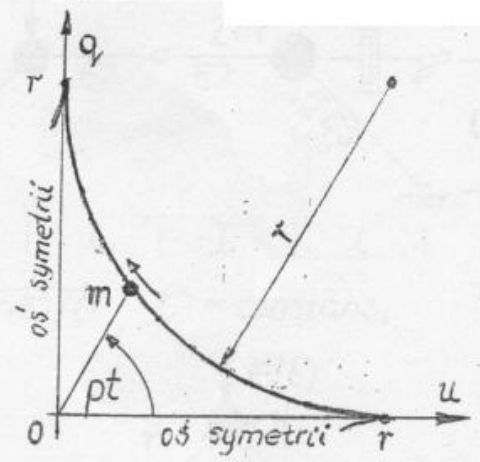
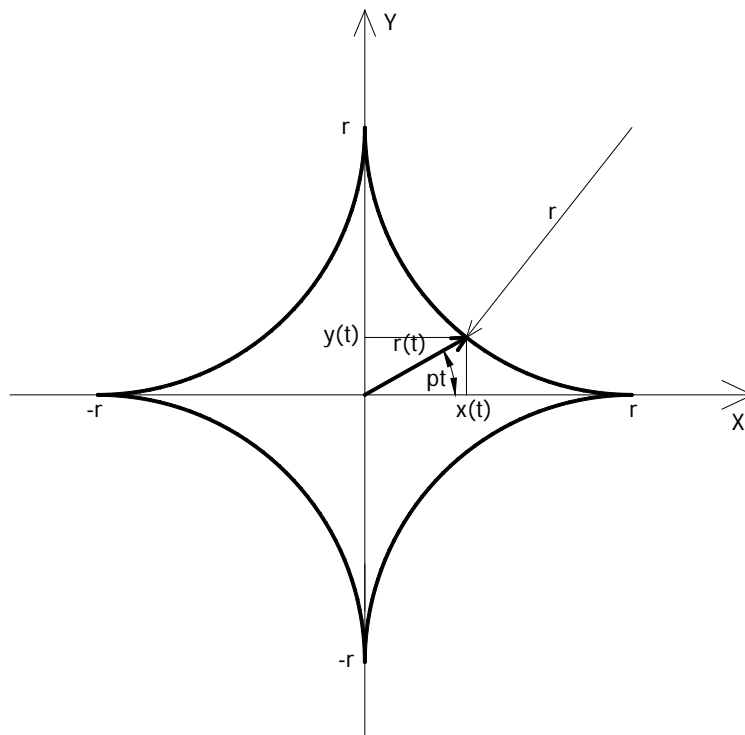


ZADANIE 1.

1.1 Trajektoria ruchu (obraz fazowy) punktu masowego ma postać jak na rysunku. Podać rozwinięcie czasowe dla pełnego okresu przyjmując $p = \text{constans}$.



1.1. Zadany obraz fazowy



Jeżeli krzywa obrazu fazowego jest krzywą zamkniętą, to ruch jest periodyczny (okresowy). W analizowanym przykładzie krzywa fazowa ruchu jest zamknięta, zatem rozwinięcie czasowe reprezentować będzie funkcja spełniająca warunek okresowości. Ponadto ze względu na pewne analogie pomiędzy ruchem punktu materialnego po okręgu, można wywnioskować że funkcja rozwinięcia czasowego ruchu będzie miała postać

$$q(t) = r(t) * \sin(pt)$$

podczas gdy dla ruchu po okręgu mamy funkcję: $q(t) = r * \sin(pt)$.

Aby wyznaczyć promień krzywizny zmienny w czasie, założmy że ruch odbywa się po krzywej ze **stałą prędkością kątową** p . Wówczas prawdziwe są relacje:

$$y(t) = r(t) * \sin(p * t)$$

$$x(t) = r(t) * \cos(p * t)$$

współrzędne te muszą spełniać równanie okręgu o środku w punkcie (x,y), stąd

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(r(t) * \cos(p * t) - r)^2 + (r(t) * \sin(p * t) - r)^2 = r^2$$

jest to równanie kwadratowe którego rozwiązaniem są pierwiastki

$$r_1(t) = r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) - a * \sqrt{2 * \sin(p * t) * \cos(p * t)}$$

$$r_2(t) = r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) + a * \sqrt{2 * \sin(p * t) * \cos(p * t)}$$

przy czym musi być spełniony warunek

$$0 < r(t) \leq r$$

stąd

$$r(t) = r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) - a * \sqrt{2 * \sin(p * t) * \cos(p * t)}$$

Rozwinięcie czasowe w pierwszej ćwiartce ma zatem postać:

$$q'(t) = (r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) - a * \sqrt{2 * \sin(p * t) * \cos(p * t)}) * \sin(p * t)$$

W kolejnych ćwiartkach rozwiązanie uzyskuje się formułując następujące warunki:

* w drugiej ćwiartce $(x + r)^2 + (y - r)^2 = r^2$

* w trzeciej ćwiartce $(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2$

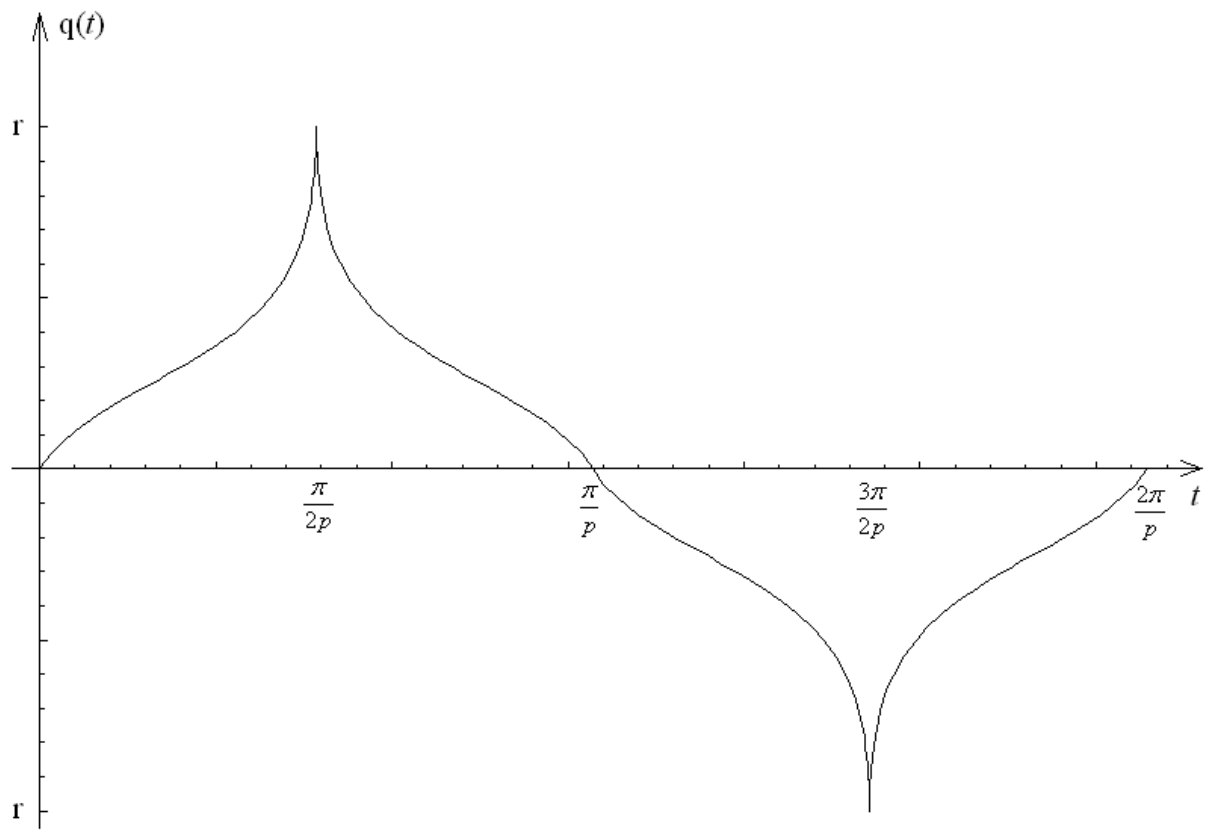
* w czwartej ćwiartce $(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$

$$q''(t) = \left(r * \sin(p * t) - r * \cos(p * t) - a * \sqrt{2 * \sin(p * t) * \cos\left(p * t + \frac{\pi}{p}\right)} \right) * \sin(p * t)$$

$$q'''(t) = (-r * \sin(p * t) - r * \cos(p * t) + a * \sqrt{2 * \sin(p * t) * \cos(p * t)}) * \sin(p * t)$$

$$q^{IV}(t) = \left(-r * \sin(p * t) + r * \cos(p * t) + a * \sqrt{2 * \sin\left(p * t + \frac{\pi}{p}\right) * \cos(p * t)} \right) * \sin(p * t)$$

Wykres rozwinięcia czasowego

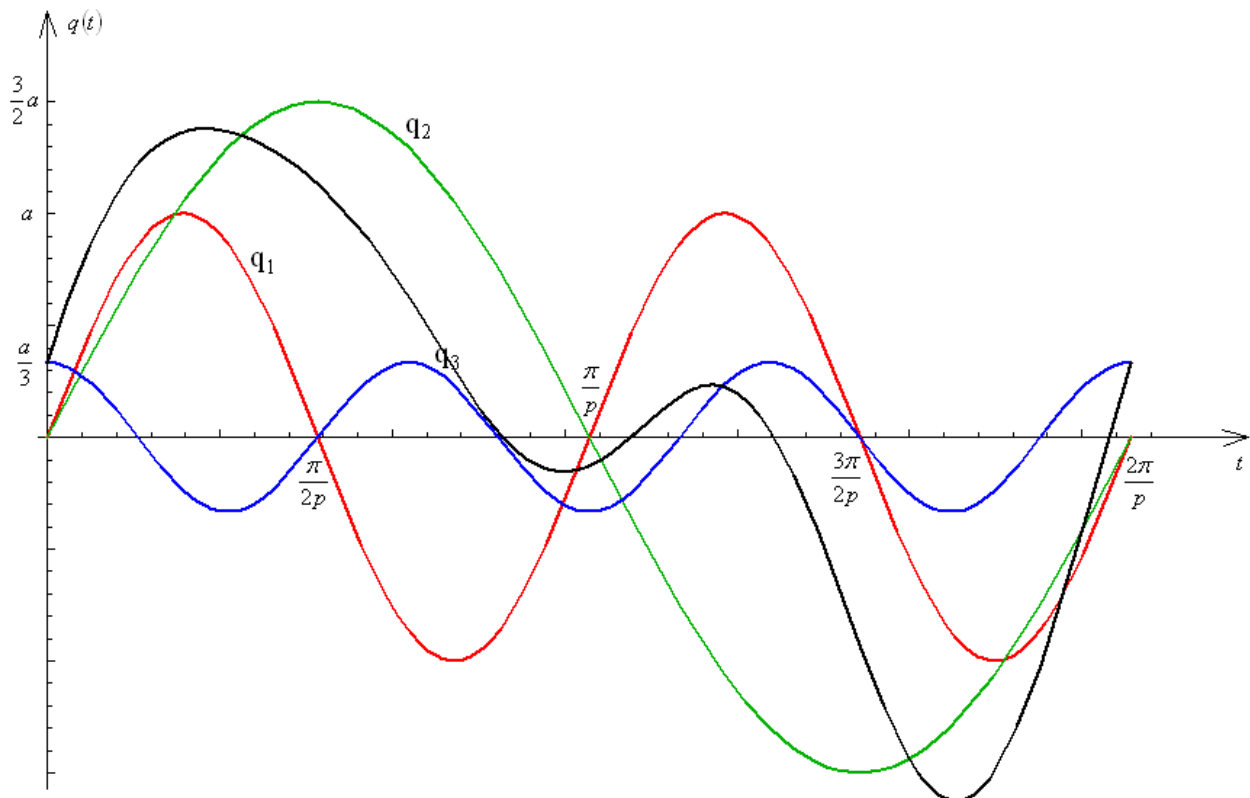


ZADANIE 2.

2.1 Analiza harmoniczna wibrogramu wykazała, że oscylacja jest sumą trzech ruchów kolinearnych. Narysować ruchy składowe oraz ruch wypadkowy. Wyznaczyć położenie węzłów ruchu, ekstremów i ich wartości (minimum dla dwóch składowych).

$$q_1 = a \sin 2pt, \quad q_2 = \frac{3}{2}a \sin pt, \quad q_3 = \frac{a}{3} \cos 3pt.$$

2.1. Wykresy ruchów składowych oraz wypadkowego



Kolor czarny – ruch wypadkowy: $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$

2.2. Węzły ruchu dla dwóch ruchów wypadkowych

Dla dwóch wybranych ruchów q_1 oraz q_2 mamy:

$$\sin(2\alpha) = 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha)$$

$$q(t) = a * \sin(2pt) + \frac{3}{2} * a * \sin(pt) = 2 * a * \sin(pt) * \cos(pt) + \frac{3}{2} * a * \sin(pt)$$

$$q(t) = a * \sin(pt) * \left(2 * \cos(pt) + \frac{3}{2} \right)$$

Warunek na wyznaczenie węzłów ruchu: $q(t) = 0$

$$q(t) = a * \sin(pt) * \left(2 * \cos(pt) + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$a * \sin(pt) = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{3}{2} + 2 * \cos(pt) = 0$$

$$\cos(pt) = -\frac{3}{4}$$

$$\sin(pt) = 0 \quad \cos(pt) = -\frac{3}{4}$$

$$t = \frac{n * \pi}{p}$$

$$p * t = \frac{77\pi}{100} + 2 * n * \pi \quad \text{lub} \quad p * t = -\frac{77\pi}{100} + 2 * n * \pi$$

$$t = \frac{77 * \pi}{100 * p} + \frac{2 * n * \pi}{p} \quad \text{lub} \quad t = -\frac{77 * \pi}{100 * p} + \frac{2 * n * \pi}{p}$$

Stąd węzły ruchu zlokalizowane są w punktach $t = \frac{n * \pi}{p}$, $t = \frac{77 * \pi}{100 * p} + \frac{2 * n * \pi}{p}$ oraz

$t = -\frac{77 * \pi}{100 * p} + \frac{2 * n * \pi}{p}$, przy czym $n \in \mathbb{C}$ (całkowitych).

2.3. Okres ruchu wypadkowego

Analizowaną funkcję można przedstawić w postaci dwóch ruchów składowych:

$$q_1(t) = a * \sin(2pt)$$

$$q_2(t) = \frac{3}{2} * a * \sin(pt)$$

Stąd

$$\omega_1 = 2p$$

$$\omega_2 = p$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = 1$$

$$T_1 = \frac{\pi}{p}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{p}$$

Następnie poszukiwany okres drgań ruchu wypadkowego ma postać

$$T = \frac{2\pi * n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi * n_2}{\omega_2} = \frac{2\pi * 2}{2p} = \frac{2\pi * 1}{p} = \frac{2\pi}{p}$$

2.4. Ekstrema wychylenia

$$q(t) = a * \sin(2pt) + \frac{3}{2} * a * \sin(pt)$$

Pierwsza pochodna podług czasu ma postać:

$$\dot{q}(t) = a * 2 * p * \cos(2pt) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt) = 2 * a * p * \cos(2pt) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt)$$

Stąd przyrównując pierwszą pochodną do zera wyznaczyć można ekstrema lokalne funkcji $q(t)$, przy czym rozważania dotyczą tylko przedziału $t \in [0 ; 2\pi/p]$

Przydatny będzie wzór trygonometryczny: $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Stąd

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= 2 * a * p * \cos(2pt) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt) = \\ &= 2 * a * p * (\cos^2(pt) - \sin^2(pt)) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt) = \\ &= 2 * a * p * (\cos^2(pt) - 1 + \cos^2(pt)) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt) = \\ &= 4 * a * p * \cos^2(pt) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt) - 2 * a * p \end{aligned}$$

$$4 * a * p * \cos^2(pt) + \frac{3}{2} * a * p * \cos(pt) - 2 * a * p = 0$$

Jest to równanie kwadratowe, jeżeli podstawimy

$$\cos(pt) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$4 * a * p * x^2 + \frac{3}{2} * a * p * x - 2 * a * p = 0$$

Stąd: $x = -0,919044 \quad \cup \quad x = 0,544044$

$$1^0 \quad \cos(pt) = -0,919044$$

$$\begin{array}{ll} \cos(pt) = \cos(2,73644) & \cos(pt) = \cos(-2,73644) \\ p * t = 2,73644 & \text{lub} \quad p * t = -2,73644 + 2 * \pi \\ t = \frac{2,73644}{p} & t = \frac{3,54674}{p} \end{array}$$

$$2^0 \quad \cos(pt) = 0,545044$$

$$\begin{array}{ll} \cos(pt) = \cos(0,995547) & \cos(pt) = \cos(-0,995547) \\ p * t = 0,995547 & \text{lub} \quad p * t = -0,995547 + 2 * \pi \\ t = \frac{0,995547}{p} & t = \frac{5,28764}{p} \end{array}$$

Zatem ekstrema lokalne występują w punktach:

$$t = \frac{0,995547}{p}, \quad t = \frac{2,73644}{p}, \quad t = \frac{3,54674}{p}, \quad t = \frac{5,28764}{p}$$

i wynoszą odpowiednio

$$q\left(\frac{0,995547}{p}\right) = a * \sin\left(2p \frac{0,995547}{p}\right) + \frac{3}{2} * a * \sin\left(p \frac{0,995547}{p}\right) = 2,17155a$$

$$q\left(\frac{2,73644}{p}\right) = a * \sin\left(2p \frac{2,73644}{p}\right) + \frac{3}{2} * a * \sin\left(p \frac{2,73644}{p}\right) = -0,133259a$$

$$q\left(\frac{3,54674}{p}\right) = a * \sin\left(2p \frac{3,54674}{p}\right) + \frac{3}{2} * a * \sin\left(p \frac{3,54674}{p}\right) = 0,133259a$$

$$q\left(\frac{5,28764}{p}\right) = a * \sin\left(2p \frac{5,28764}{p}\right) + \frac{3}{2} * a * \sin\left(p \frac{5,28764}{p}\right) = -2,17155a$$

2.5. Rysunek na przedziale $t \in [0; T]$

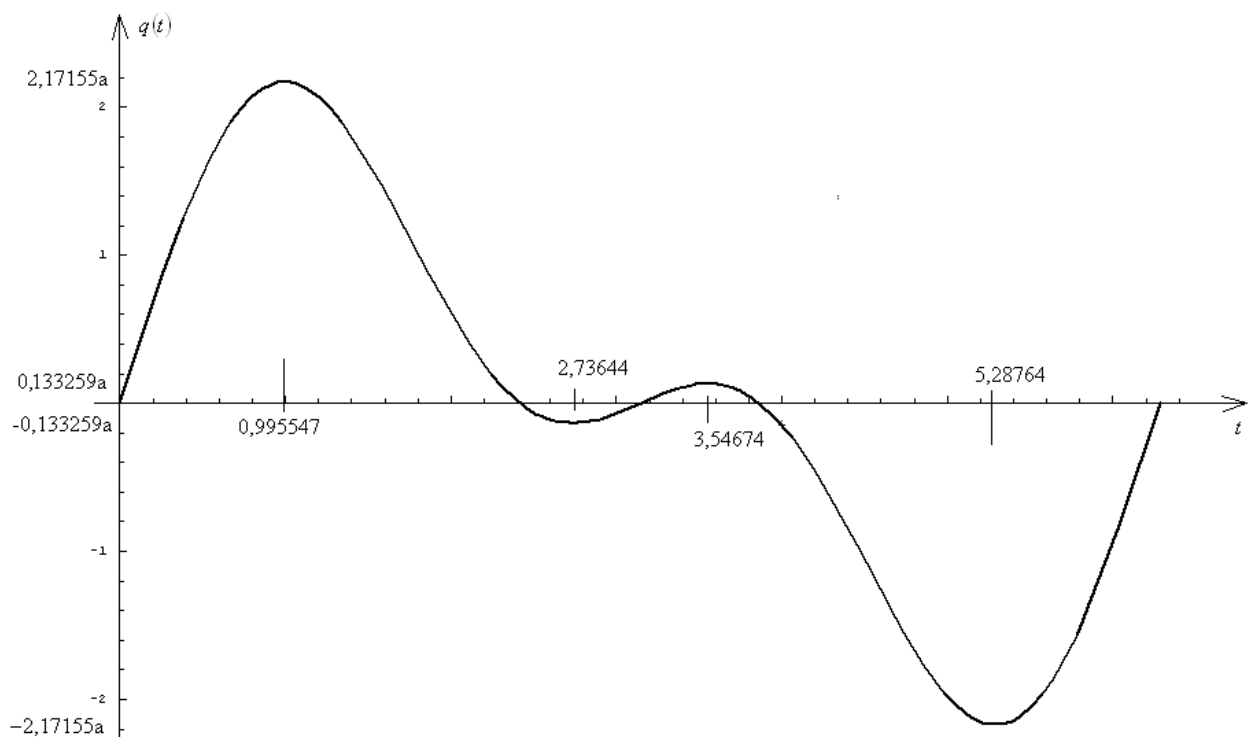
Dla $p = 1$ oraz $a = 1$ otrzymujemy

$$q(t) = \sin(2t) + \frac{3}{2} \sin(t)$$

$$T = 2\pi$$

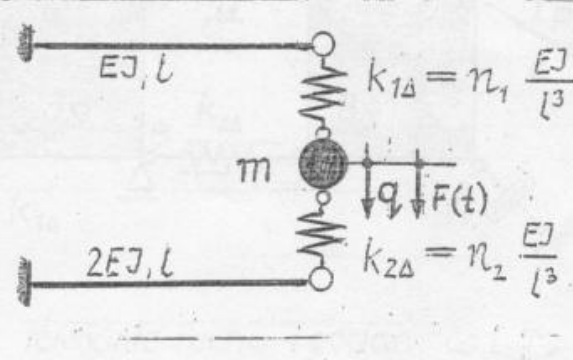
oraz punkty ekstremalnych wychyleń

$$t = 0,995547, \quad t = 2,73644, \quad t = 3,54674, \quad t = 5,28764$$



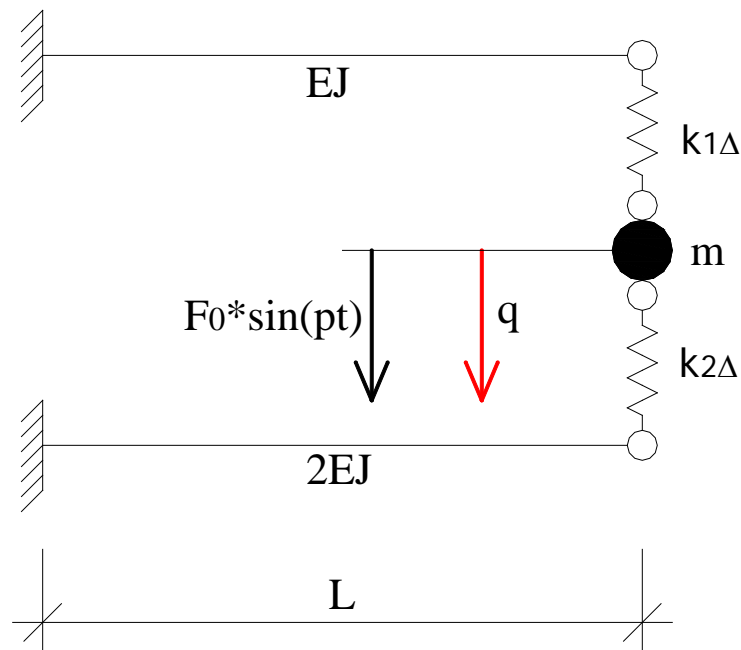
ZADANIE 3.

3.1 Jaka musi być zależność między $k_{1\Delta}$ i $k_{2\Delta}$ ($n_1 = f(n_2)$), aby częstość drgań własnych układu $\omega = 2\sqrt{EJ/ml^3}$? Sporządzić stosowny wykres. Dla siły wymuszającej $F(t) = F_0 \sin pt$ wyznaczyć amplitudę oraz przesunięcia charakterystycznych punktów układu, obliczyć $e^{\lambda \text{ am M.}}$. Przyjąć n_1 oraz $p = 0,98\omega$.



3.1. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

Analizowany układ można potraktować jako zestaw izolowanych więzi w połączeniu kombinowanym i na tej podstawie, można wyliczyć parametr zastępczej więzi sprężystej.



$$k_z = k_1 + k_2$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_{1\Delta}} + \frac{L^3}{3EJ}$$

$$k_1 = \frac{3 * EJ * n_1}{L^3(n_1 + 3)}$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_{2\Delta}} + \frac{L^3}{6EJ}$$

$$k_2 = \frac{6 * EJ * n_2}{L^3(n_2 + 6)}$$

Sztywność zastępcza układu

$$k_z = \frac{3 * EJ * n_1}{L^3(n_1 + 3)} + \frac{6 * EJ * n_2}{L^3(n_2 + 6)}$$

3.3. Częstota własna układu oraz zależność między $k_{1\Delta}$ i $k_{2\Delta}$

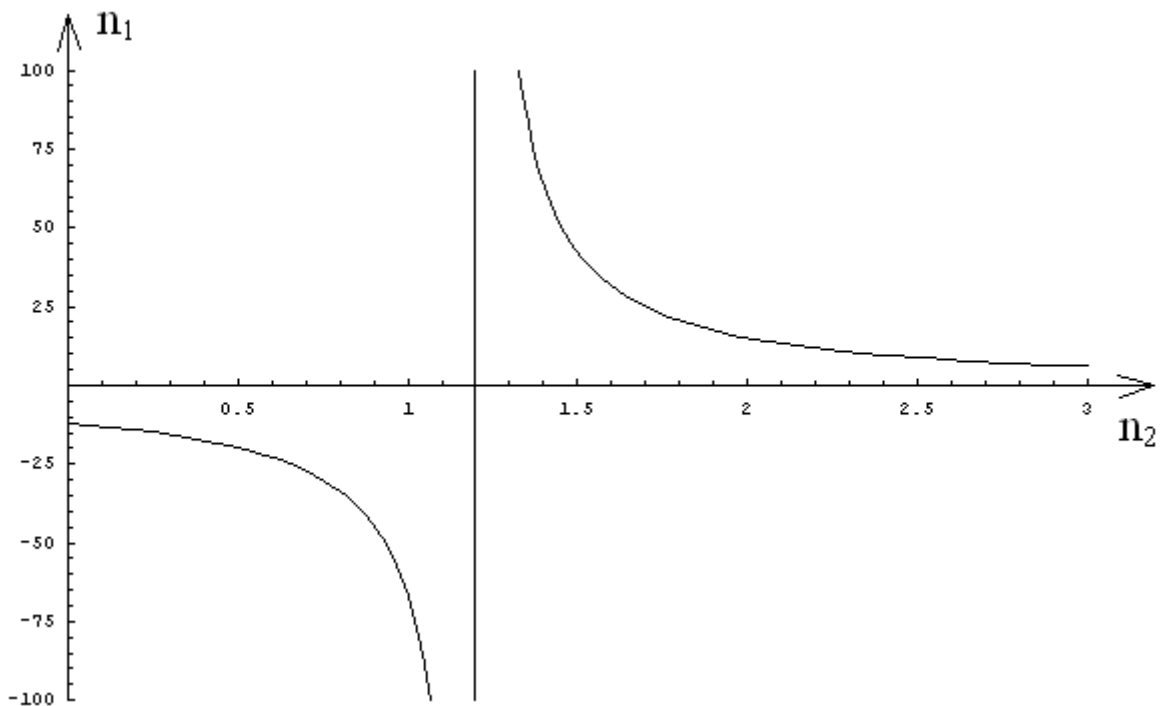
$$\omega = \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \sqrt{\frac{3 * EJ * n_1}{m * L^3(n_1 + 3)} + \frac{6 * EJ * n_2}{m * L^3(n_2 + 6)}}$$

$$\sqrt{\frac{3 * EJ * n_1}{m * L^3(n_1 + 3)} + \frac{6 * EJ * n_2}{m * L^3(n_2 + 6)}} = 2 \sqrt{\frac{EJ}{m * L^3}}$$

Stąd wynika relacja

$$n_1 = \frac{6 * (12 - n_2)}{5n_2 - 6}, \quad \text{przy czym } n_1 > 0$$

Wykres n_1 w funkcji n_2



3.4. Amplitudalne przemieszczenia

Obliczenia przeprowadzono dla $\omega = 2\sqrt{\frac{EJ}{m * L^3}}$

Drgania ustalone mają postać (na podstawie *Dynamika Budowli, J. Langer*)

$$q(t) = \frac{V}{k} F_S \sin(pt - \varphi) + \frac{V}{k} F_C \cos(pt - \varphi)$$

Dane: $\gamma = 0$, $p = 0,98\omega$, n_1 , $F_S = F_0$

$$\eta = \frac{p}{\omega} = 0,98$$

$$\nu = \frac{1}{|1 - \eta^2|} = \frac{1}{|1 - 0,98^2|} = 25,2525$$

$$n_2 = \frac{6 * (12 + n_1)}{5n_1 + 6}$$

Stąd

$$q(t) = \frac{25,2525}{4EJ/L^3} F_0 \sin(0,98\omega t) = 6,3131 \frac{F_0 L^3}{EJ} \sin(0,98\omega t)$$

Amplituda przemieszczenia w miejscu masy skupionej wynosi

$$amq = 6,3131 \frac{F_0 L^3}{EJ}$$

Z rozdziału obciążenia w połączeniu więzi sprężystych wynika, że na wspornik o sztywności EJ przypada siła obliczona ze wzoru

$$r_1 = \frac{k_1}{k_z} = \frac{n_1 * (6 + n_2)}{6n_2 + 3n_1 * (n_2 + 2)}$$

lub po uwzględnieniu $n_2 = \frac{6 * (12 + n_1)}{5n_1 + 6}$

$$r_1 = \frac{3n_1}{12 + 4n_1}$$

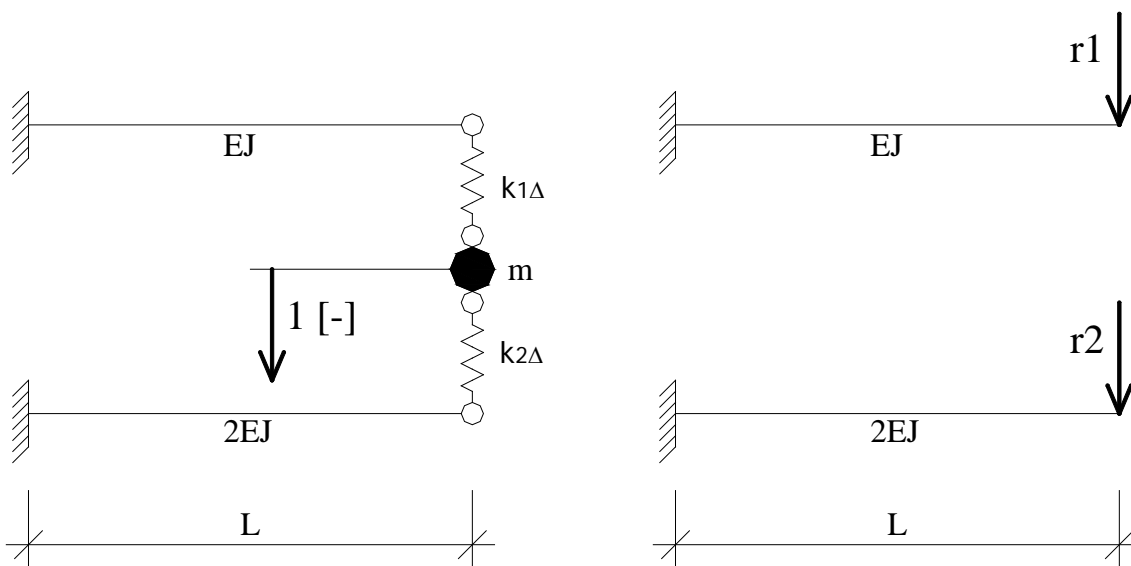
Natomiast na wspornik o sztywności 2EJ przypada siła obliczona ze wzoru

$$r_2 = \frac{k_2}{k_z} = \frac{2n_2 * (3 + n_1)}{6n_2 + 3n_1 * (n_2 + 2)}$$

lub po uwzględnieniu $n_2 = \frac{6 * (12 + n_1)}{5n_1 + 6}$

$$r_2 = \frac{12 + n_1}{12 + 4n_1}$$

Przy czym $r_1 + r_2 = \frac{3n_1}{12 + 4n_1} + \frac{12 + n_1}{12 + 4n_1} = 1$ - warunek rozdziału



Przemieszczenie końca wspornika o sztywności EJ

$$amu_1 = \frac{6,3131F_0 * r_1}{3EJ/L^3} = \frac{6,3131F_0L^3}{3EJ} * \frac{3n_1}{12 + 4n_1} = 1,5783 \frac{F_0L^3n_1}{EJ(3 + n_1)}$$

Przemieszczenie końca wspornika o sztywności 2EJ

$$amu_2 = \frac{6,3131F_0 * r_2}{6EJ/L^3} = \frac{6,3131F_0L^3}{6EJ} * \frac{12 + n_1}{12 + 4n_1} = 1,0522 \frac{F_0L^3(12 + n_1)}{EJ(12 + 4n_1)}$$

3.5. Amplitudalne momenty

Siła kinetyczna

$$Q(t) = v F_0 \sin(pt)$$

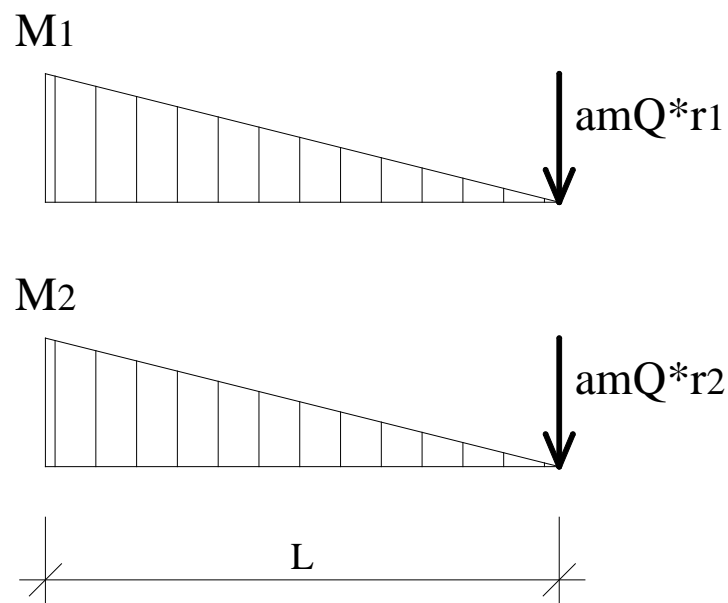
Amplituda siły kinetycznej dla $v = 25,2525$

$$amQ(t) = v F_0 = 25,2525 F_0$$

Stąd wykresy momentów dynamicznych mają postać

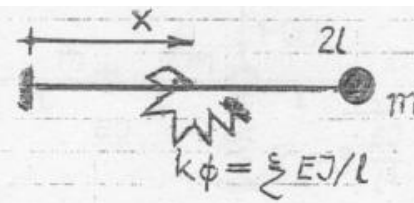
$$M_1^{extr} = v * r_1 * F_0 * L = 25,2525 * \frac{3n_1}{12 + 4n_1} * F_0 * L = 18,9394 * \frac{n_1}{3 + n_1} * F_0 * L$$

$$M_2^{extr} = v * r_2 * F_0 * L = 25,2525 * \frac{12 + n_1}{12 + 4n_1} * F_0 * L = 6,3131 * \frac{12 + n_1}{3 + n_1} * F_0 * L$$



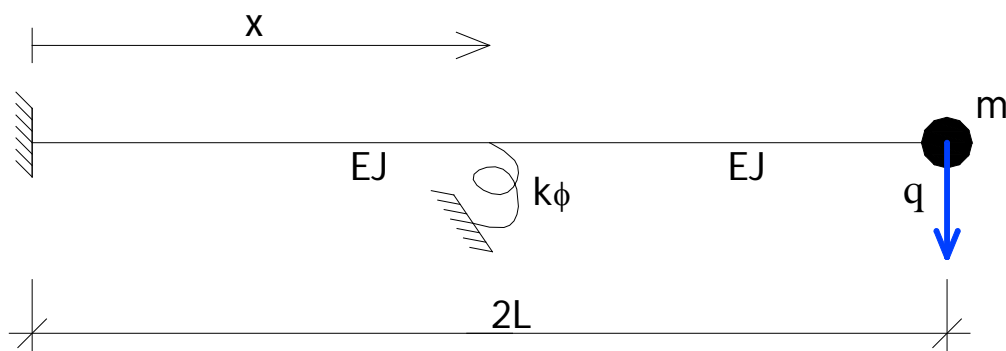
ZADANIE 4.

4.1 W jakim przedziale liczbowym zawiera się częstość własna ω , będąca funkcją sztywności rotacyjnej k_ϕ i zmiennej x ?
 $x \in (L, 2L)$, $\xi \in (0, \xi_0)$.
 Dane: $m, L, EJ, EA = \infty$.



Do wyznaczenia sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej posłużono się metodą przemieszczeń

Przyjęcie współrzędnej uogólnionej

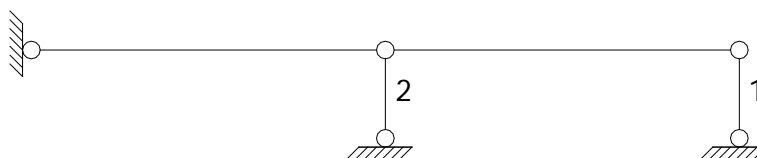


4.1. Stopień geometrycznej niewyznaczalności

$$n_g = n_\phi + n_\delta$$

$n_\phi = 1$ - liczba węzłów sztywnych w układzie mających swobodę obrotu

Schemat kinematyczny

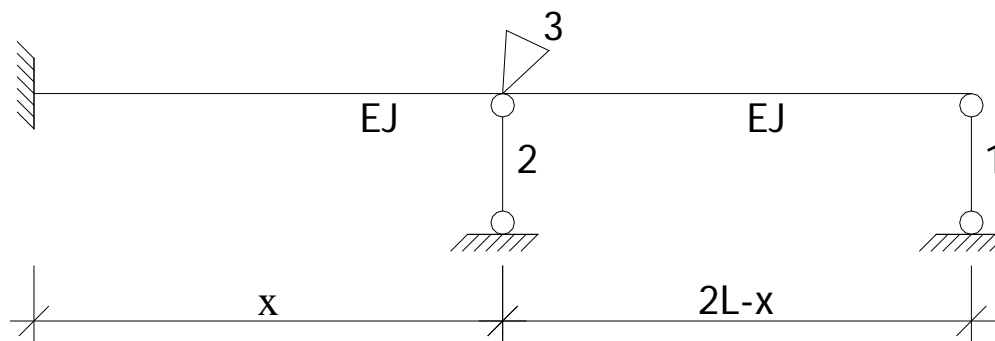


$$n_\delta = 2w - p - r = 2 \cdot 3 - 2 - 2 = 2$$

$$n_g = 1 + 2 = 3$$

$n_g = 3$ - stopień geometrycznej niewyznaczalności układu

Układ podstawowy metody przemieszczeń

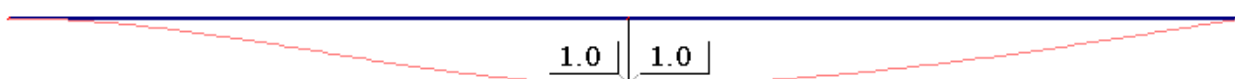


4.2. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

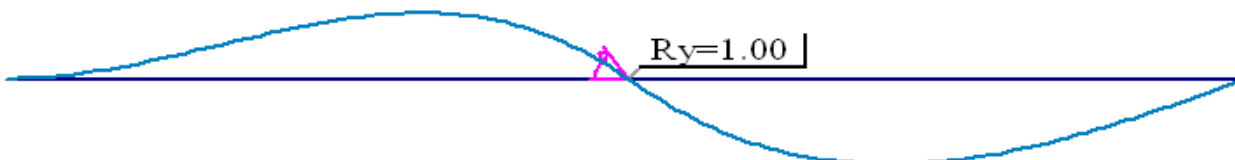
Stan jednostkowy $\delta_1 = 1$ [-]



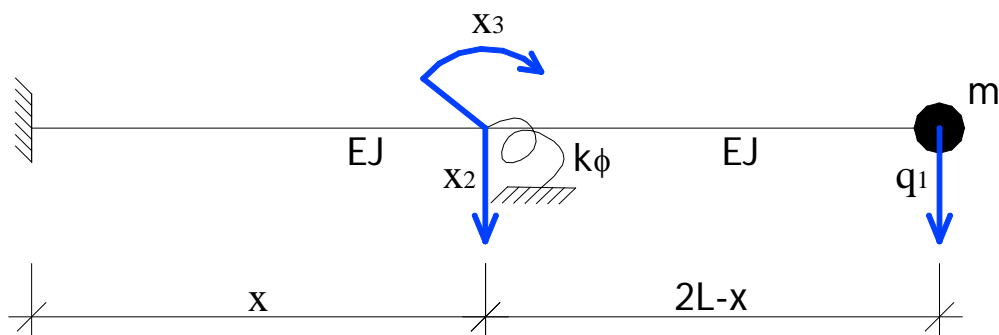
Stan jednostkowy $\delta_2 = 1$ [-]



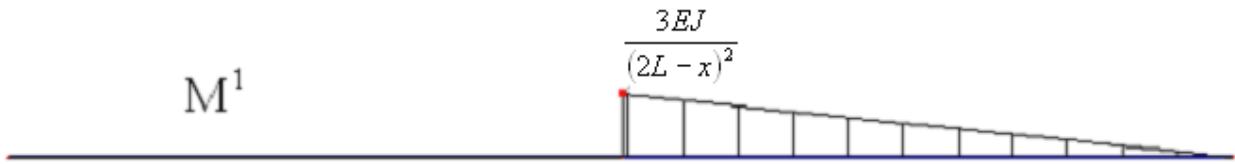
Stan jednostkowy $\phi_3 = 1$ [-]



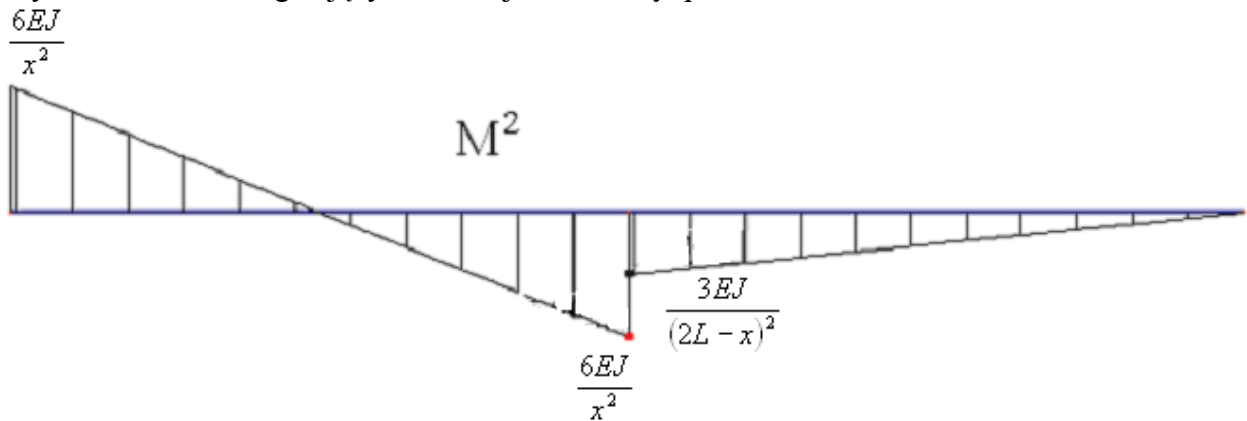
Schemat dynamiczny ze współzrędnymi uogólnionymi oraz nadliczbowymi geometrycznymi



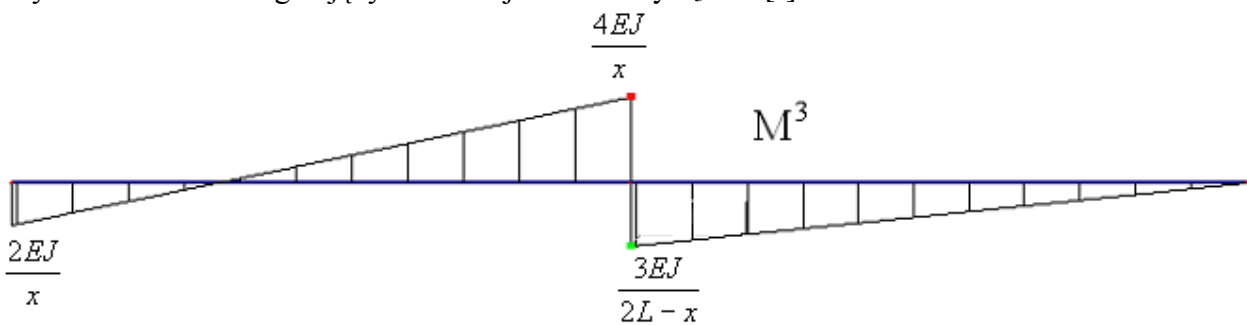
Wykres momentów zginających – stan jednostkowy $q_1 = 1 [-]$



Wykres momentów zginających – stan jednostkowy $q_2 = 1 [-]$



Wykres momentów zginających – stan jednostkowy $x_3 = 1 [-]$



Macierz sztywności w bazie poszerzonej

$$k_{11} = -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \cdot \psi_{ij}^1 + \sum_s k_s \cdot \Delta L_s^1 \cdot \Delta L_s^1 = -\left(-3 \frac{EJ}{(2L-x)^2} + 0\right) \left(\frac{1}{2L-x}\right) = \frac{3EJ}{(2L-x)^3}$$

$$k_{12} = k_{21} = -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \cdot \psi_{ij}^2 + \sum_s k_s \cdot \Delta L_s^1 \cdot \Delta L_s^2 = -\left(-3 \frac{EJ}{(2L-x)^2} + 0\right) \left(-\frac{1}{2L-x}\right) = -\frac{3EJ}{(2L-x)^3}$$

$$k_{13} = k_{31} = \sum_j M_{3j}^1 = -\frac{3EJ}{(2L-x)^2}$$

$$k_{22} = -\sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \cdot \psi_{ij}^2 + \sum_s k_s \cdot \Delta L_s^2 \cdot \Delta L_s^2 = -\left(-6 \frac{EJ}{x^2} - 6 \frac{EJ}{x^2}\right) \frac{1}{x} - \left(\frac{3EJ}{(2L-x)^2} + 0\right) \left(-\frac{1}{(2L-x)}\right) =$$

$$= \frac{12EJ}{x^3} + \frac{3EJ}{(2L-x)^3}$$

$$k_{23} = k_{32} = \sum_j M_{3j}^2 = -\frac{6EJ}{x^2} + \frac{3EJ}{(2L-x)^2}$$

$$k_{33} = \sum_j M_{3j}^3 + k_\varphi = \frac{4EJ}{x} + \frac{3EJ}{2L-x} + \xi \frac{EJ}{L}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{(2L-x)^3} & -\frac{3EJ}{(2L-x)^3} & -\frac{3EJ}{(2L-x)^2} \\ -\frac{3EJ}{(2L-x)^3} & \frac{12EJ}{x^3} + \frac{3EJ}{(2L-x)^3} & -\frac{6EJ}{x^2} + \frac{3EJ}{(2L-x)^2} \\ -\frac{3EJ}{(2L-x)^2} & -\frac{6EJ}{x^2} + \frac{3EJ}{(2L-x)^2} & \frac{4EJ}{x} + \frac{3EJ}{2L-x} + \xi \frac{EJ}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qx} \\ K_{xq} & K_{xx} \end{bmatrix}$$

Redukcja macierzy sztywności do bazy minimalnej

$$K = K_{qq} - K_{qx} \cdot K_{xx}^{-1} \cdot K_{xq}$$

$$K = \frac{3EJ}{(2L-x)^3} - \left[-\frac{3EJ}{(2L-x)^3} \quad -\frac{3EJ}{(2L-x)^2} \right] * \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{x^3} + \frac{3EJ}{(2L-x)^3} & -\frac{6EJ}{x^2} + \frac{3EJ}{(2L-x)^2} \\ -\frac{6EJ}{x^2} + \frac{3EJ}{(2L-x)^2} & \frac{4EJ}{x} + \frac{3EJ}{2L-x} + \xi \frac{EJ}{L} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} -\frac{3EJ}{(2L-x)^3} \\ \frac{3EJ}{(2L-x)^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{12EJ(L+x*\xi)}{32*L^4 + x*\xi*(32*L^3 - 48*L^2*x + 24*L*x^2 - 3*x^3)}$$

Sztywność na kierunku współrzędnej uogólnionej wynosi

$$\tilde{k} = \frac{12EJ(L+x*\xi)}{32*L^4 + x*\xi*(32*L^3 - 48*L^2*x + 24*L*x^2 - 3*x^3)}$$

4.3. Częstota własna układu

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12EJ(L+x*\xi)}{m*[32*L^4 + x*\xi*(32*L^3 - 48*L^2*x + 24*L*x^2 - 3*x^3)']}}$$

Dla skrajnych wartości ξ tj. $\xi \in (0; \infty)$ uzyskuje się

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \omega = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{\frac{12EJ(L+x*\xi)}{m*[32*L^4 + x*\xi*(32*L^3 - 48*L^2*x + 24*L*x^2 - 3*x^3)]]} = \sqrt{\frac{3EJ}{8mL^3}} =$$

$$= 0,61237 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \omega = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{12EJ(L + x * \xi)}{m * [32 * L^4 + x * \xi * (32 * L^3 - 48 * L^2 * x + 24 * L * x^2 - 3 * x^3)]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12EJ}{m * (32 * L^3 - 48 * L^2 * x + 24 * L * x^2 - 3 * x^3)}}$$

Następnie szukamy ekstremalnych wartości funkcji $\omega(x)$ w przedziale $x \in (L ; 2L)$ dla $\xi \rightarrow \infty$

$$\max \left(\sqrt{\frac{12EJ}{m * (32 * L^3 - 48 * L^2 * x + 24 * L * x^2 - 3 * x^3)}} \right) = 1,83712 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}, \quad x = 1,333L$$

$$\min \left(\sqrt{\frac{12EJ}{m * (32 * L^3 - 48 * L^2 * x + 24 * L * x^2 - 3 * x^3)}} \right) = 1,22474 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}, \quad x = 2L$$

Stąd częstość własna układu zależna od sztywności więzi k_ϕ oraz współrzędnej x zawiera się w przedziale liczbowym

$$\omega \in \left(0,61237 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} ; 1,83712 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} \right)$$

ZADANIE 5.

5.1 Równanie ruchu punktu materialnego układu dynamicznego, ma postać $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_0(\sin pt + 2\cos pt)$. Dla drgań ustalonych podać opóźnienie fazowe odpowiedzi $q(t)$. Podać relację na siłę oporów tłumienia ($c\dot{q}$), jeśli $p = \sqrt{8/9}\omega$, $\gamma = 1/8$. Ile wynosi $\text{am } c\dot{q}$?

Według skryptu prof. Langera *Dynamika Budowli*, dla równania ruchu drgań wymuszonych harmonicznymi postaci

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_s \sin(pt) + F_c \cos(pt)$$

drgania ustalone (rozwiązanie powyższego równania) można opisać wzorem

$$q(t) = \frac{v}{k} F_s \sin(pt - \phi) + \frac{v}{k} F_c \cos(pt - \phi)$$

oraz amplitudę przemieszczenia

$$\text{am} q(t) = \frac{v}{k} \sqrt{F_s^2 + F_c^2}$$

gdzie:

$$v = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}} \quad \text{jest współczynnikiem dynamicznym}$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{\gamma \eta}{1 - \eta^2}\right) \quad \text{jest opóźnieniem fazowym}$$

5.1. Opóźnienie fazowe

Dla danych w zadaniu mamy

$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{\sqrt{\frac{8}{9}}\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2\right)^2 + 0,125^2 * \left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2}} = 6,174$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{0,125 * \sqrt{\frac{8}{9}}}{1 - \left(\sqrt{\frac{8}{9}} \right)^2} \right) = 0,815 \text{ rad}$$

Opóźnienie fazowe odpowiedzi $q(t)$ wynosi $\varphi = 0,815 \text{ rad}$

5.2. Siła oporów ruchu

Siła oporów ruchu reprezentowana jest przez składnik równania „ $c \dot{q}(t)$ ”, stąd

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{k} F_S \sin(pt - \phi) + \frac{v}{k} F_C \cos(pt - \phi) \right) = \frac{v}{k} p F_S \cos(pt - \phi) - \frac{v}{k} p F_C \sin(pt - \phi)$$

Siła oporów ruchu dla danych jak w zadaniu, ma postać

$$F_S = F_0$$

$$F_C = 2F_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c = \gamma * \sqrt{k * m}$$

$$\begin{aligned} c \dot{q}(t) &= \frac{6,174}{k} * \sqrt{\frac{8}{9}} * \sqrt{\frac{k}{m}} * 0,125 * \sqrt{k * m} * F_0 * \cos(pt - 0,815) + \\ &- \frac{6,174}{k} * \sqrt{\frac{8}{9}} * \sqrt{\frac{k}{m}} * 0,125 * \sqrt{k * m} * 2 * F_0 * \sin(pt - 0,815) = \\ &= 0,7276 F_0 \cos(pt - 0,815) - 1,4552 F_0 \sin(pt - 0,815) \end{aligned}$$

Wartość amplitudalna siły oporów ruchu

$$\begin{aligned} \text{am}(c \dot{q}(t)) &= \sqrt{(\text{am } c \dot{q}_S)^2 + (\text{am } c \dot{q}_C)^2} = \sqrt{(-1,4552 F_0)^2 + (0,7276 F_0)^2} = \\ &= 1,627 F_0 \end{aligned}$$

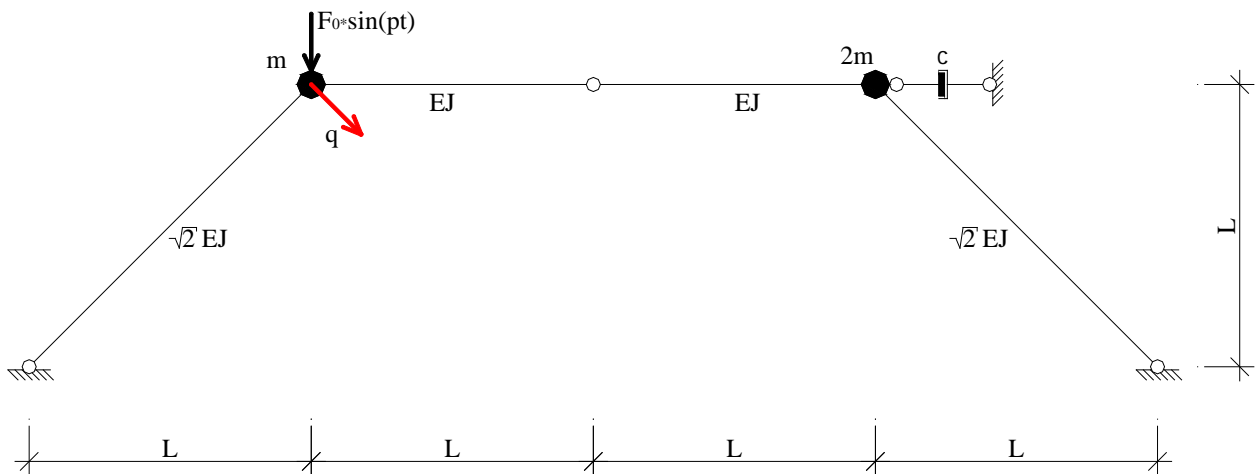
ZADANIE 6.

6.1 Wyznaczyć wartości ω_n oraz sprężyczki statycznej i dynamicznej wykres M . Jak zmieniają się te wielkości uwzględniając proces przejściowy? Zaprojektować przekroje ramy.

Dane:
 $L = 4\text{ m}$, $m = 4000\text{ kg}$, $F = 3\text{ kN}$,
 $EA = \infty$, $E = 10^3 f_{ct} = 1200\text{ GPa}$,
 $\gamma_f = 1,2$, $\xi = 2$, $p = \sqrt{1,05} \omega$, $c = \sqrt{m EJ/l^3}$, $EJ = \text{constans}$.

6.1. Wyznaczenie sztywności na kierunku współrzędnej uogólnionej

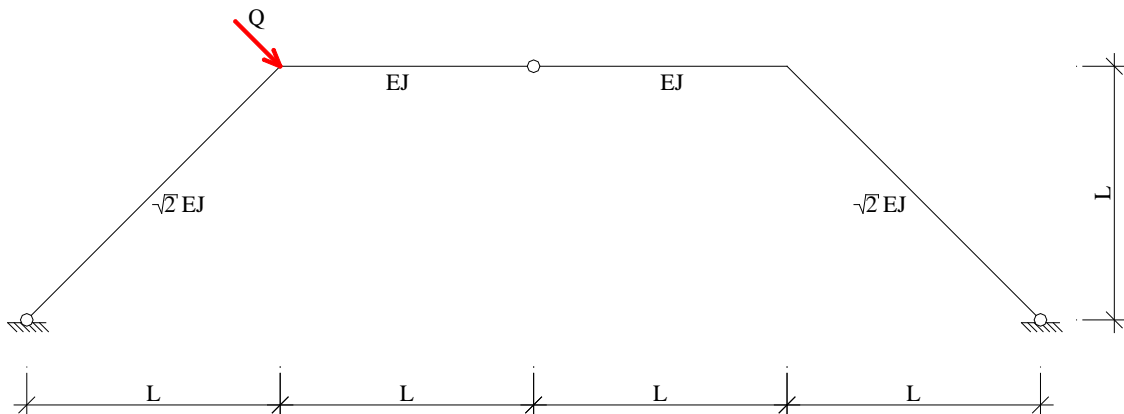
Analizowany układ ma jeden dynamiczny stopień swobody. Współrzędną uogólnioną przyjęto jako ruch masy skupionej „m” prostopadły do osi pręta.



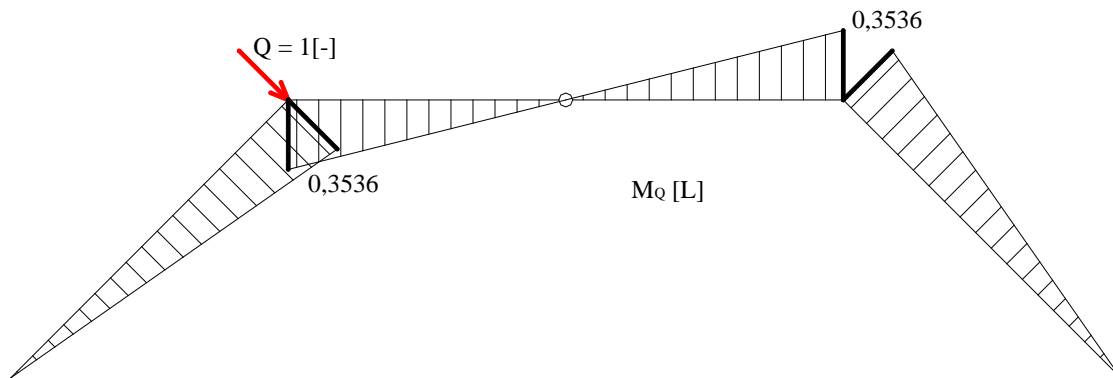
Sztywność układu wyznaczono za pomocą metody sił obliczając najpierw podatność układu a następnie sztywność według relacji

$$k = \delta^{-1}$$

Układ podstawowy metody sił



Stan jednostkowy $Q = 1[-]$



Podatność układu

$$\delta_{QQ} = \frac{1}{\sqrt{2}EJ} \left[\frac{1}{2} * \sqrt{2}L * 0,3536L * \frac{2}{3} * 0,3536L \right] * 2 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} * L * 0,3536L * \frac{2}{3} * 0,3536L \right] * 2 = 0,1667 \frac{L^3}{EJ}$$

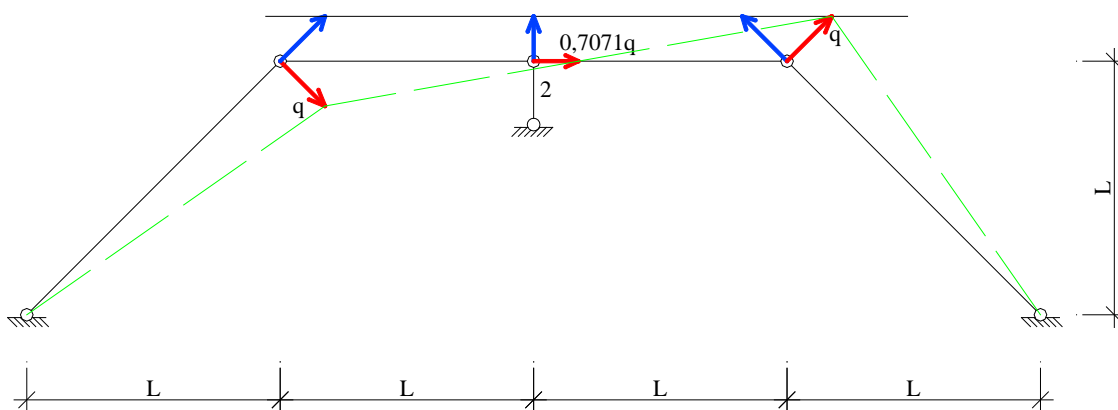
Sztywność układu

$$k = \delta_{QQ}^{-1} = \left(0,1667 \frac{L^3}{EJ} \right)^{-1} = 6 \frac{EJ}{L^3}$$

6.2. Wyznaczenie masy na kierunku współrzędnej uogólnionej

Masę układu wyznaczono na podstawie sformułowania energii kinetycznej E_k .

Plan przemieszczeń – na podstawie schematu kinematycznego



$$E_k = \frac{1}{2} * m * \dot{q}^2 + \frac{1}{2} * 2m * \dot{q}^2 = \frac{1}{2} * 3m * \dot{q}^2$$

$$\tilde{m} = 3m$$

6.3. Wyznaczenie tłumienia na kierunku współrzędnej uogólnionej

$$\Phi = \frac{1}{2} * c * \dot{q}^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} * c * \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{q} \right)^2 = \frac{1}{2} * \frac{c}{2} * \dot{q}^2$$

$$\tilde{c} = \frac{c}{2}$$

6.4. Wyznaczenie siły wzbudzającej

$$L = F(t) * q$$

$$L = F_0 \sin(pt) * \frac{\sqrt{2}}{2} q = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \sin(pt) q$$

$$F(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \sin(pt)$$

6.5. Równanie ruchu układu

Równanie dla danych w zadaniu ma postać

$$3m \ddot{q}(t) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mEJ}{L^3}} \dot{q}(t) + 6 \frac{EJ}{L^3} q(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \sin(pt)$$

Częstość drgań własnych

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6EJ}{3mL^3}} = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}} = 1,4142 \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$$

6.6. Wyznaczenie amplitudy siły kinetycznej oraz amplitudy przemieszczenia dynamicznego w stanie drgań ustalonych

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{k * m}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m * EJ}{L^3}}}{\sqrt{\frac{6EJ}{L^3} * 3m}} = 0,11785$$

$$\eta = \frac{p}{\omega} = \frac{\sqrt{1,05} \omega}{\omega} = \sqrt{1,05} = 1,0247$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{(1-1,05)^2 + 0,11785^2 * 1,05}} = 7,651$$

Amplituda siły kinetycznej

$$amQ = v\sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2} * amF$$

dla $\eta = \sqrt{1,05}$, stąd

$$amQ = 7,651 * \sqrt{1 + 0,11785^2 * 1,05} * \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 = 5,4494 F_0$$

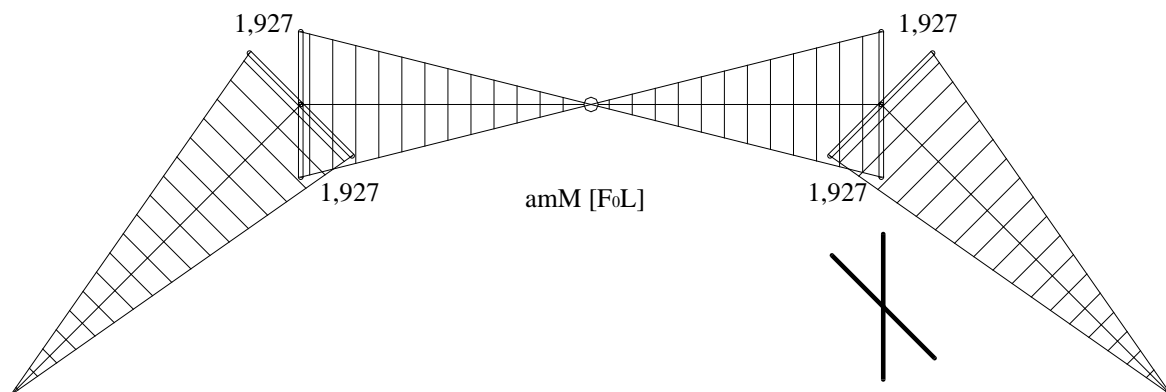
Amplituda przemieszczenia dynamicznego

$$amq = \frac{v}{k} amF = \frac{7,651}{\frac{6EJ}{L^3}} * \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 = 0,9017 * \frac{F_0 L^3}{EJ}$$

Amplitudalne momenty dynamiczne

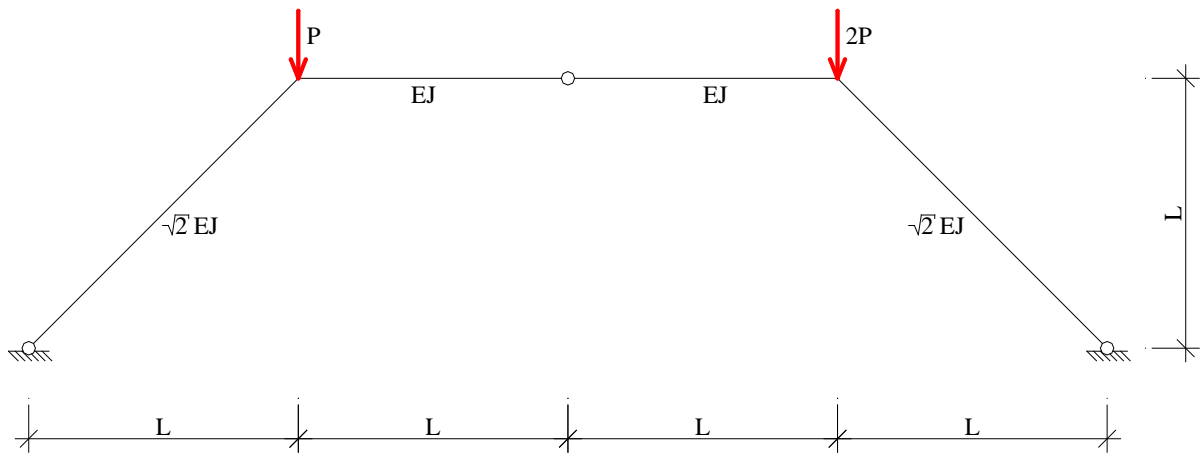
Amplitudalne momenty dynamiczne wyznaczono na podstawie wykresu momentów zginających w stanie $Q = 1[-]$

$$amM = amQ * M_Q = 5,4494 F_0 * 0,3536 L = 1,927 F_0 L$$

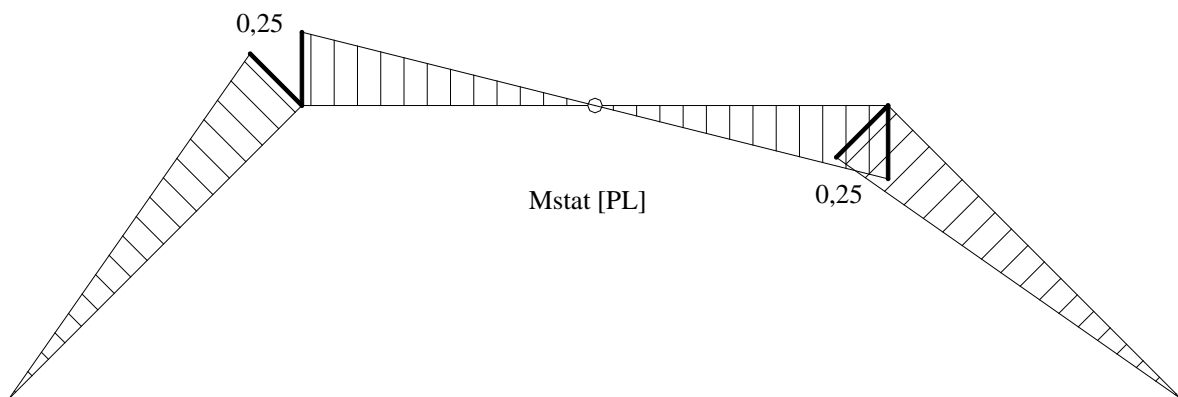


6.7. Rozwiązanie statyczne

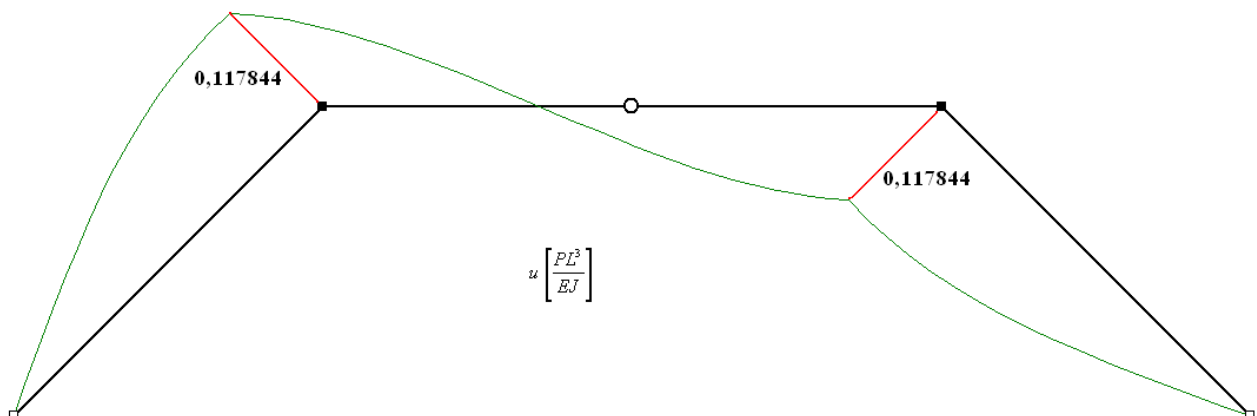
Statyczne działanie masy: $P = m g$



Wykres momentów statycznych



Wykres przemieszczeń statycznych



6.8. Obwiednia momentów statyczno-dynamicznych. Projektowanie przekrojów ramy

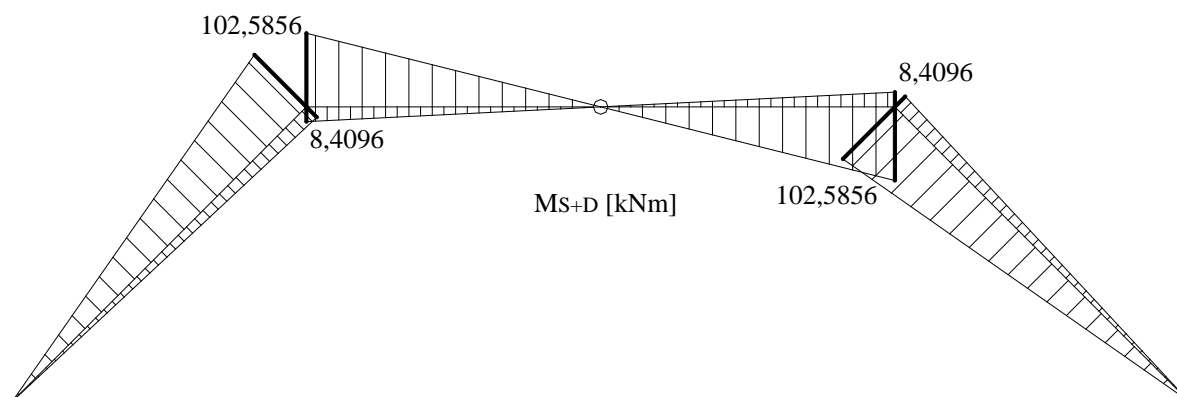
Momenty statyczno dynamiczne

$$M^{S+D} = \gamma_f * M^{stat} \pm \gamma_f * \xi * amM$$

$$M^{S+D} = 1,2 * 0,25 * 4000 * 9,81 * 4,0 + 1,2 * 2 * 1,927 * 3000 * 4,0 = 102585,6 \text{Nm} = 102,5856 \text{kNm}$$

$$M^{S+D} = 1,2 * 0,25 * 4000 * 9,81 * 4,0 - 1,2 * 2 * 1,568 * 3000 * 4,0 = -8409,6 \text{Nm} = -8,4096 \text{kNm}$$

Wykres obwiedni momentów statyczno-dynamicznych



Dobór przekroju poprzecznego ze względu na SGN

$$W > \frac{M_d^{extr}}{f_d}$$

$$W > \frac{102,5856 \text{kNm}}{200000 \text{kPa}} = 512,9 \text{cm}^3$$

Dobór przekroju poprzecznego ze względu na SGU

$$y_{dop} = \frac{l_p}{450} = \frac{4m}{450} = 0,0889m$$

Dla dowolnego przekroju ugięcie wynosi

$$q_i = q_{i,stat} + amq_i$$

$$q_{S+D} = 0,117844 \frac{PL^3}{EJ} + 0,9017 \frac{F_0 L^3}{EJ} = 0,117844 \frac{4000 * 9,81 * 4^3}{200 * 10^9 * J} + 0,9017 \frac{3000 * 4^3}{200 * 10^9 * J} =$$

$$= \frac{0,000002345 \text{m}^5}{J}$$

Warunek SGU

$$q_{S+D} < y_{\text{dop}}$$

$$\frac{0,000002345\text{m}^5}{J} < 0,0889\text{m}$$

$$J > \frac{0,000002345\text{m}^5}{0,0889\text{m}} = 0,000026378\text{m}^4 = 2637,8\text{cm}^4$$

Przyjęto przekrój

$$2 \text{ C240: } W_x = 600 \text{ cm}^3, J_x = 7200 \text{ cm}^4$$

Przekrojowa sztywność giętna

$$EJ = 200 \cdot 10^9 \cdot 7200 \cdot 10^{-8} = 14400000 \text{ Nm}^2$$

6.9. Wyznaczenie amplitudy siły kinetycznej oraz amplitudy przemieszczenia dynamicznego w procesie przejściowym

Siła kinetyczna

$$Q(t) = k \left(q_s(t) + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}_s(t) - \frac{\gamma P}{\omega} \dot{q}_c(t) \right) \sin(\varphi(t)) + k \left(q_c(t) + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}_c(t) + \frac{\gamma P}{\omega} \dot{q}_s(t) \right) \cos(\varphi(t))$$

przy czym $\varphi(t)$ nie jest znana.

$$Q_s(t) = k \left(q_s(t) + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}_s(t) - \frac{\gamma P}{\omega} \dot{q}_c(t) \right)$$

$$Q_c(t) = k \left(q_c(t) + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}_c(t) + \frac{\gamma P}{\omega} \dot{q}_s(t) \right)$$

Zamiast amplitudalnej wartości można podać jedynie majorantę (obwiednię)

$$\hat{Q}(t) = \sqrt{Q_s^2(t) + Q_c^2(t)}$$

Przemieszczenie dynamiczne

$$q_s(t) = \left(q_s(t) + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}_s(t) - \frac{\gamma P}{\omega} \dot{q}_c(t) \right)$$

$$q_c(t) = \left(q_c(t) + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}_c(t) + \frac{\gamma P}{\omega} \dot{q}_s(t) \right)$$

Majoranta przemieszczenia

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\hat{q}_s^2(t) + \hat{q}_c^2(t)}$$

Są to podstawowe i zarazem najbardziej istotne różnice pomiędzy drganiami w stanie ustalonym, a procesem przejściowym. W celu wyznaczenia obwiedni siły kinetycznej i przemieszczenia dynamicznego, należy rozwiązać numerycznie układ równań różniczkowych

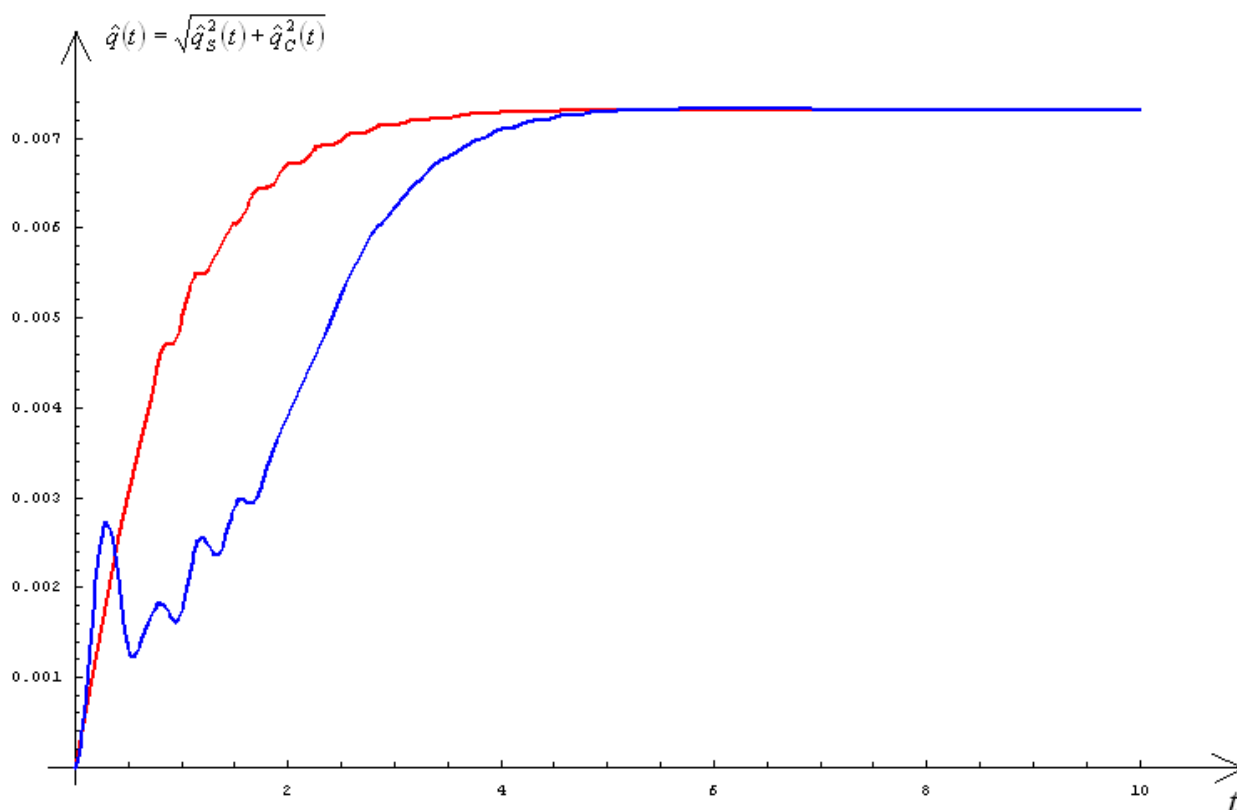
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_s(t) \\ \ddot{q}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \omega & -2p(t) \\ 2p(t) & \gamma \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_s(t) \\ \dot{q}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 - p^2(t) & -\gamma \omega p(t) - \dot{p}(t) \\ \gamma \omega p(t) + \dot{p}(t) & \omega^2 - p^2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_s(t) \\ q_c(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_s(t) \\ F_c(t) \end{bmatrix}$$

co jest zadaniem niezwykle skomplikowanym (współczynniki zmienne w czasie) !!!

Po numerycznym scałkowaniu powyższego układu równań uzyskano majoranty przemieszczeń dynamicznych:

- kolor czerwony dla stałej częstości wzbudzenia $p = \sqrt{1,05} \omega$ - bez procesu przejściowego
- kolor niebieski (proces przejściowy) dla liniowo zmiennej częstości wzbudzenia

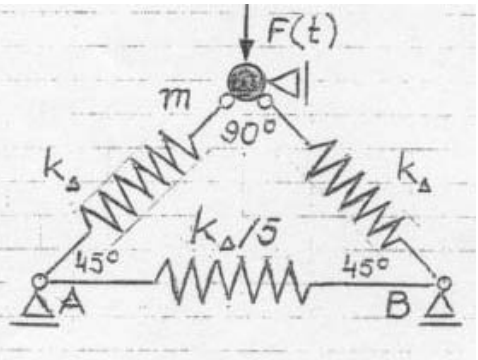
$$p = \begin{cases} \sqrt{1,05} \omega t & t \leq 2s \\ \sqrt{1,05} \omega & t > 2s \end{cases}$$



Z wykresu wywnioskować można, że po dostatecznie długim przedziale czasu (tutaj około 7s) efekty związane z procesem przejściowym zanikają i odpowiedź układu jest identyczna jak dla drgań ustalonych.

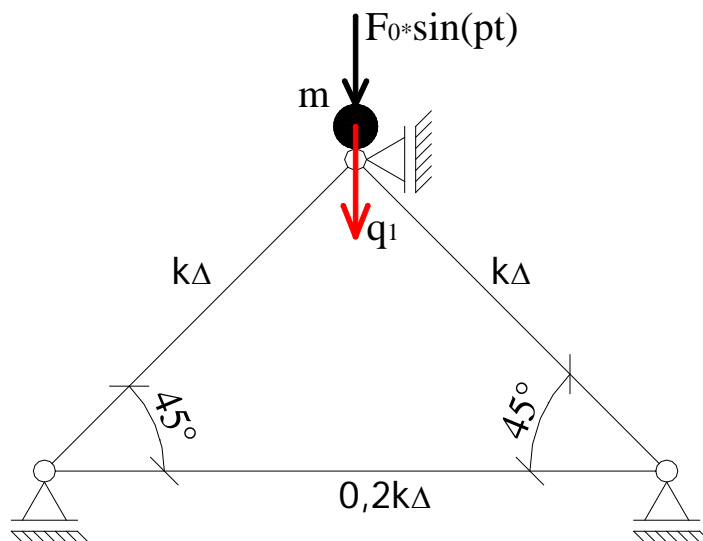
ZADANIE 7.

7.1 Napisac równanie ruchu. W jakiej srobie strojenia pracuje konstrukcja, jeśli $F(t) = F_0 \sin pt$, a $\rho = \sqrt{k_\Delta / m}$. Podac amplitudalnosc siły kinetycznej. Ile wynosi zmiana odleglosci między punktami A i B. Poprawnosc rozwiazania zwieryfikowac traktujac układ jako dyskretny.



7.1. Przyjęcie współrzędnej uogólnionej

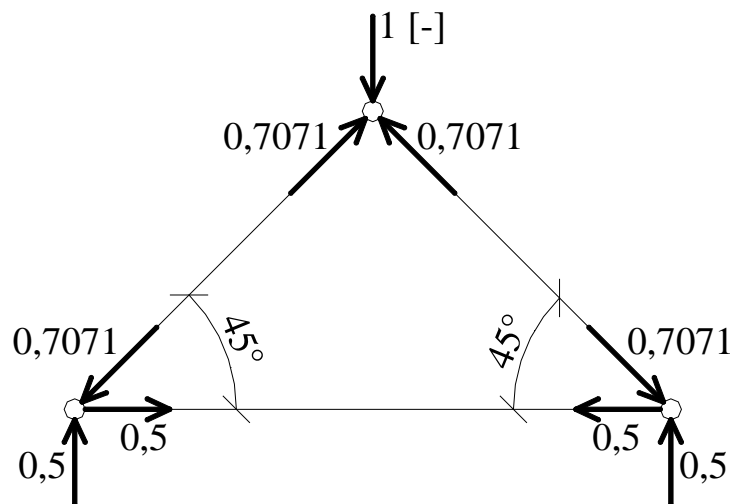
Analizowany układ ma jeden dynamiczny stopień swobody. Współrzędną uogólnioną przyjęto jako pionowe przemieszczenie masy skupionej (rys. poniżej).



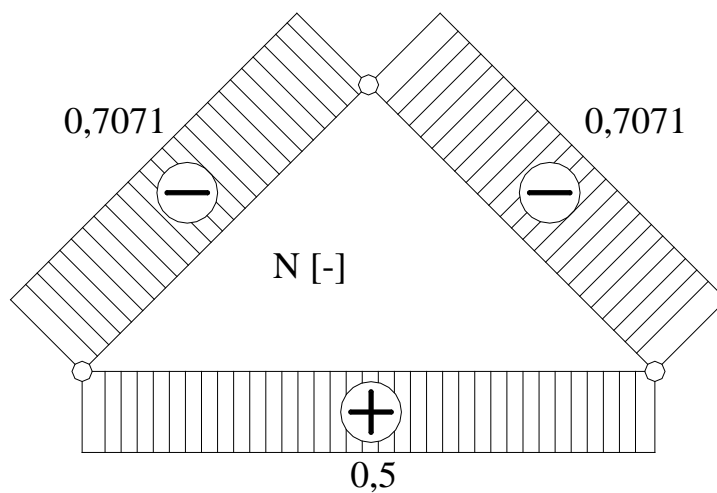
7.2. Wyznaczenie sztywności układu

Sztywność układu można wyznaczyć na podstawie podatności rozwiązując ten układ jak kratownicę elementarną.

Rozkład sił od obciążenia jednostkowego



Wykres sił osiowych



Podatność układu

$$\delta = \frac{1}{k_{\Delta}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{k_{\Delta}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{0,2k_{\Delta}} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4k_{\Delta}}$$

Sztywność układu

$$k = \delta^{-1} = \left(\frac{9}{4k_{\Delta}} \right)^{-1} = \frac{4k_{\Delta}}{9}$$

7.3. Równanie ruchu oraz częstość własna układu

Postać ogólna równania ruchu dla układu o jednym stopniu swobody

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = F(t)$$

Dla danych z zadania mamy

$$m\ddot{q}(t) + \frac{4k_{\Delta}}{9}q(t) = F_0 \sin(pt)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4k_{\Delta}}{9m}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}} = 0,667\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}$$

7.4. Ustalenie strefy strojenia

$$\eta = \frac{p}{\omega}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_{\Delta}}{m}}} = 1,5$$

$\eta = 1,5 > 1$ konstrukcja pracuje w strefie niskiego strojenia !

7.5. Amplitudalna wartość siły kinetycznej

Dla układu, w którym tłumienie jest pomijalnie małe współczynnik dynamiczny wyznacza się ze wzoru

$$\nu = \frac{1}{|1 - \eta^2|}$$

$$\nu = \frac{1}{|1 - 1,5^2|} = 0,8$$

$$amQ = \nu \cdot amF = 0,8F_0$$

7.6. Zmiana odległości między punktami A, B

Pręt poziomy można potraktować jako izolowaną więź sprężystą, która rozciągana jest siłą 0,5 [-]. Zatem zmianę odległości między punktami A i B wyznaczyć można z definicji więzi sprężystej

$$|AB| = \frac{P}{k} = \frac{0,5}{0,2k_{\Delta}} = \frac{2,5}{k_{\Delta}}$$