Politechnika Wrocławska

Wydział Budownictwa lądowego i Wodnego

Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej

REDUKCJA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE I GRAFICZNE

<u>Zadanie nr 1.</u>

Dokonać redukcji układu sił do początku bazy współrzędnych. Znaleźć położenie wypadkowej.

<u>Zadanie nr 2.</u>

Znaleźć układ równoważący składający się z dwóch sił, z których jedna przechodzi przez punkt E, druga leży na prostej c przechodzącej przez punkty C_1 i C_2

<u>Zadanie nr 3.</u>

Wyznaczyć układ równoważący składający się z trzech sił leżących na prostych k, l , n przechodzących przez punkty odpowiednio K_1 i K_2, L_1i L_2, N_1 i N_2 .

Opracowała dr inż. Monika Podwórna

Wrocław, marzec 2018 r

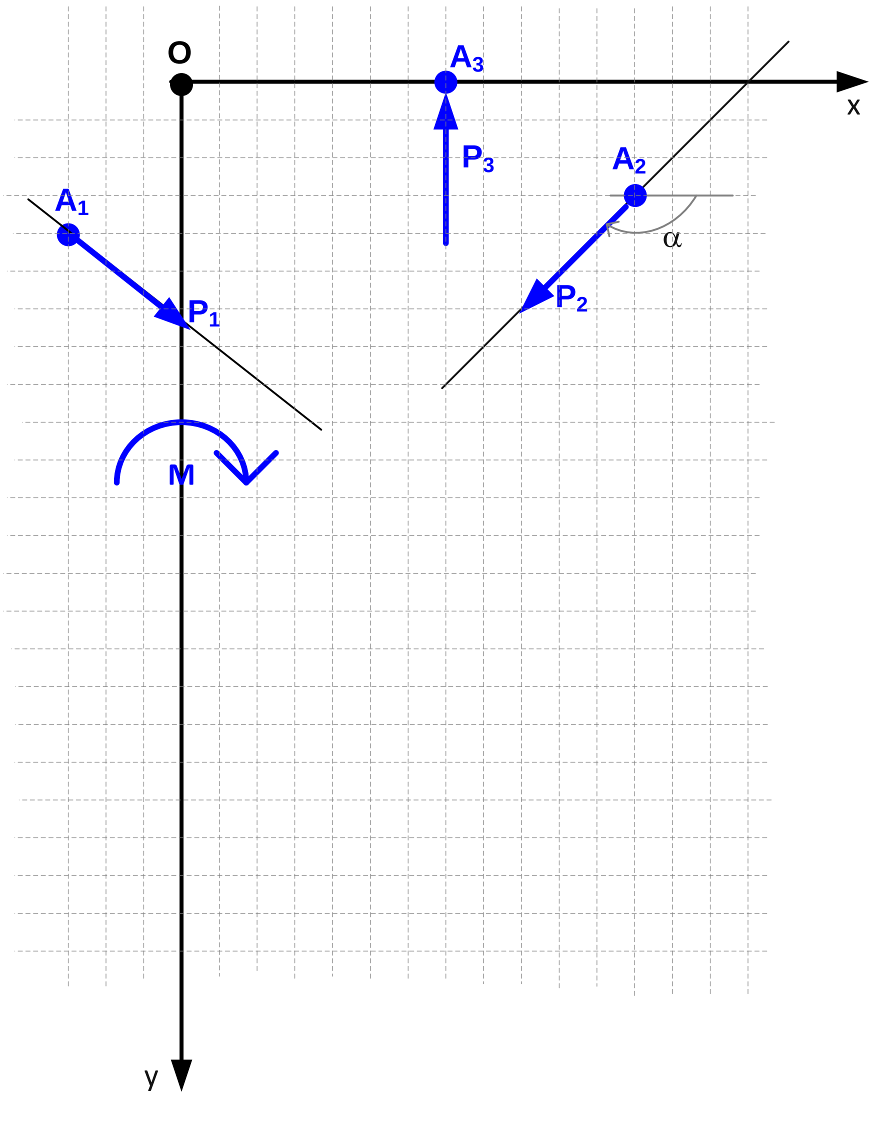
ROZWIĄZANIA ANALITYCZNE

Zadanie nr 1.

Dokonać redukcji układu sił P_1 (8,6) [kN], $P_2=10\sqrt{2}$ kN, P_3 (0,-12) [kN] oraz M = 30 kNm do początku bazy współrzędnych (Punkt O)

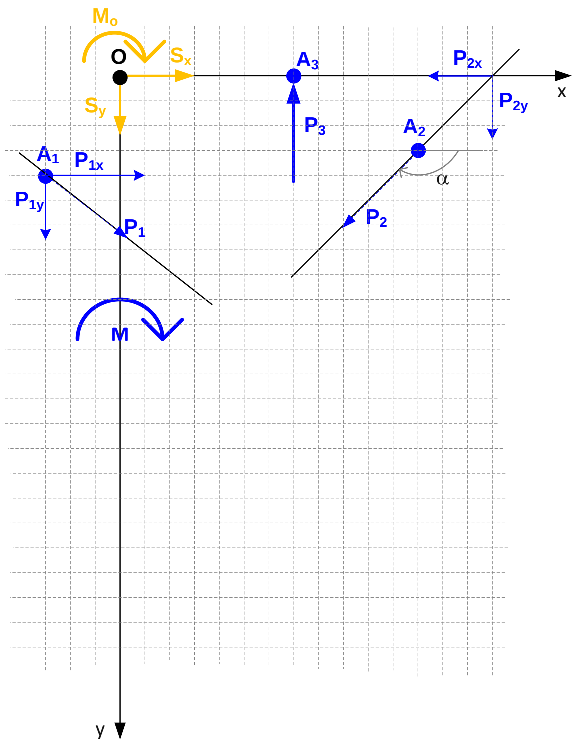
Punkty lokacyjne prostych działania sił: P1 - A_1 (-3,4) [m], P_2 - A_2 (12,3) [m] oraz kąt nachylenia prostej wynosi α=135, P_3 - A_3 (7,0) [m].

Znaleźć położenie wypadkowej układu.



Rozłożenie siły P_2 na składowe:

$$P_{2x} = P_2 \cos\alpha = 10\sqrt{2}\cos 135^0 = -10kN$$
$$P_{2y} = P_2 \sin\alpha = 10\sqrt{2}\sin 135^0 = 10kN$$



Składowe sił „niebieskich”:

$$P_{1x} = 8kN \qquad P_{2x} = -10kN \qquad P_{3x} = 0$$
$$P_{1y} = 6kN \qquad P_{2y} = 10kN \qquad P_{3y} = -12kN$$

Składowe siły ogólnej:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 8 - 10 + 0 = -2kN$$
$$S_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 6 + 10 - 12 = 4kN$$

Moment ogólny:

z definicji momentu

$$M_o = \sum_{i=1}^{n}\left(P_{iy}\, x_{\mathrm{A}i} - P_{ix}\, y_{\mathrm{A}i}\right) + \sum_{j=1}^{m} M_j = [6\cdot(-3) - 8\cdot 4] + [10\cdot 12 - (-10)\cdot 3] + [-12\cdot 7] + 30 = 46kNm$$

LUB

z rysunku

$$M_o = -P_{1x}\cdot 4 - P_{1y}\cdot 3 + P_{2x}\cdot 3 + P_{2y}\cdot 12 - P_3\cdot 7 + 30 = 46kNm$$

LUB

z rysunku (po „przesunięciu” siły P_2 do przecięcia z osią x)

$$M_o = -P_{1x}\cdot 4 - P_{1y}\cdot 3 + P_{2y}\cdot 15 - P_3\cdot 7 + 30 = 46kNm$$

Wypadkowa układu sił

$$W_x = -2kN$$
$$W_y = 4kN$$
$$W = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}kN$$

Równanie prostej działania wypadkowej

$$M_o = W_y \cdot x - W_x \cdot y$$

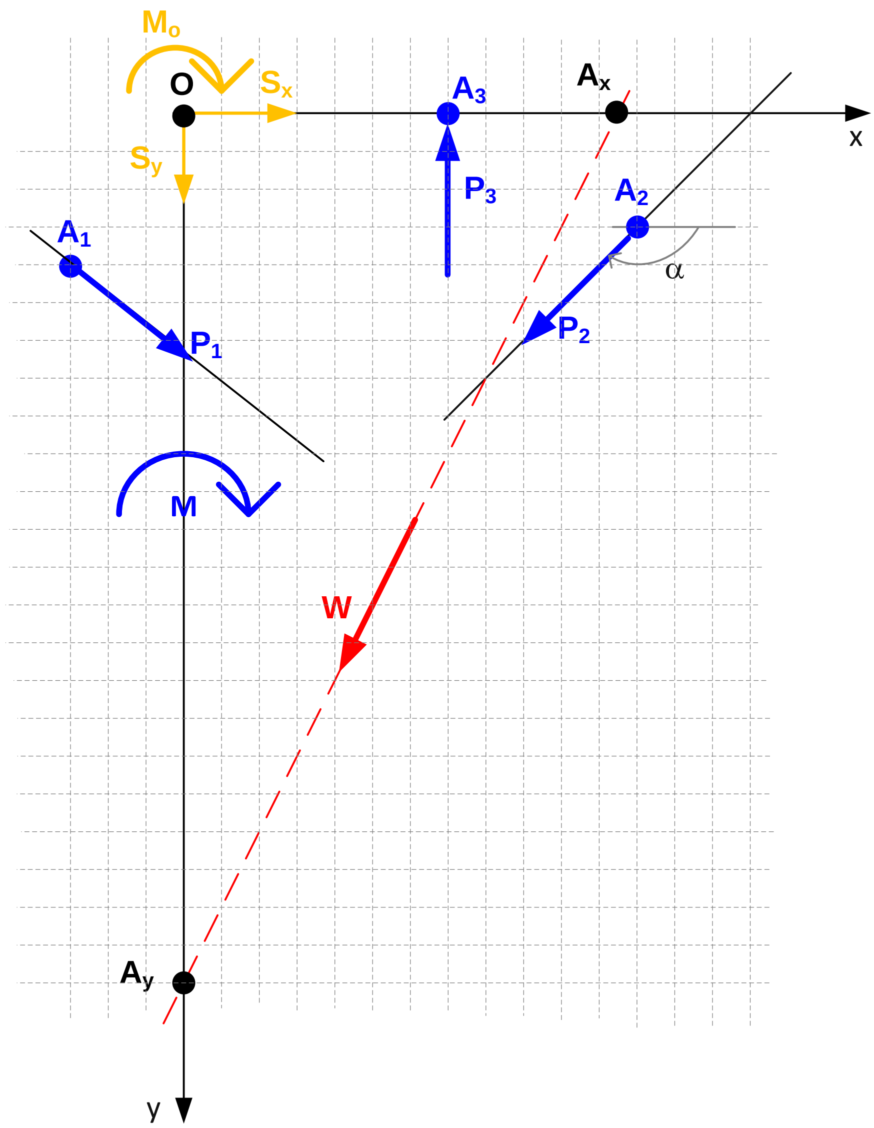
$$46 = 4 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$y = -x/2 + 23$$

$$A_x\ (11{,}5\,;\,0)$$

$$A_y\ (0\,;\,23)$$

Wynik – położenie wypadkowej:

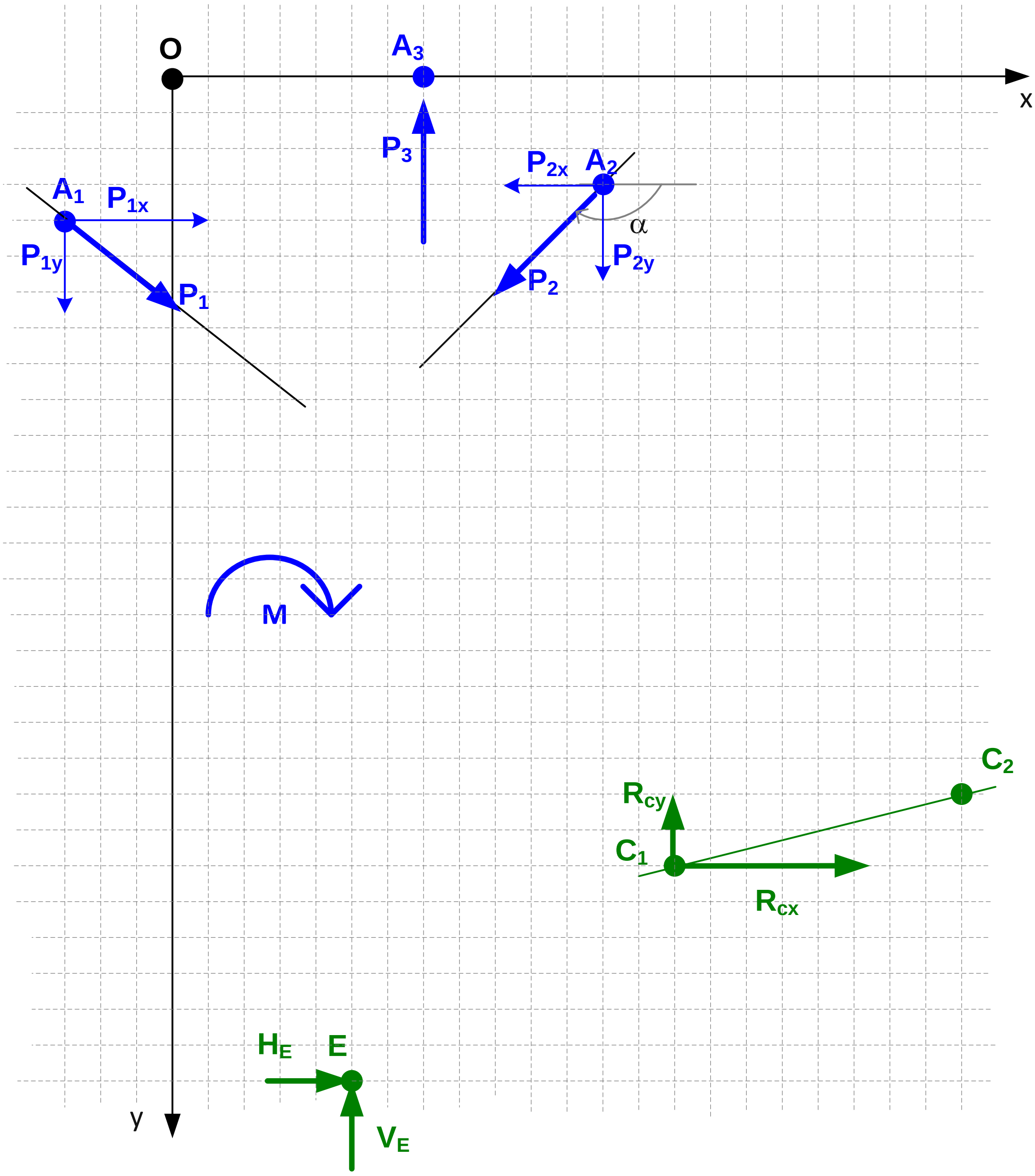


oraz wartość wypadkowej:

$$\vec{W} = (-2\,,4)[kN]$$
$$W = 2\sqrt{5}kN$$

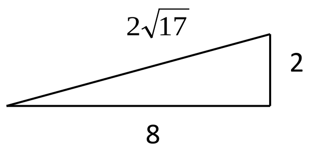
Zadanie nr 2.

Znaleźć układ równoważący składający się z dwóch sił, z których jedna przechodzi przez punkt E (5,28) [m], druga leży na prostej c przechodzącej przez punkty C_1(14,22) [m] i C_2(22,20) [m] .



Przyjęto dowolnie zwroty nieznanych sił V_E, H_E, R_C

Rozłożenie siły *Rc* na składowe:



$$\frac{R_{CY}}{R_{CX}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$R_{CY} = \frac{2}{2\sqrt{17}} R_C = \frac{1}{\sqrt{17}} R_C$$

$$R_{CX} = \frac{8}{2\sqrt{17}} R_C = \frac{4}{\sqrt{17}} R_C$$

__a) siły niebieskie:__

3 równania równowagi

$$\sum M_E = 0$$

$$30 + 8 \cdot 24 - 6 \cdot 8 - 10 \cdot 25 + 10 \cdot 7 - 12 \cdot 2 + Rc\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 6 - Rc\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 9 = 0$$

stąd otrzymujemy $Rc = 8{,}246kN$

$$\sum X = 0$$

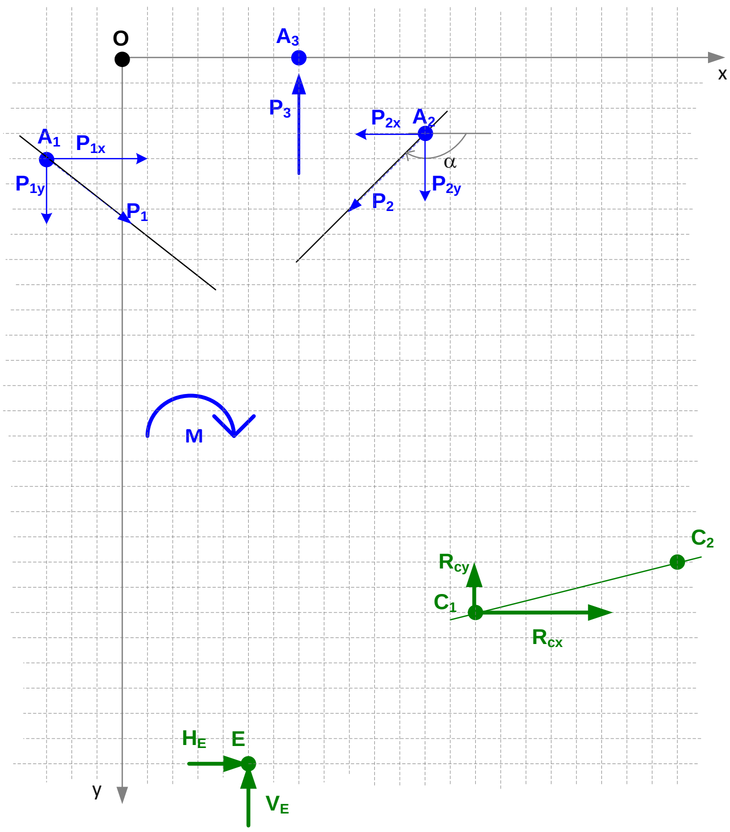
$$8 - 10 + 0 + H + Rc\frac{4}{\sqrt{17}} = 0$$

Znamy już R_C, więc otrzymujemy $H = -6kN$

$$\sum Y = 0$$

$$6 + 10 - 12 - V + Rc\frac{1}{\sqrt{17}} = 0$$

Znamy już R_C, więc otrzymujemy $V = 2kN$



Stąd nieznane siły z układu równoważącego to:

$$Rc = 8{,}246kN$$

$$R_E = \sqrt{V^2 + H^2} = 6{,}324kN$$

LUB

<u>b) wykorzystano wynik z 1 (siły czerwone):</u>

3 równania równowagi

$$\sum M_o = 0$$

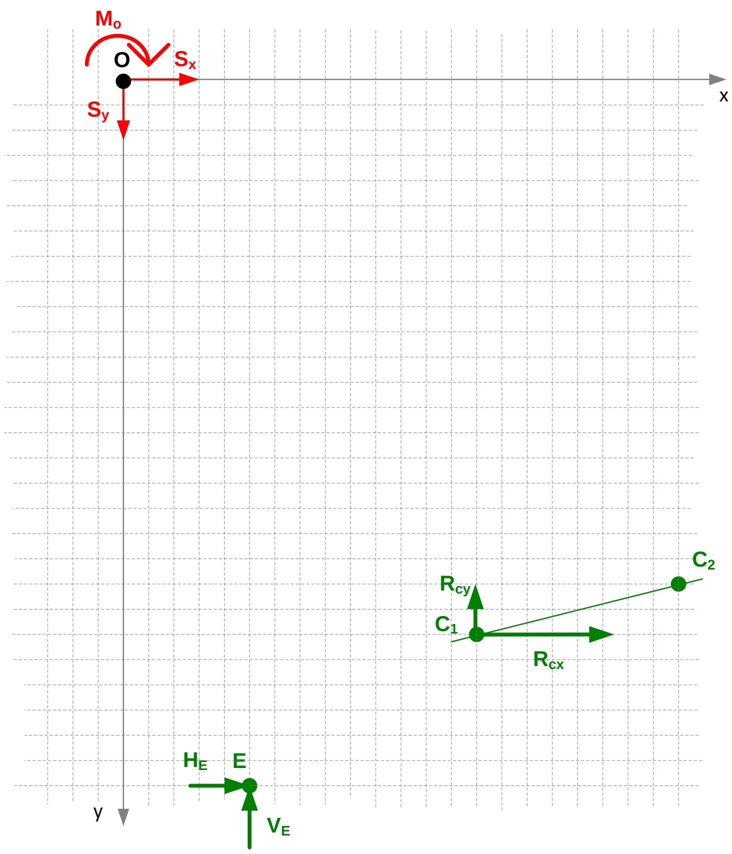
$$46 - H \cdot 28 - V \cdot 5 - Rc\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 22 - Rc\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 14 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$-2 + H + Rc\frac{4}{\sqrt{17}} = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$4 - V + Rc\frac{1}{\sqrt{17}} = 0$$



Stąd otrzymujemy nieznane siły układu równoważącego:

$$Rc = 8{,}246kN$$

$$V = 2kN$$

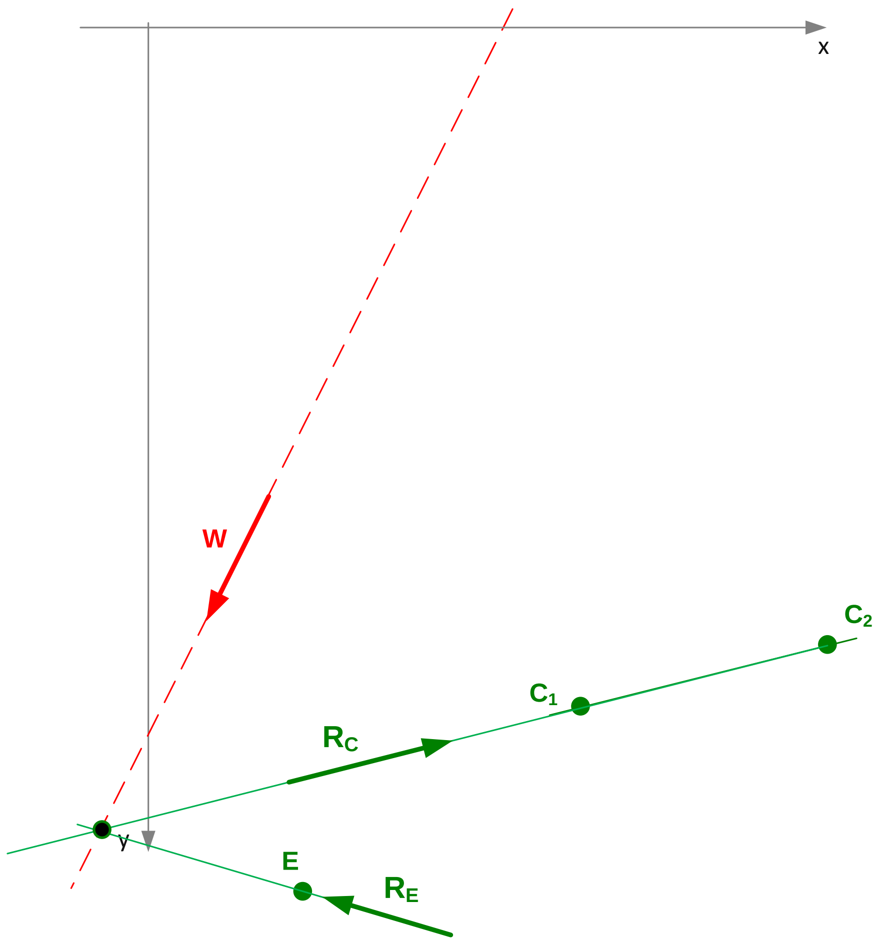
$$H = -6kN$$

$$R_E = \sqrt{V^2 + H^2} = 6{,}324kN$$

Znak minus w wyniku świadczy o tym, że siła ma inny zwrot niż założyliśmy.

Można sprawdzić wyniki zapisując inne równanie równowagi niż wykorzystane, podstawiając wyliczone siły i sprawdzić czy wynik będzie zero.

Wynik – położenie sił R_C i R_E:



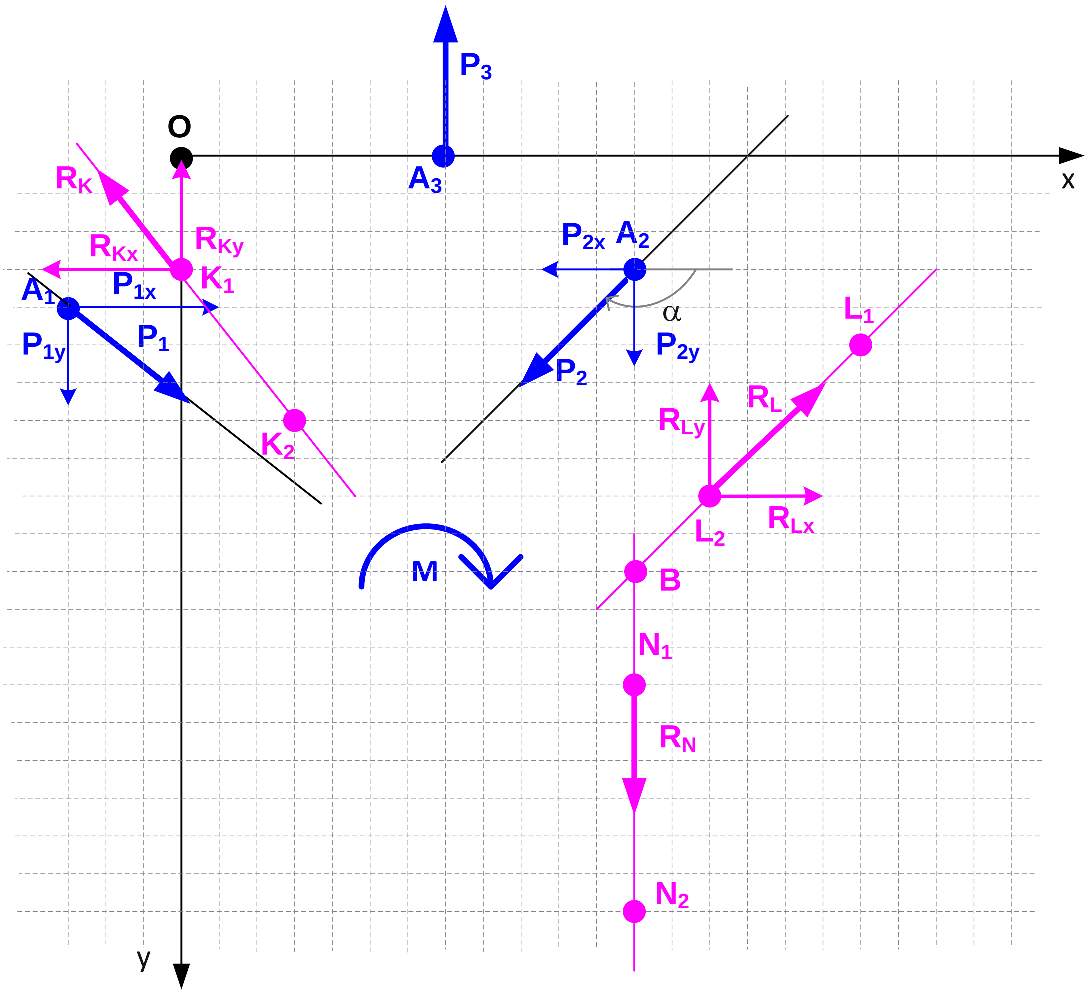
oraz wartości sił:

$$\overrightarrow{R_C} = (8\,,-2)[kN],\ \ R_C = 8{,}246kN$$

$$\overrightarrow{R_E} = (-6\,,-2)[kN],\ \ R_E = 6{,}324kN$$

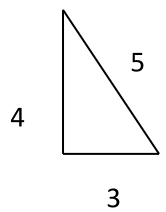
Zadanie nr 3.

Wyznaczyć układ równoważący składający się z trzech sił leżących na prostych k, l , n przechodzących przez punkty odpowiednio K_1(0,3) [m] i K_2 (3,7) [m], L_1 (18,5) [m] i L_2 (14,9) [m], N_1 (12,14) [m] i N_2 (12,20) [m] .



Przyjęto dowolnie zwroty nieznanych sił R_K, R_L, R_N

Rozłożenie siły R_K na składowe:



$$\frac{R_{Kx}}{R_{Ky}} = \frac{3}{4}, \quad R_{Kx} = \frac{3}{5} R_K , \quad R_{Ky} = \frac{4}{5} R_K$$

Rozłożenie siły R_L na składowe:

$$\frac{R_{Lx}}{R_{Ly}} = \frac{4}{4} = 1, \qquad R_{Lx} = R_{Ly} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_K$$

Punkt B – punkt przecięcia dwóch prostych działania niewiadomych sił R_N i R_L - B (12;11) [m]

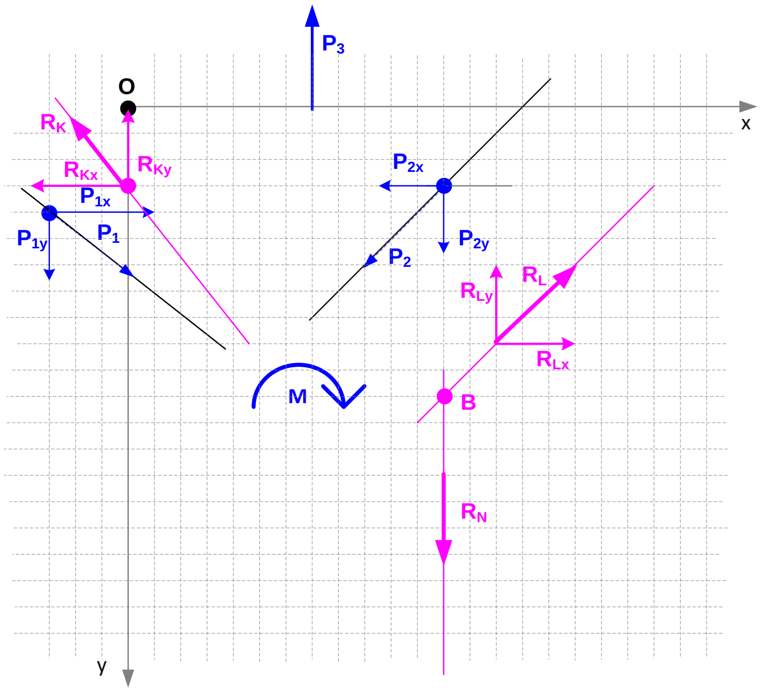
a) siły niebieskie:

3 równania równowagi

$$\sum M_B = 0$$

$$30 + 8 \cdot 7 - 6 \cdot 15 - 10 \cdot 8 + 12 \cdot 5 + R_{Ky} \cdot 12 - R_{KX} \cdot 8 = 0$$

stąd otrzymujemy $R_K = 5kN$



$$\sum X = 0$$

$$8 - 10 + 0 - R_{Kx} + R_{Lx} = 0$$

Znamy już R_{Kx}, więc otrzymujemy

$R_{Lx} = 5kN$, więc $R_L = 5\sqrt{2}kN$

$$\sum Y = 0$$

$$6 + 10 - 12 - R_{Ly} - R_{Ky} + R_N = 0$$

Znamy już R_{Ky} i R_{Ly} , więc otrzymujemy

$R_N = 5kN$

Otrzymano nieznane siły układu równoważącego:

$R_K = 5kN$

$R_L = 5\sqrt{2}kN$

$R_N = 5kN$

LUB

b) wykorzystano wynik z 1 (siły czerwone):

3 równania równowagi

$$\sum M_o = 0$$

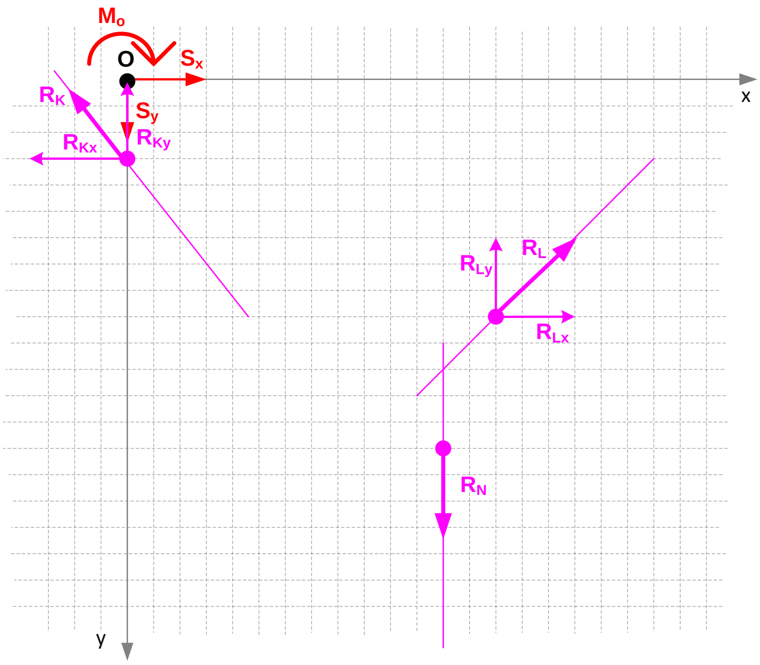
$$46 - R_{Kx} \cdot 3 - R_{Lx} \cdot 9 - R_{Ly} \cdot 14 + R_N \cdot 12 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$-2 - R_{Kx} + R_{Lx} = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$4 - R_{Ky} - R_{Ly} + R_N = 0$$



Stąd otrzymujemy nieznane siły układu równoważącego:

$$R_K = 5kN$$

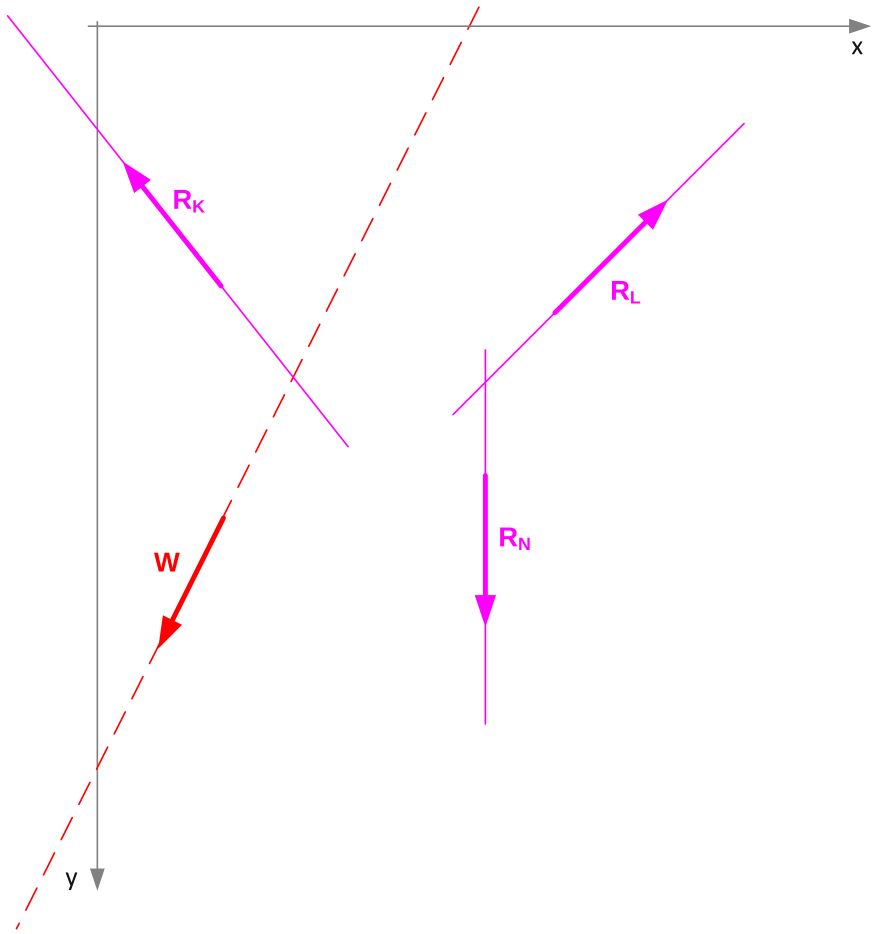
$$R_L = 5\sqrt{2} = 7{,}07kN$$

$$R_N = 5kN$$

Znaki dodatnie świadczą o tym, że siły mają zwroty jaki przyjęto.

Można sprawdzić wyniki zapisując inne równanie równowagi niż wykorzystane, podstawiając wyliczone siły i sprawdzić czy wynik będzie zero.

Wynik – położenie sił R_N, R_K i R_L:



oraz wartości sił:

$$\overrightarrow{R_K} = (-3\,,-4)[kN],\;\; R_K = 5\,kN$$

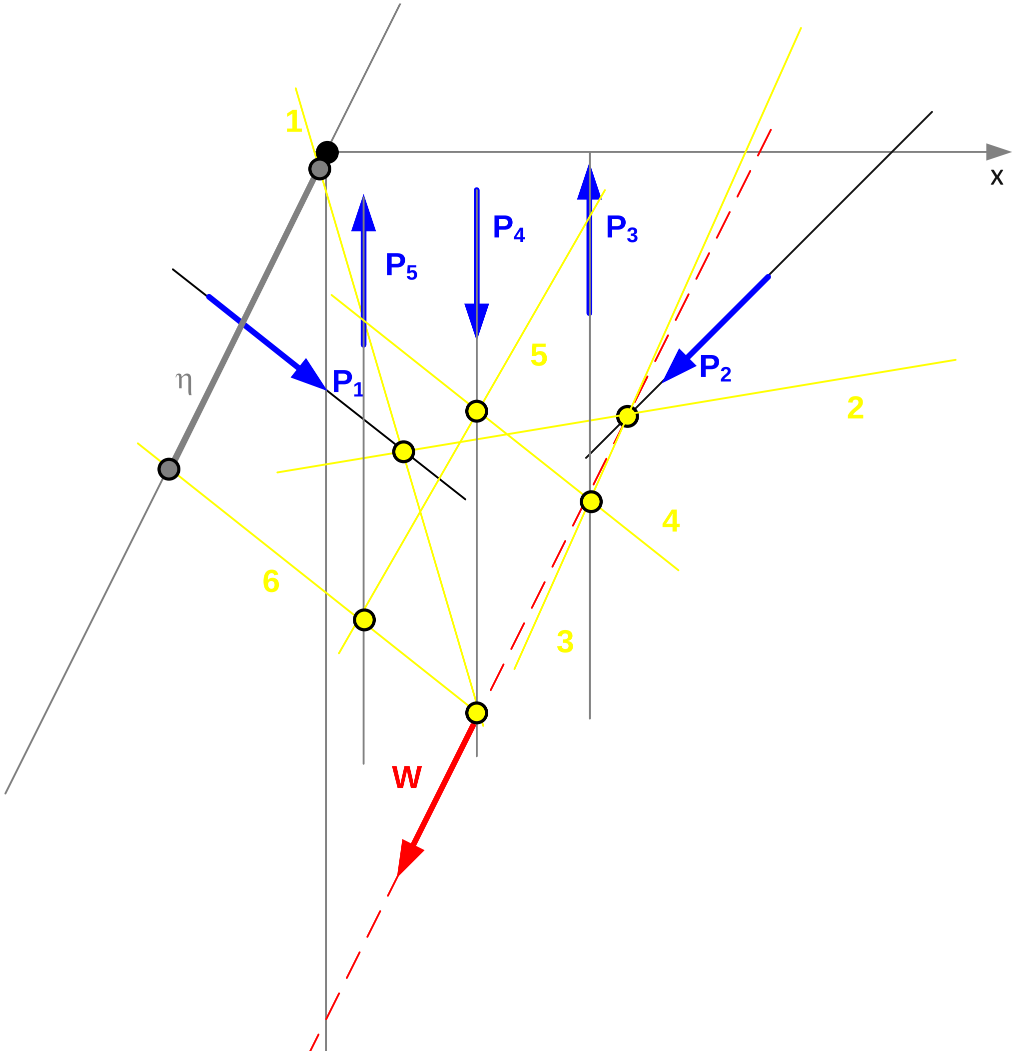
$$\overrightarrow{R_L} = (5\,,-5)[kN],\;\; R_L = 5\sqrt{2} = 7{,}07\,kN$$

$$\overrightarrow{R_N} = (0\,,5)[kN],\;\; R_N = 5\,kN$$

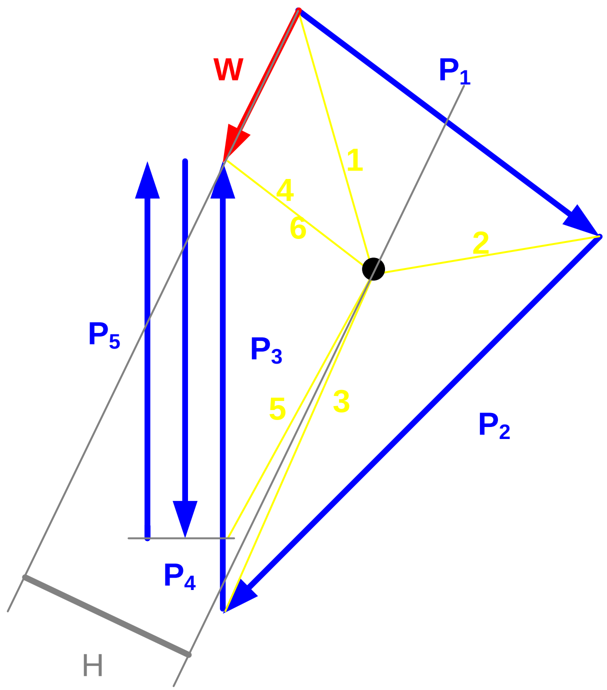
ROZWIĄZANIA GRAFICZNE

Zadanie nr 1.

Plan sił 1:200



Wielobok sił 1 cm – 2 kN

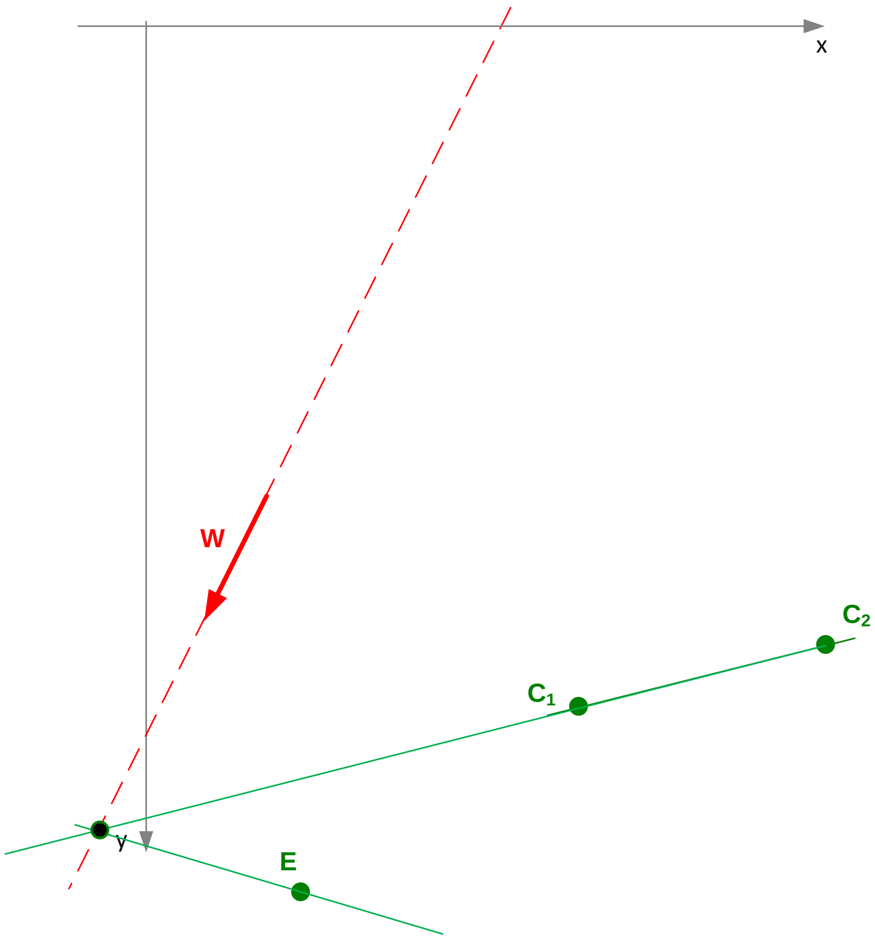


Odczyty

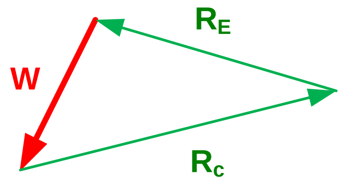
$M_o = H\eta = 46\ kNm$, $W = 4{,}4\ kN$

Zadanie nr 2.

Plan sił 1:200



Wielobok sił 1 cm – 2 kN



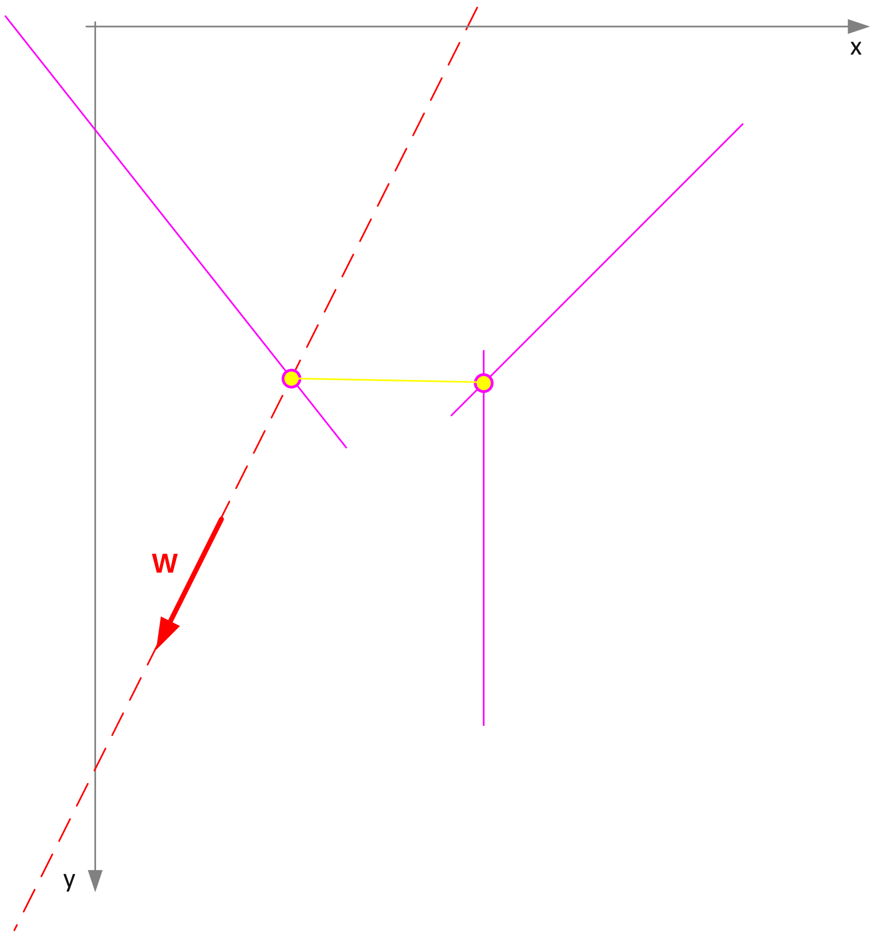
Odczyty

$Rc = 8{,}2\ kN$

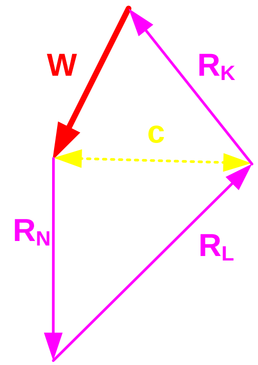
$R_E = 6{,}2\ kN$

Zadanie nr 3.

Plan sił 1:200



Wielobok sił 1 cm – 2 kN



Odczyty

$R_K = 5\ kN$

$R_L = 7\ kN$

$R_N = 5\ kN$

Momentem siły względem punktu

Momentem siły $\overline{P}$ względem punktu *B* nazywamy wektor $\overline{M}_{\mathrm{B}} = \overline{r} \times \overline{P}$.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że moment $\overline{M}_{\mathrm{B}}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny $x\,y$, o zwrocie zgodnym z regułą prawej dłoni i wartości

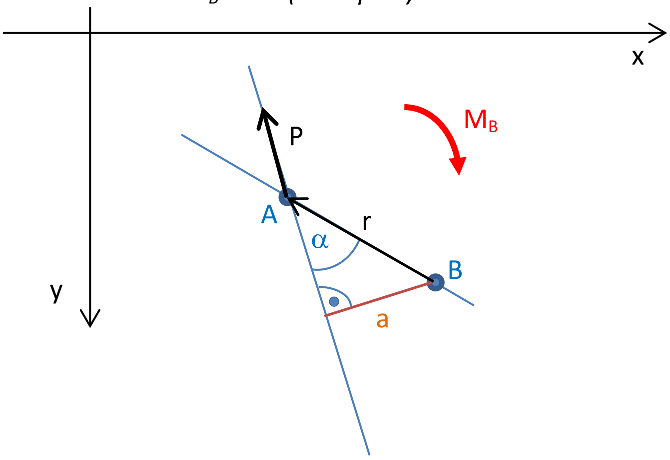
$$M_{\mathrm{B}} = r\,P \sin\alpha = P(r \sin\alpha) = Pa$$

gdzie *a* jest ramieniem siły względem punktu B.

Wartość momentu M_{B} nie zależy od wyboru punktu A na prostej działania siły $\overline{P}$.

Zapis analityczny momentu $\overline{M}_{\mathrm{B}}$ ma postać: $\overline{M}_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{Bz}}\,\overline{e}_z$, $M_{\mathrm{Bz}} = \pm Pa$.

M_B = P a (znak plus):



Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakową siłę ogólną i moment ogólny, to ***układy te są równoważne***.

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakowe co do modułu ale odwrotnie skierowane siły ogólne oraz mają jednakowe co do modułu ale odwrotnie skierowane momenty ogólne, to ***układy te są równoważące się***.