}}$$

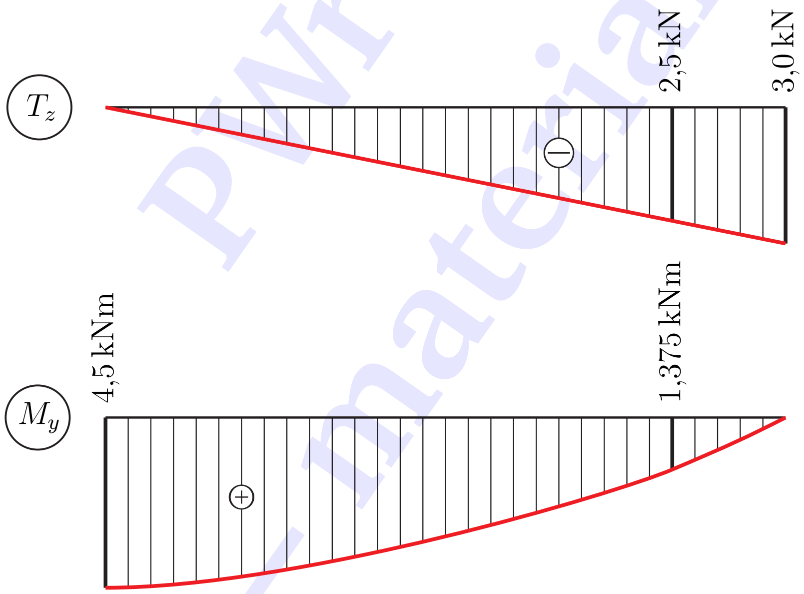
Momenty zginające

$$M_y(x) = M_1 - 1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{x^2}{2} = 4{,}5\,\mathrm{kNm} - 1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_y(x=0) = 4{,}5\,\mathrm{kNm}$$

$$M_y(x = 3{,}0\,\mathrm{m}) = 4{,}5\,\mathrm{kNm} - 1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{(3{,}0\,\mathrm{m})^2}{2} = 0$$

$$M_y(x = 2{,}5\,\mathrm{m}) = 4{,}5\,\mathrm{kNm} - 1{,}0\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{(2{,}5\,\mathrm{m})^2}{2} = 1{,}375\,\mathrm{kNm} = M_y^{\mathbf{B-B}}$$



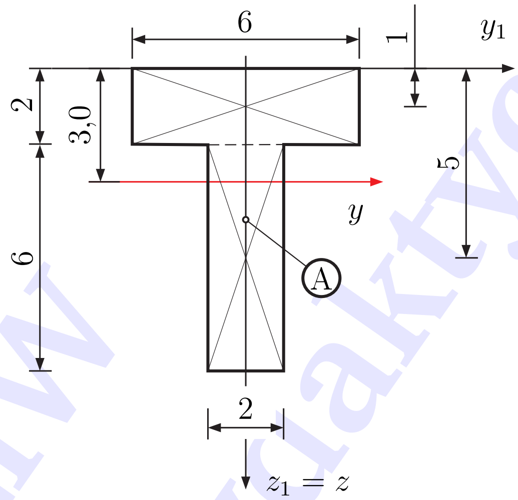
2. Charakterystyki geometryczne

2.1. Środek ciężkości

$$A = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24{,}0\,\mathrm{cm}^2$$

$$S_{y_1} = 2 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 72{,}0\,\mathrm{cm}^3$$

$$z_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{72{,}0}{24{,}0} = 3{,}00\,\mathrm{cm}$$

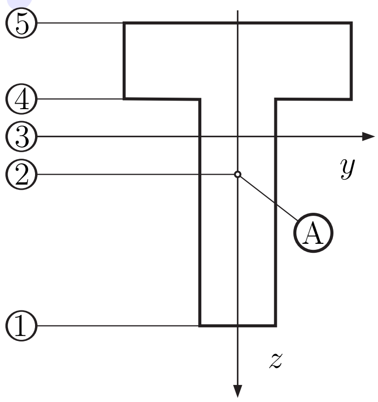


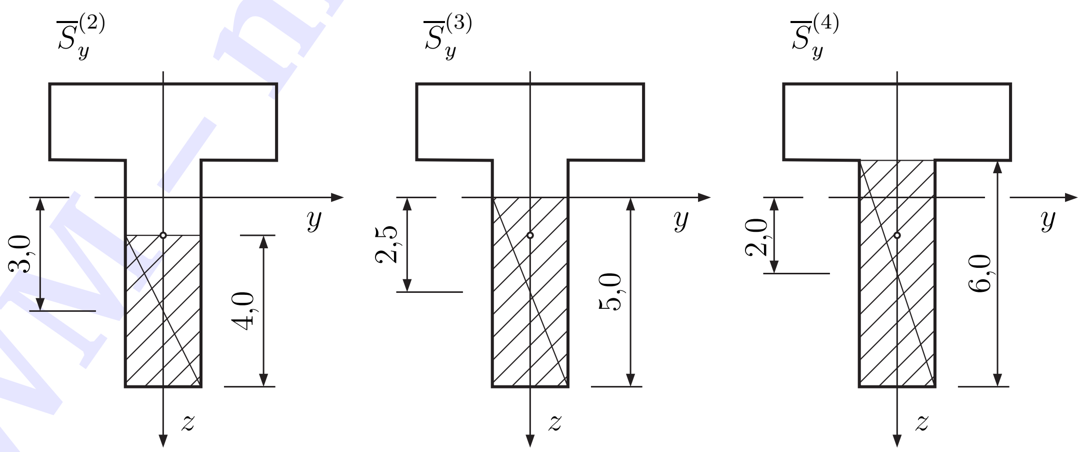
2.2. Moment bezwładności I_y

$$I_y = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 2^2 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 2 \cdot 2^2 = 136{,}0\,\mathrm{cm}^4$$

2.3. Momenty statyczne odciętej części przekroju i szerokości przekroju

Naprężenia normalne będziemy wyznaczać w punktach (1), (5) oraz (2) – aby wyznaczyć σ_{zred}. Naprężenia styczne będziemy wyznaczać w punktach (3), (4) – ze względu na zmieniającą się szerokość przekroju we włóknach dolnych i górnych; oraz (2) – aby wyznaczyć σ_{zred}.





$$\overline{S}_y^{(2)} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24\,\text{cm}^3$$

$$\overline{S}_y^{(3)} = \overline{S}_y^{(2)} + 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 24 + 1 = 25\,\text{cm}^3$$

$$\overline{S}_y^{(4)} = \overline{S}_y^{(3)} + 1 \cdot 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 25 - 1 = 24\,\text{cm}^3$$

$$z^{(1)} = 5\,\text{cm}$$

$$z^{(2)} = 1\,\text{cm}$$

$$z^{(5)} = -3\,\text{cm}$$

$$b^{(2)} = b^{(3)} = b^{(4_d)} = 2\,\text{cm}$$

$$b^{(4_g)} = 6\,\text{cm}$$

3. Naprężenia

3.1. Naprężenia normalne σ_x

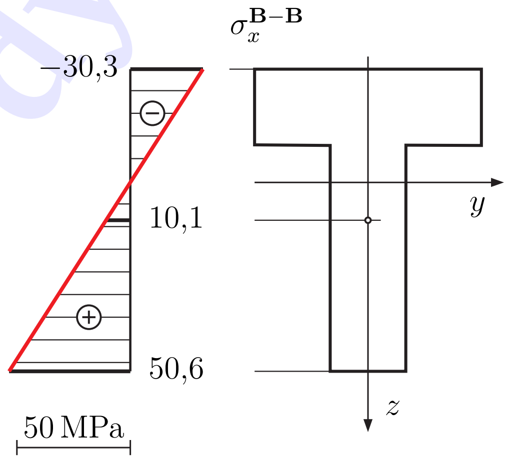
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{M_y^{\mathbf{B-B}}}{I_y} \cdot z^{(1)} = \frac{1{,}375 \cdot 10^3\,\text{Nm}}{136 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^4} \cdot 0{,}05\,\text{m}$$

$$= 50{,}6 \cdot 10^6\,\text{Pa} = 50{,}6\,\text{MPa}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{1{,}375 \cdot 10^3}{136 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}01 = 10{,}1\,\text{MPa}$$

$$\sigma_x^{(3)} = 0$$

$$\sigma_x^{(5)} = \frac{1{,}375 \cdot 10^3}{136 \cdot 10^{-8}} \cdot (-0{,}03) = -30{,}3\,\text{MPa}$$



3.2. Naprężenia styczne τ_{xz}

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{T_z^{\mathbf{B-B}} \cdot \overline{S}_y^{(1)}}{I_y \cdot b_0^{(1)}} = \frac{-2{,}5 \cdot 10^3\,\text{N} \cdot 0\,\text{m}^3}{136 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^4 \cdot 0{,}02\,\text{m}} = 0$$

$$\tau_{xz}^{(2)} = \frac{-2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}02}$$

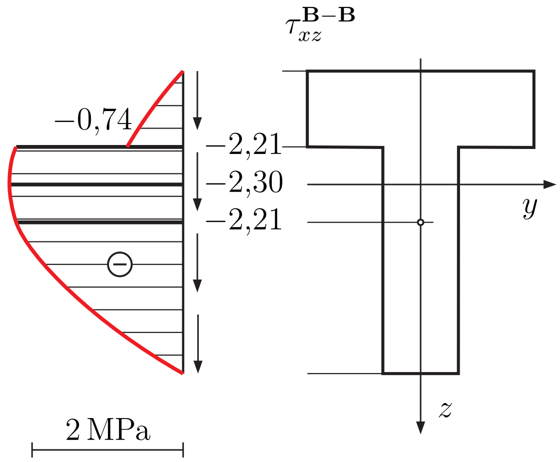
$$= -2{,}21 \cdot 10^6\,\text{Pa} = -2{,}21\,\text{MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(3)} = \frac{-2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}02} = -2{,}30\,\text{MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(4_d)} = \frac{-2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}02} = -2{,}21\,\text{MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(4_g)} = \frac{-2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}06} = -0{,}74\,\text{MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(5)} = 0$$



3.3. Naprężenia zredukowane σ_{zred}

Naprężenia zredukowane dla stanu naprężenia belkowego:

$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xz}^2}$ — hipoteza Hubera–Misesa

$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xz}^2}$ — hipoteza Tresci–Guesta

Naprężenia zredukowane wyznaczone zgodnie z hipotezą **Hubera–Misesa** w punkcie **A** przekroju **B–B**.

$$\sigma_{zred}^{(2)} = \sqrt{10{,}1^2 + 3 \cdot (-2{,}21)^2} = 10{,}8\,\mathrm{MPa}$$