WZORY DO WYZNACZANIA PRZEMIESZCZEŃ

W celu wyznaczenia przemieszczenia należy dany układ rozwiązać od 2 obciążeń:

1. Od obciążenia stanowiącego przyczynę wywołującą szukane przemieszczenie,
2. Od obciążenia "jednostkowego" przyłożonego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia.

***Uwaga**:* Jedno z tych rozwiązań może być wirtualne co w praktyce oznacza, że wystarczy by było statycznie dopuszczalne, to jest by spełniało równania równowagi. Może ono być uzyskane w drodze rozwiązania dowolnego izostatycznego modelu układu. We wzorach oznaczono je nadkreśleniem.

PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s} =$$

$$= \int \frac{M^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot V^i \cdot V^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s} =$$

$$= \int \frac{M^i \cdot \overline{M}^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot \overline{N}^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot V^i \cdot \overline{V}^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot \overline{S}_s^F}{k_s}.$$

PRZEMIESZCZENIA OD BŁĘDÓW MONTAŻU I PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^\Delta}{EJ} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^\Delta}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^\Delta}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} +$$

$$+ \sum_m \overline{M}_m^i \cdot \Delta\varphi_m^\Delta + \sum_n \overline{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v \overline{V}_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum_r \overline{R}_r^i \cdot \Delta_r =$$

$$= \sum_m M_m^i \cdot \Delta\varphi_m^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v V_v^i \cdot \Delta \underset{v}{h}^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r .$$

PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^T}{EI} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \int \overline{M}^i \cdot \Delta d\varphi^T + \int \overline{N}^i \cdot \Delta dL^T =$$

$$= \int M^i \cdot \Delta d\varphi^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T ,$$

gdzie $\Delta d\varphi^T = \dfrac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot dx,\qquad \Delta dL^T = \alpha_T \cdot \Delta To \cdot dx = \alpha_T \cdot \dfrac{(\Delta T_w \cdot h_p + \Delta T_p \cdot h_w)}{h} \cdot dx .$

Gdy przekrój jest symetryczny $h_w = h_p = h/2, \qquad \Delta To = (\Delta Tw + \Delta Tp)/2 .$

Zwykle wyrażenia $\dfrac{\alpha_T \cdot (\Delta Tw - \Delta Tp)}{h}$ i $\alpha_T \cdot \Delta To$ są na długości określonych przedziałów stałe.

W tym przypadku wzory te przyjmują postać:

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^T}{EI} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} +$$

$$+ \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta Tw - \Delta Tp)}{h} \cdot \Omega_{\overline{M}^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta To \cdot \Omega_{\overline{N}^i} \right)_p =$$

$$= \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta Tw - \Delta Tp)}{h} \cdot \Omega_{M^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta To \cdot \Omega_{N^i} \right)_p ,$$

DLA KRATOWNIC:

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \sum_p \frac{\overline{N}_p^i \cdot N_p^F}{E_p A_p} \cdot L_p + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \sum_p \frac{N_p^i \cdot N_p^F}{E_p A_p} \cdot L_p + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \sum_p \frac{N_p^i \cdot \overline{N}_p^F}{E_p A_p} \cdot L_p + \sum_s \frac{S_s^i \cdot \overline{S}_s^F}{k_s}$$

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = \sum_p \frac{\overline{N}_p^i \cdot N_p^\Delta}{E_p A_p} \cdot L_p + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \sum_p \overline{N}_p^i \cdot \Delta L_p^\Delta - \sum_r \overline{R}_r^i \cdot \Delta_r = \sum_p N_p^i \cdot \Delta L_p^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r$$

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \sum_p \frac{\overline{N}_p^i \cdot N_p^T}{E_p A_p} \cdot L_p + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \sum_p \overline{N}_p^i \cdot \Delta L_p^T = \sum_p N_p^i \cdot \Delta L_p^T \qquad gdzie \quad \Delta L_p^T = \alpha_{T\,p} \cdot L_p \cdot \Delta To_p .$$

W układach izostatycznych rozwiązania rzeczywiste są identyczne z wirtualnymi (statycznie dopuszczalnymi): $\overline{M} = M,\ \overline{N} = N,\ \overline{V} = V,\ \overline{R} = R,\ \overline{S} = S.$

a zmiany temperatury, przemieszczenia podpór i błędy montażu nie wywołują żadnych sił:

$$\overline{M}^{\Delta} = M^{\Delta} = 0,\ \overline{N}^{\Delta} = N^{\Delta} = 0,\ \overline{V}^{\Delta} = V^{\Delta} = 0,\ \overline{R}^{\Delta} = R^{\Delta} = 0,\ \overline{S}^{\Delta} = S^{\Delta} = 0,$$

$$\overline{M}^{T} = M^{T} = 0,\ \overline{N}^{T} = N^{T} = 0,\ \overline{V}^{T} = V^{T} = 0,\ \overline{R}^{T} = R^{T} = 0,\ \overline{S}^{T} = S^{T} = 0.$$

Stąd

DLA UKŁADÓW IZOSTATYCZNYCH

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{M^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot V^i \cdot V^F}{GA} \cdot dx + \sum \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s},$$

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^{\Delta} = \sum_m M_m^i \cdot \Delta\varphi_m^{\Delta} + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^{\Delta} + \sum_v V_v^i \cdot \Delta h_v^{\Delta} - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.$$

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int M^i \cdot \Delta d\varphi^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T.$$

Gdy wyrażenia $\dfrac{\alpha_T \cdot (\Delta Tw - \Delta Tp)}{h}$ i $\alpha_T \cdot \Delta To$ są, na długości określonych przedziałów, stałe

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta Tw - \Delta Tp)}{h} \cdot \Omega_{M^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta To \cdot \Omega_{N^i} \right)_p,$$

Dla kratownic izostatycznych

$$\Delta_{iF} = \sum_p \frac{N_p^i \cdot N_p^F}{E_p A_p} \cdot L_p + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}, \qquad \Delta_{i\Delta} = \Delta_i^{\Delta} = \sum_p N_p^i \cdot \Delta L_p^{\Delta} - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r \qquad \Delta_{iT} = \Delta_i^T = \sum_p N_p^i \cdot \Delta L_p^T.$$

PRZYJĘTE OZNACZENIA

Oznaczenie *wielkości składa się z symbolu oznaczającegotę wielkość i indeksów dolnych oraz górnych.*

SYMBOLE oznaczające określone wielkości:

Δ - przemieszczenie (może to być przesunięcie, kąt obrotu lub dowolna suma przemieszczeń a w tym wzajemne przemieszczenie) lub przyrost określonej wielkości

M=M(x) – moment zginający, *N=N(x)* – siła osiowa (podłużna),

V=V(x) – siła tnąca (poprzeczna), Ω - pole wykresu siły przekrojowej

S – siła w więzi sprężystej (moment w więzi rotacyjnej lub siła podłużna w więzi translacyjnej),

k – sztywność więzi sprężystej, α_T - współczynnik rozszerzalności termicznej materiału,

$\kappa = \dfrac{A}{I^2} \cdot \int_A \dfrac{S^2}{b^2} \cdot dA$ - współczynnik zależny od kształtu przekroju (dla dwuteowników $\kappa \cong \dfrac{A}{A_w}$),

E – moduł sprężystości podłużnej materiału (Younga),

$G = \dfrac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ – moduł sprężystości poprzecznej (postaciowej) materiału (Kirchoffa),

ν - współczynnik Poissona, *b* – szerokość przekroju w miejscu ścinania

A, I – pole i moment bezwładności poprzecznego przekroju pręta,

S – moment statyczny „odciętej” części przekroju, A_w - pole przekroju środnika.

INDEKSY

Indeks górny określa przyczynę wywołującą daną wielkość.

Pierwszy indeks dolny określa miejsce działania (występowania) danej wielkości.

Drugi indeks dolny określa, jeśli nie ma indeksu górnego, przyczynę wywołującą daną wielkość, a jeśli jest indeks górny, stanowi uzupełnienie określenia miejsca działania danej wielkości.

Np.: M^n oznacza moment w dowolnym miejscu wywołany przyczyną oznaczoną symbolem ***n***,

M_{ij}^n oznacza moment w punkcie ***i*** pręta ***i-j*** wywołany przyczyną oznaczoną symbolem ***n***,

Δ_{ij}, Δ_i^j oznaczają przemieszczenie w miejscu i kierunku ***i*** wywołane przyczyną oznaczoną symbolem ***j***

N_p^i oznacza siłę osiową w pręcie o numerze ***p*** wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem ***i***,

S_s^i oznacza siłę w więzi sprężystej o numerze ***s*** wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem ***i.***