

WZORY DO WYZNACZANIA PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH PRZESTRZENNYCH

W celu wyznaczenia przemieszczenia należy dany układ rozwiązać od 2 obciążeń:

1. Od obciążenia stanowiącego przyczynę wywołującą szukane przemieszczenie,
2. Od obciążenia "jednostkowego" przyłożonego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia.

Uwaga: Jedno z tych rozwiązań może być wirtualne co oznacza, że może ono być wykonane dla dowolnego izostatycznego modelu układu (we wzorach oznaczono je nadkreśleniem). Od zmian temperatury i przemieszczeń, w rozwiązaniu tym, siły przekrojowe i reakcje równe są zerowe.

PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\begin{aligned}\Delta_{iF} = \Delta_i^F &= \int \frac{\overline{Mx}^i \cdot Mx^F}{GI_s} \cdot dx + \int \frac{\overline{My}^i \cdot My^F}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^F}{EI_z} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_y \cdot \overline{Vy}^i \cdot Vy^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot \overline{Vz}^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \\ &= \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GI_s} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{EI_z} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot Vy^i \cdot Vy^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \\ &= \int \frac{Mx^i \cdot \overline{Mx}^F}{GI_s} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot \overline{My}^F}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot \overline{Mz}^F}{EI_z} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot \overline{N}^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot Vy^i \cdot \overline{Vy}^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot \overline{Vz}^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot \overline{S}_s^F}{k_s}.\end{aligned}$$

PRZEMIESZCZENIA OD BŁĘDÓW MONTAŻU I PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR

$$\begin{aligned}\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta &= \int \frac{\overline{Mx}^i \cdot Mx^\Delta}{GI_s} \cdot dx + \int \frac{\overline{My}^i \cdot My^\Delta}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^\Delta}{EI_z} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^\Delta}{EA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_y \cdot \overline{Vy}^i \cdot Vy^\Delta}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot \overline{Vz}^i \cdot Vz^\Delta}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \\ &+ \sum_{mx} \overline{Mx}_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} \overline{My}_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} \overline{Mz}_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n \overline{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} \overline{Vy}_{vy}^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} \overline{Vz}_{vz}^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r \overline{R}_r^i \cdot \Delta_r = \\ &= \sum_{mx} Mx_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} My_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} Mz_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} Vy_{vy}^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} Vz_{vz}^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.\end{aligned}$$

PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\begin{aligned}\Delta_{iT} = \Delta_i^T &= \int \frac{\overline{Mx}^i \cdot Mx^T}{GI_s} \cdot dx + \int \frac{\overline{My}^i \cdot My^T}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^T}{EI_z} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_y \cdot \overline{Vy}^i \cdot Vy^T}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot \overline{Vz}^i \cdot Vz^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \\ &+ \int \overline{My}^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int \overline{Mz}^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int \overline{N}^i \cdot \Delta dL^T = \\ &= \int My^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int Mz^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T.\end{aligned}$$

gdzie $\Delta d\varphi_y^T = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta Tz^+ - \Delta Tz^-)}{hz} \cdot dx$, $\Delta d\varphi_z^T = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta Ty^- - \Delta Ty^+)}{hy} \cdot dx$,

$$\Delta dL^T = \alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot dx = \alpha_T \cdot \frac{(\Delta T y^+ \cdot h y^- + \Delta T y^- \cdot h y^+)}{h y} \cdot dx = \alpha_T \cdot \frac{(\Delta T z^+ \cdot h z^- + \Delta T z^- \cdot h z^+)}{h z} \cdot dx.$$

Gdy przekrój jest symetryczny względem osi z $h y^- = h y^+ = h y/2$, $\Delta T_o = (\Delta T y^+ + \Delta T y^-)/2$.

Gdy przekrój jest symetryczny względem osi y $h z^- = h z^+ = h z/2$, $\Delta T_o = (\Delta T z^+ + \Delta T z^-)/2$.

Zwykle wyrażenia $\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T z^+ - \Delta T z^-)}{h z}$, $\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T y^- - \Delta T y^+)}{h y}$ i $\alpha_T \cdot \Delta T_o$ są na długości określonych przedziałów stałe.

W tym przypadku wzory na wyznaczanie przemieszczeń od zmian temperatury mają postać

$$\begin{aligned} \Delta_{iT} = \Delta_i^T &= \int \frac{\bar{M}x^i \cdot Mx^T}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}y^i \cdot My^T}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}z^i \cdot Mz^T}{EIz} \cdot dx + \int \frac{\bar{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot \bar{V}y^i \cdot Vy^T}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot \bar{V}z^i \cdot Vz^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \\ &+ \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T z^+ - \Delta T z^-)}{h z} \cdot \Omega_{\bar{M}y^i} \right)_p + \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T y^- - \Delta T y^+)}{h y} \cdot \Omega_{\bar{M}z^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{\bar{N}^i} \right)_p = \\ &= \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T z^+ - \Delta T z^-)}{h z} \cdot \Omega_{M_y^i} \right)_p + \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T y^- - \Delta T y^+)}{h y} \cdot \Omega_{M_z^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^i} \right)_p. \end{aligned}$$

DLA KRATOWNIC wzoty mają postać identyczną jak dla kratownic płaskich

DLA UKŁADÓW IZOSTATYCZNYCH

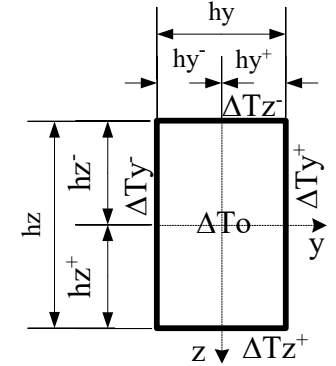
$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{EIz} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot Vy^i \cdot Vy^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = \sum_{mx} Mx^i \cdot \Delta \varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} My^i \cdot \Delta \varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} Mz^i \cdot \Delta \varphi_{mz}^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} Vy^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} Vz^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.$$

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int My^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int Mz^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T.$$

Gdy wyrażenia $\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T z^+ - \Delta T z^-)}{h z}$, $\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T y^- - \Delta T y^+)}{h y}$ i $\alpha_T \cdot \Delta T_o$ są na długości określonych przedziałów stałe

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T z^+ - \Delta T z^-)}{h z} \cdot \Omega_{M_y^i} \right)_p + \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T y^- - \Delta T y^+)}{h y} \cdot \Omega_{M_z^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^i} \right)_p.$$



PRZYJĘTE OZNACZENIA

Oznaczenie wielkości składa się z symbolu oznaczającego wielkość i indeksów dolnych oraz górnych.

SYMBOLE oznaczające określone wielkości:

Δ - przemieszczenie (może to być przesunięcie, kąt obrotu lub wzajemne przemieszczenie) lub przyrost określonej wielkości

$M_x = M_x(x)$ – moment skręcający, $M_y = M_y(x)$, $M_z = M_z(x)$ – momenty zginające, $N = N(x)$ – siła osiowa (podłużna),

$V_y = V_y(x)$ – siła tnąca (poprzeczna), $V_z = V_z(x)$ – siły tnące (poprzeczne), Ω - pole wykresu siły przekrojowej

S – siła w więzi sprężystej (moment w więzi rotacyjnej lub siła podłużna w więzi translacyjnej),

k – sztywność więzi sprężystej, κ_y, κ_z - współczynniki zależne od kształtu przekroju,

α_T - współczynnik rozszerzalności termicznej materiału,

E, G – moduły sprężystości podłużnej i poprzecznej materiału (Younga i Kirchoffa),

A, I_y, I_z – pole i momenty bezwładności poprzecznego przekroju pręta,

I_s - momenty bezwładności na skręcanie poprzecznego przekroju pręta (dla przekrojów kołowych i rur jest równy biegunowemu momentowi bezwładności).

INDEKSY

Indeks górny określa przyczynę wywołującą daną wielkość.

Pierwszy indeks dolny określa miejsce działania (występowania) danej wielkości.

Drugi indeks dolny określa, jeśli nie ma indeksu górnego, przyczynę wywołującą daną wielkość, a jeśli jest indeks górny, stanowi uzupełnienie określenia miejsca działania danej wielkości.

Np.: M_y^n oznacza moment w dowolnym miejscu wywołany przyczyną oznaczoną symbolem n ,

M_{ij}^n oznacza moment w punkcie i pręta $i-j$ wywołany przyczyną oznaczoną symbolem n ,

Δ_{ij}, Δ_i^j oznaczają przemieszczenie w miejscu i kierunku i wywołane przyczyną oznaczoną symbolem j

N_p^i oznacza siłę osiową w pręcie o numerze p wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem i ,

S_s^i oznacza siłę w więzi sprężystej o numerze s wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem i .